Blatt 11, Präsenzübung, Aufgabe 2

a) 1. Lösungsweg: $Spur\,(A) = 2+\lambda, det\,(A) = 2\lambda-1$. Für $\lambda > \frac{1}{2}$ ist $Spur\,(A) > 0, det\,(A) > 0$, also A positiv definit. Für $\lambda = \frac{1}{2}$ ist $det\,(A) = 0, Spur\,(A) > 0$, also A positiv semidefinit. Für $\lambda < \frac{1}{2}$ ist $det\,(A) < 0$, also A indefinit.

2. Lösungsweg: Das charakteristische Polynom ist $(2-x)(\lambda-x)-1 = x^2-(2+\lambda)x+2\lambda-1$, die Eigenwerte sind $x_{1,2} = \frac{2+\lambda}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{8-4\lambda+\lambda^2} = \frac{2+\lambda}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4+(\lambda-2)^2}$.

b) 1. $det\,(A) = cosh^2\lambda - sinh^2\lambda = 1 > 0, Spur\,(A) = 2cosh\lambda = e^{\lambda}+e^{-\lambda} > 0$. Also ist A positiv definit.

2. Das charakteristische Polynom ist $(cosh\lambda-x)^2 - sinh^2\lambda = 1-2xcosh\lambda+x^2$, die Eigenwerte sind $x_{1,2} = cosh\lambda \pm \sqrt{cosh^2\lambda-1} = cosh\lambda \pm sinh\lambda$, also $x_1 = e^{\lambda} > 0, x_2 = e^{-\lambda} > 0$.

c) 1. $det\,(A) = 0, Spur\,(A) = -\frac{51}{7}$, also ist A negativ semidefinit.

2. Das charakteristische Polynom ist $(-7-x)\left(-\frac{2}{7}-x\right)-2 = x^2+\frac{51}{7}x$. Die Eigenwerte sind $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{51}{7}$.

d) 1. Es handelt sich um eine Blockmatrix.

Im ersten Block steht λ. Dieser Block ist positiv definit für $\lambda > 0$, negativ definit für $\lambda < 0$.

Für den zweiten Block ist $Spur\,(A) = 37+\lambda^2 > 0, det\,(A) = 37\lambda^2-(0,815)^2$. Dieser Block ist positiv definit für $\mid\lambda\mid > \frac{0,815}{\sqrt{37}}$, positiv semidefinit für $\mid\lambda\mid = \frac{0,815}{\sqrt{37}}$, indefinit für $\mid\lambda\mid < \frac{0,815}{\sqrt{37}}$.

Also ist A positiv definit für $\lambda > \frac{0,815}{\sqrt{37}}$, positiv semidefinit für $\lambda = \frac{0,815}{\sqrt{37}}$, indefinit sonst.

2. Eigenwerte: der erste Block hat Eigenwert λ. Das charakteristische Polynom des zweiten Blocks ist $\left(\lambda^2-x\right)(37-x)-0,815^2 = x^2-\left(37+\lambda^2\right)x+37\lambda^2-0,815^2$, die Eigenwerte sind $x_{1,2} = \frac{37+\lambda^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(37+\lambda^2\right)^2-37\lambda^2+0,815^2}$, also $x_1 > 0$ und

$$x_2 > 0 \Longleftrightarrow 37\lambda^2 > 0,815^2 \Longleftrightarrow \mid\lambda\mid > \frac{0,815}{\sqrt{37}}$$

e) Das charakteristische Polynom ist $(2-x)\left(-2x+x^2-1\right)+x = -x^3+4x^2-3x-2 = -(x-2)\left(x^2-2x-1\right)$ mit Nullstellen 2 und $1 \pm \sqrt{2}$. Zwei Nullstellen sind positiv und eine negativ. Also ist A indefinit.