

Aufgabe 3a

i) Für $h \neq 0$ ist

$$\frac{\cos(x_0 + h) - \cos(x_0)}{h} = \frac{\cos(x_0) \cos(h) - \sin(x_0) \sin(h) - \cos(x_0)}{h} =$$
$$\cos(x_0) \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x_0) \frac{\sin(h)}{h}.$$

In der Vorlesung wurde bewiesen, dass

$$1 - \frac{h^2}{2} \leq \cos(h) \leq 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24}$$

und

$$h - \frac{h^3}{6} \leq \sin(h) \leq h - \frac{h^3}{6} + \frac{h^5}{120}$$

für $|h| \leq 3$ gilt. Daraus folgt

$$-\frac{h}{2} \leq \frac{\cos(h) - 1}{h} \leq -\frac{h}{2} + \frac{h^3}{24}, 1 - \frac{h^2}{6} \leq \frac{\sin(h)}{h} \leq 1 - \frac{h^2}{6} + \frac{h^4}{120}$$

und damit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

Eingesetzt in obige Gleichung:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x_0 + h) - \cos(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x_0) \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x_0) \frac{\sin(h)}{h} = \cos(x_0) \cdot 0 - \sin(x_0) \cdot 1 = -\sin(x_0).$$

Für $h \neq 0$ ist

$$\frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0) \cos(h) + \cos(x_0) \sin(h) - \sin(x_0)}{h} =$$
$$\sin(x_0) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x_0) \frac{\sin(h)}{h}.$$

Mit den oben berechneten Grenzwerten ergibt sich

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x_0) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x_0) \frac{\sin(h)}{h} = \sin(x_0) \cdot 0 + \cos(x_0) \cdot 1 = \cos(x_0).$$

$\tan(x)$ ist definiert für $x \notin \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbf{Z}\}$. Nach der Quotientenregel ist

$$\left. \frac{d \tan(x)}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{\cos(x_0) \cos(x_0) - (-\sin(x_0)) \sin(x_0)}{\cos^2(x_0)} = \frac{1}{\cos^2(x_0)}.$$

Aufgabe 3b

Für $x_0 \neq 0$ kann man Ketten- und Produktregel anwenden und erhält

$$\frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_0} = -\frac{2}{x_0} \cos(x_0^{-2}) + 2x_0 \sin(x_0^{-2}).$$

Um die Ableitung in 0 zu berechnen, benutzt man, dass

$$|f(h)| = |h^2 \sin(h^{-2})| \leq h^2$$

ist, woraus

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$$

folgt. Wir haben also

$$f'(0) = 0.$$

Betrachte die Folge

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}.$$

Es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0,$$

aber

$$f'(x_n) = -2\sqrt{2n\pi} \cos(2n\pi) + \frac{2}{\sqrt{2n\pi}} \sin(2n\pi) = -2\sqrt{2n\pi},$$

$f'(x_n)$ konvergiert also nicht gegen $f'(0)$. Die Ableitung f' ist in 0 nicht stetig.

Aufgabe 4

i) Für $x > 0$ ist

$$\exp(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k > 1 > 0.$$

Für $x = 0$ ist $\exp(0) = 1 > 0$. Insbesondere ist für alle $x \in \mathbf{R}$:

$$\exp(x) \exp(-x) = \exp(x - x) = \exp(0) = 1.$$

Für $x < 0$ ist $-x > 0$, also $\exp(-x) > 0$, und es folgt

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} > 0.$$

ii) Für $h > 0$ ist $\exp(h) > 1$ nach dem Beweis von i), also

$$\exp(x + h) = \exp(x) \exp(h) > \exp(x)$$

für alle $x \in \mathbf{R}$. Also ist $\exp$ streng monoton wachsend.

iii) Nach dem Beweis von i) ist

$$q := \exp(1) > 1.$$

Aus $q > 1$ folgt, dass die Folge $(q^n)_{n \in \mathbf{N}}$ unbeschränkt ist. Wegen

$$\exp(n) = \exp(1 + \dots + 1) = \exp(1)^n = q^n$$

ist also $(\exp(n))_{n \in \mathbf{N}}$ unbeschränkt.

iv) Wegen $q > 1$ ist $0 < \frac{1}{q} < 1$, woraus $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n = 0$ folgt. Wegen

$$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{q^n} = \left(\frac{1}{q}\right)^n$$

folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-n) = 0$.

v) Wegen i) ist $\exp(\mathbf{R}) \subset \{y \in \mathbf{R} : y > 0\}$.

Aus Stetigkeit, $\lim_{n \rightarrow -\infty} \exp(-n) = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(n) = \infty$ folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass zu jedem $y > 0$ ein $x \in \mathbf{R}$ mit $\exp(x) = y$ existiert, also $\exp(\mathbf{R}) \supset \{y \in \mathbf{R} : y > 0\}$.

vii) Wegen v) gibt es zu jedem $y > 0$ ein $x \in \mathbf{R}$ mit $\exp(x) = y$. Wegen ii) ist $\exp$ injektiv, zu gegebenem y ist x also eindeutig bestimmt. Definiere $\ln(y)$ als die eindeutige Zahl $x \in \mathbf{R}$ mit $\exp(x) = y$. Nach Definition ist $\exp(\ln(y)) = y$.

Wenn $y = \exp(x)$ ist, dann ist x die eindeutige Lösung von $\exp(x) = y$, also ist $\ln(\exp(x)) = x$.

Zur Monotonie: Sei $y_1 > y_2, \ln(y_1) = x_1, \ln(y_2) = x_2$. Angenommen, es wäre $x_1 \leq x_2$, dann folgt aus $\exp(x_1) = y_1, \exp(x_2) = y_2$ und der Monotonie von $\exp$, dass $y_1 = \exp(x_1) \leq \exp(x_2) = y_2$, ein Widerspruch. Also ist $x_1 > x_2$. Weil dies für beliebige y_1, y_2 mit $y_1 > y_2$ gilt, ist $\ln$ streng monoton wachsend.

Zur Stetigkeit: Sei $y > 0$ und $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ und $y_n > 0$ für alle $n \in \mathbf{N}$. Angenommen, $x_n = \ln(y_n)$ würde nicht gegen $x = \ln(y)$ konvergieren. Es gäbe also ein $\epsilon > 0$, so dass man zu jedem $N \in \mathbf{N}$ ein $n > N$ mit $x_n < x - \epsilon$ oder $x_n > x + \epsilon$ findet. Weil $\exp$ streng monoton wachsend ist, folgt daraus $y_n = \exp(x_n) < \exp(x - \epsilon)$ oder $y_n = \exp(x_n) > \exp(x + \epsilon)$. Setze

$$\epsilon' = \min \{ \exp(x) - \exp(x - \epsilon), \exp(x + \epsilon) - \exp(x) \} > 0.$$

Für jedes $N \in \mathbf{N}$ gibt es also ein $n > N$ mit $y_n < \exp(x) - \epsilon'$ oder $y_n > \exp(x) + \epsilon'$.

Wegen $\exp(x) = y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ muss es aber zu jedem $\epsilon' > 0$ ein $N \in \mathbf{N}$ mit $y - \epsilon' < y_n < y + \epsilon'$ für alle $n > N$ geben. Dieser Widerspruch beweist, dass $x_n = \ln(y_n)$ gegen $x = \ln(y)$ konvergiert. Weil dies für alle $x > 0$ und alle gegen x konvergierenden Folgen gilt, ist $\ln$ stetig.

viii) Aus $\exp(\ln(x)) = x$ und $x' = 1$ folgt mit der Kettenregel

$$1 = \exp'(\ln(x)) \ln'(x) = \exp(\ln(x)) \ln'(x) = x \ln'(x),$$

also

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$