

Aufgabe 3a

Mit der Substitution $t = \pi - x$ und wegen $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ erhält man

$$\int_0^\pi t f(\sin t) dt = \int_0^\pi (\pi - x) f(\sin(\pi - x)) dx = \int_0^\pi (\pi - x) f(\sin x) dx.$$

Wenn wir rechts x wieder in t umbenennen, ergibt sich

$$\int_0^\pi t f(\sin t) dt = \pi \int_0^\pi f(\sin t) dt - \int_0^\pi t f(\sin t) dt,$$

also

$$\int_0^\pi t f(\sin t) dt = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin t) dt.$$

Aufgabe 3b

Mit $f(\sin t) = \frac{\sin t}{2 - \sin^2 t} = \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t}$ ergibt sich aus a):

$$\int_0^\pi \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt.$$

Dieses Integral berechnen wir mit der Substitution $x = \cos t$:

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{2},$$

also

$$\int_0^\pi \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \frac{\pi^2}{4}.$$

Aufgabe 4

Nach dem Mittelwertsatz gibt es, zu jedem $n \in \mathbf{N}$, ein $\xi_n \in [0, \frac{1}{n}]$ mit

$$\frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}} = f'(\xi_n).$$

Durch Umstellen ergibt sich

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n} f'(\xi_n)$$

und

$$\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} f'(\xi_n)\right)^n.$$

Aus $\xi_n \in [0, \frac{1}{n}]$ folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0.$$

Sei $\epsilon_1 > 0$. Weil f' in 0 stetig ist, gibt es ein $N_1 \in \mathbf{N}$, so dass

$$f'(0) - \epsilon_1 < f'(\xi_n) < f'(0) + \epsilon_1$$

für alle $n > N_1$ gilt. Damit ist

$$\left(1 + \frac{1}{n} (f'(0) - \epsilon_1)\right)^n < \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n} (f'(0) + \epsilon_1)\right)^n$$

für alle $n > N_1$.

Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} (f'(0) - \epsilon_1)\right)^n = \exp(f'(0) - \epsilon_1)$$

gibt es ein $N_2 \in \mathbf{N}$, so dass

$$\left(1 + \frac{1}{n} (f'(0) - \epsilon_1)\right)^n > \exp(f'(0) - \epsilon_1) - \epsilon_2$$

für alle $n > N_2$ gilt. Analog gibt es ein $N_3 \in \mathbf{N}$, so dass

$$\left(1 + \frac{1}{n} (f'(0) + \epsilon_1)\right)^n < (f'(0) + \epsilon_1) + \epsilon_3$$

für alle $n > N_3$ gilt.

Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig. Setze $\epsilon_2 = \epsilon_3 = \frac{\epsilon}{2} > 0$. Weil $\exp$ stetig ist, gibt es ein $\epsilon_1 > 0$, so dass $\exp(f'(0)) - \frac{\epsilon}{2} \leq \exp(f'(0) - \epsilon_1)$ und $\exp(f'(0) + \epsilon_1) \leq \exp(f'(0)) + \frac{\epsilon}{2}$ ist.

Zu $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ ahben wir die oben definierten $N_1, N_2, N_3 \in \mathbf{N}$. Setze $N := \max\{N_1, N_2, N_3\}$. Für $n > N$ ist dann

$$\exp(f'(0)) - \epsilon < \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n < \exp(f'(0)) + \epsilon.$$

Damit haben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \exp(f'(0))$$

bewiesen.