

Aufgabe 3a

Betrachte

$$g(x) := f(x) - x$$

für $x \in [a, b]$.

g ist stetig, es gilt

$$g(a) \geq 0, g(b) \leq 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $x \in [a, b]$ mit

$$g(x) = 0,$$

also

$$f(x) = x.$$

Aufgabe 3b

i) falsch, z.B. definiere eine unstetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ ohne Fixpunkte durch

$$f(x) = b \quad \text{für } x \neq b$$

und $f(b) = a$.

f bildet $[a, b]$ auf $[a, b]$ ab, aber f hat keine Fixpunkte, denn für $x = b$ ist $f(b) = a \neq b$ und für $x \neq b$ ist $f(x) = b \neq x$.

ii) falsch, z.B.

$$f(x) = x^2.$$

Begründung: f stetig, $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < f(x) < 1$ und

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \Rightarrow x \notin (0, 1)$$

iii) falsch, z.B.

$$f(x) = x + 1.$$

Begründung: f stetig, $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 1 \geq 0$ und

$$f(x) = x \Leftrightarrow x = x + 1 \Leftrightarrow 0 = 1$$

ist unmöglich.

Aufgabe 4a

Sei $x \in \mathbb{R}$ und x_n eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \rightarrow x$. Sei $p := |x| + 1$.

Zu $\epsilon = 1$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - x| < \epsilon$$

für alle $n > N$. Insbesondere ist

$$|x_n| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x| = p$$

für $n > N$. Setze

$$r := \max\{|x_1|, \dots, |x_N|, p\}.$$

Dann ist $|x_n| \leq r$, also

$$x_n \in [-r, r]$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil f auf $[-r, r]$ stetig ist, folgt

$$f(x_n) \rightarrow f(x).$$

Also ist f stetig in x . Weil $x \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt war, ist f stetig auf $\mathbb{R}$.

Gegenbeispiel zur Beschränktheit:

$$f(x) = x$$

ist beschränkt auf $[-r, r]$, für jedes $r > 0$, aber nicht stetig auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4b

Schritt 1:

Sei zunächst $x, y \geq 0$. Wegen $x^2 + y^2 = 1$ ist dann

$$0 \leq x \leq 1$$

Wegen $\cos(0) = 1$ und $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ mit

$$x = \cos(t).$$

Wegen

$$x^2 + y^2 = 1$$

und

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

folgt $y^2 = \sin^2 t$, also

$$|y| = |\sin(t)|.$$

Wegen $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ist $\sin(t) \geq 0$. Nach Annahme ist $y \geq 0$. Also ist

$$y = \sin(t).$$

Schritt 2:

Sei $x \geq 0, y \leq 0$. Dann gibt es nach Schritt 1 ein $s \in \mathbb{R}$ mit $x = \cos(s), -y = \sin(s)$. Setze $t = -s$. Dann ist $x = \cos(-t) = \cos(t)$ und $y = -\sin(-t) = \sin(t)$.

Sei $x \leq 0, y \geq 0$. Dann gibt es nach Schritt 1 ein $s \in \mathbb{R}$ mit $-x = \cos(s), y = \sin(s)$. Setze $t = \pi - s$. Dann ist $x = -\cos(\pi - t) = \cos(t)$ und $y = \sin(\pi - t) = \sin(t)$.

Sei $x \leq 0, y \leq 0$. Dann gibt es nach Schritt 1 ein $s \in \mathbb{R}$ mit $-x = \cos(s), -y = \sin(s)$. Setze $t = \pi + s$. Dann ist $x = -\cos(t - \pi) = \cos(t)$ und $y = -\sin(t - \pi) = \sin(t)$.