**Gewöhnliche Differentialgleichungen II, WS 2020/21,
Aufgabenblatt 5**

Aufgabe 1 (Staatsexamen Frühjahr 2014, Thema III, Aufgabe 4)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}x_1' &= -x_1x_2 \\ x_2' &= e^{x_1}(1 - x_2^2)\end{aligned}$$

zum Anfangswert $x(0) = (1, 0)$.

Zeigen Sie:

- Das Anfangswertproblem hat eine eindeutige maximale Lösung $x: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$.
- Für alle $t \in I$ gilt $-1 < x_2(t) < 1$.
- $I = \mathbb{R}$.
- $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = (0, 1)$ und $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = (0, -1)$.

Aufgabe 2 (Staatsexamen Frühjahr 2009, Thema II, Aufgabe 1)

Gegeben sei folgendes Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}x' &= -y + x \sin(x^2 + y^2), \\ y' &= x + y \sin(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

- Bestimmen Sie alle periodischen Orbits.
- Skizzieren Sie das Phasenportrait.

Hinweis: Man transformiere auf Polarkoordinaten. Zunächst bestimme man eine Differentialgleichung für $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Abgabe 26. November 2021, 23:59 Uhr.