**Gewöhnliche Differentialgleichungen II, WS 2021/22,
Aufgabenblatt 2**

Aufgabe 1: (Staatsexamen Herbst 2020, Thema I, Aufgabe 5)

Sei $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ eine stetige Funktion, deren einzige Nullstelle 0 ist. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x' = g(x), x(0) = x_0$$

mit $x_0 \in [0, \infty)$. Beweisen Sie:

a) Eine Lösung $x: [0, a) \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt nur nichtnegative Werte an und ist monoton steigend. Ist $x(s) > 0$ für ein $s \in [0, a)$, dann ist $x(t)$ streng monoton wachsend auf $[s, a)$.

b) Für $x_0 > 0$ gibt es eine eindeutige Lösung.

c) Falls $x_0 = 0$ und $\int_0^1 \frac{1}{g(x)} dx = \infty$, gibt es ebenfalls eine eindeutige Lösung.

Aufgabe 2 (Staatsexamen Frühjahr 2007, Thema III, Aufgabe 4)

Sei F eine stetig differenzierbare Funktion ohne Nullstelle, die periodisch mit der Periode $\omega > 0$ ist. Zeigen Sie:

a) Die maximalen Lösungen der autonomen Differentialgleichung $x' = F(x)$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

b) Jede maximale Lösung $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von $x' = F(x)$ ist surjektiv.

c) Es gibt eine Lösung $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x(t+b) - x(t) \in \mathbb{Z}\omega$ für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei $b > 0$ eine geeignete Konstante ist.

Hinweise: Auf abgeschlossenen Intervallen $[a, b]$ sind stetige Funktionen beschränkt. Für a) benötigt man die Periodizität, für b) auch dass F keine Nullstelle hat. Für c) kann man b) verwenden. $\mathbb{Z}\omega$ bezeichnet die ganzzahligen Vielfachen von ω .