

Aufgabe 1.1: R R F R

Aufgabe 1.2:

- abgeschlossen;
- abgeschlossen;
- offen und abgeschlossen;
- abgeschlossen

Aufgabe 1.3: R R R R

Aufgabe 1.4: R F R R

Aufgabe 2.1

a) Setze

$$L := \sup \{ \| df(u) \| : u \in U \} < \infty.$$

Seien $x, y \in V$. Setze $v := y - x$. Definiere $g : \mathbf{R} \rightarrow V$ durch

$$g(t) := x + tv.$$

Dann ist $g(0) = x, g(1) = y$ und nach Kettenregel

$$d(f \circ g)(t_0) = df(x + t_0 v) dg(t_0)$$

für $t_0 \in \mathbf{R}$. Wegen $\| df \| \leq L$ und $dg \equiv v$ folgt $\| d(f \circ g) \| \leq L \| v \|$, also

$$\begin{aligned} \| f(y) - f(x) \| &= \| f(g(1)) - f(g(0)) \| = \left\| \int_0^1 \frac{d(f \circ g)}{dt} \Big|_{t=t_0} dt_0 \right\| \\ &\leq \int_0^1 \left\| \frac{d(f \circ g)}{dt} \Big|_{t=t_0} \right\| dt_0 \leq L \| v \| = L \| y - x \|. \end{aligned}$$

2. Für beliebige $x, y \in \mathbf{R}$ gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (x, y)$ mit

$$\| g(y) - g(x) \| = \| g'(\xi) \| |y - x| \leq \frac{1}{2} |y - x|.$$

g ist also kontrahierend. Weil $\mathbf{R}$ ist vollständig ist, hat g nach dem Banach'schen Fixpunktsatz einen eindeutigen Fixpunkt.

Aufgabe 2.2

Es ist

$$0 \leq |u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1| = |\langle (u_1, u_2, u_3), (u_2, u_3, u_1) \rangle| \leq \| (u_1, u_2, u_3) \| \| (u_2, u_3, u_1) \|$$

nach Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Wegen

$$\| (u_1, u_2, u_3) \| = \| (u_2, u_3, u_1) \| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

folgt

$$0 \leq |f(u_1, u_2, u_3)| \leq \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Wegen

$$\lim_{(u_1, u_2, u_3) \rightarrow (0, 0, 0)} \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = 0$$

folgt daraus

$$\lim_{(u_1, u_2, u_3) \rightarrow (0, 0, 0)} f(u_1, u_2, u_3) = 0.$$

Aufgabe 2.3

a) Wegen

$$df(u_1, u_2, u_3) = (2u_1 - u_2 + 1, 2u_2 - u_1, 2u_3 - 2)$$

kann es lokale Extrema nur in $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$ geben. Die Hesse-Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind 2 und 2 ± 1 , die Matrix ist also positiv definit. $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$ ist ein lokales Minimum.

(Also $f(u_1, u_2, u_3) \geq -\frac{8}{9}$ für alle $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbf{R}^3$.)

2. Lösungsweg: Statt die Eigenwerte auszurechnen, kann man auch die Blockgestalt der Matrix benutzen. Ein Block ist (2), also positiv definit, der andere Block ist die 2x2-Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, die wegen $\text{Det}(A) = 3$ und $\text{Spur}(A) = 4$ positiv definit ist.

b) Wegen

$$dg(u_1, u_2) = (3u_1^2 + 3u_2^2 - 15, 6u_1u_2 - 12)$$

kann es lokale Extrema nur in

$$(2, 1), (-2, -1), (1, 2), (-1, -2)$$

geben.

Die Hesse-Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 6u_1 & 6u_2 \\ 6u_2 & 6u_1 \end{pmatrix}$$

mit Determinante $6(u_1^2 - u_2^2)$ und Spur $12u_1$.

Also hat man in $(2, 1)$ ein lokales Minimum, in $(-2, -1)$ ein lokales Maximum, in $(1, 2)$ und $(-1, -2)$ einen Sattelpunkt.

Aufgabe 2.4

Setze

$$\begin{aligned}a &:= f(0, 0) \\b &:= \frac{\partial f}{\partial u_1}(0, 0) \\c &:= \frac{\partial f}{\partial u_2}(0, 0).\end{aligned}$$

Aus $D^2 f(u) = 0$ (nach Voraussetzung) und $D^2 f(u)(v)(w) = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u_k \partial u_l} v_k w_l$ (nach Vorlesung) folgt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}(u) = \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}(u) = \frac{\partial^2 f}{\partial u_2 \partial u_1}(u) = \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2}(u) = 0$$

für alle $u \in \mathbf{R}^2$.

Sei $(u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2$ beliebig. Durch Anwendung des Hauptsatzes folgt

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1, u_2) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1, 0) + \int_0^{u_2} \frac{\partial^2 f}{\partial u_2 \partial u_1}(u_1, y) dy = \frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1, 0).$$

Ebenfalls durch Anwendung des Hauptsatzes erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1, 0) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(0, 0) + \int_0^{u_1} \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}(x, 0) dx = \frac{\partial f}{\partial u_1}(0, 0),$$

also

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1, u_2) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(0, 0) = b.$$

Analog beweist man

$$\frac{\partial f}{\partial u_2}(u_1, u_2) = \frac{\partial f}{\partial u_2}(0, 0) = c$$

für alle $(u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2$.

Nochmals durch zweimalige Anwendung des Hauptsatzes erhält man nun

$$\begin{aligned}f(u_1, u_2) &= f(u_1, 0) + \int_0^{u_2} \frac{\partial f}{\partial u_2}(u_1, y) dy = f(u_1, 0) + \int_0^{u_2} c dy = f(u_1, 0) + cu_2 \\&= f(0, 0) + \int_0^{u_1} \frac{\partial f}{\partial u_1}(x, 0) dx + cu_2 = a + \int_0^{u_1} b dx + cu_2 = a + bu_1 + cu_2.\end{aligned}$$

2. Lösungsweg: Nach der Taylor-Formel für $k = 1$ und mit

$$u = (0, 0), v = (v_1, v_2)$$

gilt

$$f(v) = f(0) + Df(0)(v) + \int_0^1 (1-t) D^2 f(tv)(v, v) dt.$$

Wegen

$$D^2 f \equiv 0$$

folgt

$$f(v_1, v_2) = f(0, 0) + Df(0, 0)(v_1, v_2).$$

Setze

$$a := f(0, 0), b := Df(0, 0)(1, 0), c := Df(0, 0)(0, 1).$$

Weil $Df(0, 0)$ linear ist, folgt

$$f(v_1, v_2) = a + Df(0, 0)(v_1(1, 0) + v_2(0, 1)) = a + bv_1 + cv_2.$$