Aufgabe 3a

Angenommen, es gäbe kein solches $r > 0$. Das heißt: für alle $r > 0$ gäbe es ein $x \in [x_0 - r, x_0 + r] \cap [0,1]$ mit $f(x) < \frac{a}{2}$.

Insbesondere gilt dies für $r = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbf{N}$. Es gibt also für alle $n \in \mathbf{N}$ ein $x_n \in [0,1]$ mit

$$x_0 - \frac{1}{n} \leq x_n \leq x_0 + \frac{1}{n}$$

und

$$f(x_n) < \frac{a}{2}.$$

Aus $x_0 - \frac{1}{n} \leq x_n \leq x_0 \leq x_0 + \frac{1}{n}$ folgt, da die Folge $(x_n)_n$ gegen x_0 konvergiert. Weil f stetig ist, konvergiert $(f(x_n))_n$ dann gegen $f(x_0)$, also

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)_n = a.$$

Weil für alle $n \in \mathbf{N}$ die Ungleichung

$$f(x_n) < \frac{a}{2}$$

gilt, muß für den Grenzwert der Folge $(f(x_n))_n$ aber gelten:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq \frac{a}{2}.$$

Wegen $a > 0$ ist

$$\frac{a}{2} < a,$$

wir erhalten also einen Widerspruch.

Aufgabe 3b

Angenommen, es gäbe ein $x_0 \in [0,1]$ mit $f(x_0) \neq 0$.

Nach Voraussetzung ist $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,1]$. Also ist

$$a := f(x_0) > 0.$$

Nach Aufgabe 3a gibt es ein $r > 0$, so da

$$f(x) > \frac{a}{2}$$

für alle

$$x \in [x_0 - r, x_0 + r] \cap [0,1].$$

Wir können r so klein wählen, dass $r < min\{x_0, 1 - x_0\}$, d.h. $[x_0 - r, x_0 + r] \subset [0,1]$.

Betrachte die Zerlegung

$$Z = \{0 < x_0 - r < x_0 + r < 1\}$$

und die Stufenfunktion

$$g(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 < x < x_0 - r \\ \frac{a}{2} & x_0 - r < x < x_0 + r \\ 0 & x_0 + r < x < 1 \end{array} \right\}.$$

Für das Integral von g haben wir:

$$\int_0^1 g(x)\,dx = 0.(x_0 - r) + \frac{a}{2}(2r) + 0.(1 - x_0 - r) = ar > 0.$$

Für alle $x \in [0,1]$ ist

$$g(x) \leq f(x),$$

daraus folgt

$$\int_0^1 f(x)\,dx \geq \int_0^1 g(x)\,dx > 0.$$

Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

Für unstetige Funktionen gilt die Behauptung nicht. Zum Beispiel ist die durch

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{array} \right\}$$

definierte Funktion nichtnegativ und nicht konstant Null, aber es ist

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

Aufgabe 4a

Für $n \in \mathbf{N}$ definieen wir eine Zerlegung

$$Z = \left\{0 < 2^{-n} < 2^{-n+1} < 2^{-n+2} < \ldots < 2^{-2} < 2^{-1} < 1\right\}$$

und eine Stufenfunktion

$$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 < x < 2^{-n} \\ 2^{-m} & 2^{-m-1} < x < 2^{-m}, m \in \mathbf{N}, m < n \end{array} \right\}.$$

Dann ist

$$f_n(x) - f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 2^{-m} & 2^{-m-1} < x < 2^{-m}, m \in \mathbf{N}, m \geq n \\ 0 & 2^{-m-1} < x < 2^{-m}, m \in \mathbf{N}, m < n \end{array} \right\}.$$

Insbesondere ist

$$f_n(x) - f(x) \leq 2^{-n}$$

für alle $x \in [0,1]$. Also

$$0 \leq \| f_n - f \|_\infty \leq \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbf{N}$, woraus

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f$$

folgt. f ist also eine Regelfunktion.

Wir berechnen

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0.2^{-n} + \sum_{m=0}^{n-1} 2^{-m}\left(2^{-m} - 2^{-m-1}\right) = \sum_{m=0}^{n-1} 2^{-2m-1} =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{4^m} = \frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right).$$

Damit ergibt sich das Integral von f:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) = \frac{2}{3}.$$

Aufgabe 4b

Sei $n \in \mathbf{N}$. Wir wählen eine Zerlegung

$$Z = \left\{ 0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < 1 \right\}$$

und eine Stufenfunktion

$$f_n(x) = e^{\frac{a}{n}} \text{ für } \frac{a}{n} < x < \frac{a+1}{n}, a \in \mathbf{N}, a < n.$$

Für $\frac{a}{n} < x < \frac{a+1}{n}, a < n$ haben wir

$$0 \leq f(x) - f_n(x) = e^x - e^{\frac{a}{n}} \leq e^{\frac{a+1}{n}} - e^{\frac{a}{n}} = \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) e^{\frac{a}{n}} \leq e \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right).$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} e \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = e(1-1) = 0$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_\infty = 0,$$

also $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. f ist also eine Regelfunktion.

Wir berechnen

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \sum_{a=0}^{n-1} e^{\frac{a}{n}} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{a=0}^{n-1} \left(e^{\frac{1}{n}} \right)^a =$$

$$\frac{1}{n} \frac{1 - \left(e^{\frac{1}{n}} \right)^n}{1 - e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}.$$

Aus $e^x = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} x^k$ folgt für $x \neq 0$:

$$\frac{e^x - 1}{x} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k!} x^{k-1} = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(k+1)!} x^k.$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert diese Potenzreihe und ist stetig auf ganz $\mathbf{R}$. Also ist $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, insbesondere erhält man mit der Folge $X_n = \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = 1.$$

Damit können wir das Integral von f berechnen:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1-e}{-\lim_{n\to\infty} n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)} = e-1.$$