Mathematisches Institut
Universität Eichstätt
Dr. Thilo Kuessner 30. Januar 2022

**Gewöhnliche Differentialgleichungen II, WS 2020/21,
Aufgabenblatt 13**

Aufgabe 1 (Staatsexamen Herbst 2018, Thema III, Aufgabe 3)

Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$(y_1, y_2) \to (y_1^2 - y_1(y_2+1) - 2, -2y_2).$$

a) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte von $y' = f(y)$.
b) Seien $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ und $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\tilde{f}(y_1, y_2) := f(y_1 + c_1, y_2 + c_2)$. Zeigen Sie, dass y eine asymptotisch stabile Lösung von $y' = f(y)$ genau dann ist, wenn $\tilde{y} = y - c$ eine asymptotisch stabile Lösung von $\tilde{y}' = \tilde{f}(\tilde{y})$ ist.
c) Überprüfen Sie, ob die Gleichgewichtspunkte aus a) asymptotisch stabile Lösungen sind.

Aufgabe 2:

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$x' = y + x^2 - \frac{x}{4}(y - 1 + 2x^2)$$

$$y' = -2(1+y)x.$$

a) Bestimmen Sie die Gleichgewichte.
b) Zeigen Sie, dass die beiden Kurven $y = 1 - 2x^2$ und $y = -1$ invariante Mengen sind.
c) Man betrachte die Funktion

$$H(x, y) = x^2(1+y) + \frac{y^2}{2}.$$

Sei D das von den beiden Kurven $y = 1 - 2x^2$ und $y = -1$ eingeschlossene beschränkte Gebiet. Zeigen Sie, dass $H(x, y) < \frac{1}{2}$ für alle inneren Punkte und $H(x, y) = \frac{1}{2}$ für alle Randpunkte von D gilt.
d) Sei $(x(t), y(t))$ eine Lösung des Differentialgleichungssystems mit

$$(x(0), y(0)) \in D.$$

Zeigen Sie, dass $H(x(t), y(t))$ monoton wachsend ist.

Abgabe 9. Februar 2022