Gewöhnliche Differentialgleichungen II

Thilo Kuessner

Eichstätt, Winter 2020/21

Inhaltsverzeichnis

- 1. Einführung: Vektorfelder, Flüsse und Phasenporträts
- 2. Grundbegriffe: Bahnen, Gleichgewichte und Limesmengen
- 3. Integrable Systeme
- 4. Gradientenflüsse
- 5. Stabilität von Gleichgewichtspunkten
- 6. Ebene dynamische Systeme

Folien (in Abständen aktualisiert):
http://newton.kias.re.kr/∼kuessner/dg.pdf

Satz von Picard-Lindelöf

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig.
Dann gibt es zu jedem $x_0 \in U$ ein Intervall $0 \in (a(x_0), b(x_0))$ und eine eindeutige Lösung $x \colon (a(x_0), b(x_0)) \to U$ des Anfangswertproblems

$$x'(t) = f(x(t)), x(0) = x_0.$$

Anmerkung

Wenn eine Funktion stetig differenzierbar ist, dann ist sie lokal Lipschitz-stetig: auf einer beschränkten abgeschlossenen Menge B ist $L := \max_{x \in B} \|Df(x)\|$ eine Lipschitz-Konstante, d.h. für $x, y \in B$ gilt $\|f(x) - f(y)\| \leq L|x - y\|$.

Wenn f global Lipschitz-stetig ist, d.h. die Konstante L auf ganz U einheitlich gewählt werden kann, dann ist die eindeutige Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, d.h. $(a(x_0), b(x_0)) = (-\infty, \infty)$.

Anfangswertprobleme der Form $x' = f(x), x(0) = x_0$ lassen sich durch Trennung der Variablen lösen.
Für $f(x_0) = 0$ ist $x(t) \equiv x_0$ eine Lösung.
Für $f(x_0) \neq 0$ hat man für eine Lösung $x \colon (-\epsilon, \epsilon) \to U \subset \mathbb{R}^n$, dass zumindest für hinreichend kleine t $f(x(t)) \neq 0$ und damit

$$\frac{x'(t)}{f(x(t))} = 1$$

gilt. Wenn F eine Stammfunktion von $\frac{1}{f(x)}$ ist, dann folgt

$$F(x(t)) - F(x_0) = t,$$

was man nach $x(t) = F^{-1}(F(x_0) + t)$ auflösen kann.
Wenn f lokal Lipschitz-stetig ist, ist dies auf dem maximalen Definitionsintervall $(a(x_0), b(x_0))$ die eindeutige Lösung.

Beispiel 1

Beispiel

$$U = \mathbb{R}, f(x) = x$$

$$x'(t) = x(t), x(0) = x_0$$

$f(x) = x$ ist Lipschitz-stetig.
Die eindeutige Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
ist $x(t) = e^t x_0$.

Beispiel 2

Beispiel

$$U = \mathbb{R} - \{0\}\,, f(x) = \frac{1}{x}$$

$$x'(t) = \frac{1}{x(t)}, x(0) = x_0$$

$f(x) = \frac{1}{x}$ ist lokal Lipschitz-stetig.

Die eindeutige Lösung $x(t) = \sqrt{2t + x_0^2}$ falls $x_0 > 0$, bzw.

$x(t) = -\sqrt{2t + x_0^2}$ falls $x_0 < 0$, ist nur für $t > -\frac{1}{2}x_0^2$ definiert.

Also $a(x_0) = -\frac{1}{2}x_0^2, b(x_0) = \infty$.

Beispiel 3

Beispiel

$$U = \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

$$x'(t) = x^2(t), x(0) = x_0$$

$f(x) = x^2$ ist lokal Lipschitz-stetig.
Falls $x_0 = 0$, ist $x(t) = 0$ die eindeutige Lösung. Für $x_0 \neq 0$ ist die eindeutige Lösung $x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}$ im Fall $x_0 > 0$ auf $(-\infty, \frac{1}{x_0})$ und im Fall $x_0 < 0$ auf $(\frac{1}{x_0}, \infty)$ definiert.

Beispiel 4

Beispiel

$$U = \mathbb{R}, f(x) = x^3$$

$$x'(t) = x^3(t), x(0) = x_0$$

$f(x) = x^3$ ist lokal Lipschitz-stetig.
Falls $x_0 = 0$, ist $x(t) = 0$ die eindeutige Lösung. Für $x_0 \neq 0$ ist die eindeutige Lösung $x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1-2tx_0^2}}$ auf $(-\infty, \frac{1}{2x_0^2})$ definiert.

Beispiel 5

Beispiel

$$U = \{x \in \mathbb{R} \colon x > 0\}, f(x) = \sqrt{x}$$

$$x'(t) = \sqrt{x(t)}, x(0) = x_0$$

$f(x) = \sqrt{x}$ ist in einer Umgebung von $x = 0$ nicht lokal Lipschitz-stetig.
Für $x_0 = 0$ gibt es zwei Lösungen: $x(t) \equiv 0$ und $x(t) = \frac{1}{4}t^2$.

Beispiel 6

Beispiel

$$U = \mathbb{R}^2, f(x,y) = (y, -x)$$

$$x'(t) = y(t), y'(t) = -x(t), x(0) = x_0, y(0) = y_0$$

$f(x,y) = (y, -x)$ ist Lipschitz-stetig.
Die eindeutige auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung ist
$x(t) = \cos(t)x_0 + \sin(t)y_0, y(t) = -\sin(t)x_0 + \cos(t)y_0$.

Beispiel 7

Beispiel

$$U = \mathbb{R}^2, f(x,y) = (-x,-y)$$

$$x'(t) = -x(t), y'(t) = -y(t), x(0) = x_0, y(0) = y_0$$

$f(x,y) = (-x,-y)$ ist Lipschitz-stetig.
Die eindeutige auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung ist
$x(t) = e^{-t}x_0, y(t) = e^{-t}y_0$.

Definition

Ein Vektorfeld ist eine beliebig oft differenzierbare Abbildung $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *auf einer offenen Teilmenge* $U \subset \mathbb{R}^n$.

Definition

Eine Integralkurve eines Vektorfeldes $f: U \to \mathbb{R}^n$ *ist eine differenzierbare Abbildung* $x: (a,b) \to U$ *mit*

$$x'(t) = f(x(t))$$

für alle $t \in (a,b) \subset \mathbb{R}$.

Der Fluss einer autonomen Differentialgleichung

Sei $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$. Sei $x_0 \in U$. Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen hat die autonome Differentialgleichung

$$x' = f(x), x(0) = x_0$$

eine eindeutige maximale Lösung

$$\gamma_{x_0} \colon (a(x_0), b(x_0)) \to U$$

auf dem Definitionsintervall $(a(x_0), b(x_0))$ mit $a(x_0) < 0 < b(x_0)$. (Möglicherweise $a(x_0) = -\infty$ und/oder $b(x_0) = \infty$.)
Auf der Flußdomäne $\Sigma_f := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times U \colon a(x) < t < b(x)\}$ kann man eine Abbildung $\Phi \colon \Sigma_f \to U$ durch

$$\Phi(t, x) = \gamma_x(t)$$

definieren.

Definition

Ein Vektorfeld $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heisst vollständig, wenn $\Sigma_f = \mathbb{R} \times U$, d.h. jede Integralkurve ist von $t = -\infty$ bis $t = \infty$ definiert.

Beispiel

Ein durch eine lineare Abbildung $f(x) = Ax$ definiertes Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist ein vollständiges Vektorfeld.

Eine lineare Abbildung ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = \|A\|$. Die eindeutige auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung von $x'(t) = Ax(t), x(0) = x_0$ ist $x(t) = e^{At}x_0$.

Phasenporträts

Ein Phasenporträt dient der Veranschaulichung einer autonomen Differentialgleichung und ermöglicht eine graphische Analyse der zeitlichen Entwicklung des dynamischen Systems. Dazu werden nur die gegebenen Gleichungen des Systems benötigt, eine explizite Darstellung der Zeitentwicklung, etwa durch analytisches Lösen der Differentialgleichung, ist nicht notwendig.
Das Phasenporträt besteht aus der Gesamtheit aller Bahnen des dynamischen Systems, zusammen mit Pfeilen, die die zeitliche Entwicklung entlang der Bahnen angeben. Da die Gesamtheit aller Bahnen der gesamte Phasenraum des dynamischen Systems wäre, zeichnet man nur einige charakteristische Bahnen. Aus dem Phasenporträt eines dynamischen Systems lässt sich ein erster Eindruck über sein globales Verhalten gewinnen, beispielsweise die Existenz und Stabilität von Gleichgewichten und periodischen Bahnen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist meist nur das Zeichnen von Phasenporträts in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ sinnvoll.

Man betrachtet also eine Differentialgleichung erster Ordnung:

$$x' = f(x, y)$$

$$y' = g(x, y)$$

mit $F = (f, g) : U \to \mathbb{R}^2$ für eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$. Die einzige Information, die wir über die gesuchte Bahn $(x(t), y(t))$ haben, ist ihre Ableitung $(x'(t), y'(t))$, die an der Stelle $(x(t), y(t))$ durch $F(x(t), y(t)) = (f(x(t), y(t)), g(x(t), y(t)))$ gegeben ist. Die Funktion F ordnet also jedem Element aus dem Definitionsbereich eine Steigung oder auch Richtung zu. Trägt man diese Richtungen in Form von Geradenstücken $F(x, y)$ an den zugehörigen Punkten (x, y) ein, wird ein Muster sichtbar. Die Lösungen der Differentialgleichung sind Kurven, die tangential zu diesen Geradenstücken stehen und als Bahnkurven oder Trajektorien bezeichnet werden. Die Menge aller Bahnkurven, bzw. Trajektorien, gibt das Phasenporträt.

Für ein Raster von Punkten wird die Richtung der Bewegung im Phasenraum durch Pfeile dargestellt; so wird ein Vektorfeld eingezeichnet. Folgt man nun ausgehend von einem bestimmten Startpunkt dem Pfeil, kommt man zu einem neuen Punkt, wo man dieses Vorgehen wiederholen kann. So kann man anhand des Vektorfelds zusätzlich typische Trajektorien in das Phasenraumporträt einzeichnen, die das qualitative Verhalten der zeitlichen Entwicklung einzuschẗzen helfen. Für einfache dynamische Systeme kann man Vektorfeld und Beispieltrajektorien oft mit der Hand einzeichnen, bei komplexeren Systemen kann dies durch Computerprogramme geschehen.

Qualitative Diskussion der Integralkurven von $x' = Ax$ im $\mathbb{R}^2$ I

Wir betrachten im $\mathbb{R}^2$ die Differentialgleichung $x' = Ax$ für eine 2×2-Matrix A.

Fall 1: A hat zwei reelle Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Seien v_1, v_2 die zugehörigen Eigenvektoren. In der Basis v_1, v_2 ist A die Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Für eine Anfangsbedingung $x(0) = C_1 v_1 + C_2 v_2$ bekommt man die Lösung $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2$.

Qualitative Diskussion der Integralkurven von $x' = Ax$ im $\mathbb{R}^2$ II

Fall 1.1: $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$: Senke in $(0,0)$
Fall 1.2: $\lambda_1 < 0 = \lambda_2$: $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 v_2$, alle Punkte fließen in die von v_2 aufgespannte Gerade
Fall 1.3: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: Sattel in $(0,0)$
Fall 1.4: $\lambda_1 = 0 < \lambda_2$: $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 v_2$, alle Punkte fließen aus der von v_2 aufgespannten Gerade heraus
Fall 1.5: $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$: Quelle in $(0,0)$

Qualitative Diskussion der Integralkurven von $x' = Ax$ im $\mathbb{R}^2$ III

Fall 2: A hat einen einfachen (reellen) Eigenwert λ. Dann hat A Jordansche Normalform $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ in einer Basis v_1, v_2. Für eine Anfangsbedingung $x(0) = C_1 v_1 + C_2 v_2$ bekommt man die Lösung $x(t) = (C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}) v_1 + C_2 e^{\lambda t} v_2$.

Qualitative Diskussion der Integralkurven von $x' = Ax$ im $\mathbb{R}^2$ IV

Fall 3: A hat komplexe Eigenwerte $a \pm ib$ mit $b \neq 0$. Dann hat A in einer Basis v_1, v_2 die Form $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Für eine Anfangsbedingung $x(0) = C_1 v_1 + C_2 v_2$ bekommt man die Lösung $x(t) = e^{at}(C_1 b \cos t + C_2 b \sin t) v_1 + e^{at}(-C_1 b \sin t + C_2 b \cos t) v_2$.

Fall 3.1: $a > 0$: Quelle in $(0,0)$, spiralförmige Bahnen

Fall 3.2: $a = 0$: Kreisbahnen

Fall 3.3: $a < 0$: Senke in $(0,0)$, spiralförmige Bahnen

Nullklinen

Nullkline sind ein nützliches Werkzeug zur Analyse einer Differentialgleichung.
Für eine Differentialgleichung der Form

$$x_1' = f_1(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\ldots$$

$$x_n' = f_n(x_1, \ldots, x_n)$$

ist die x_j-Nullkline die Menge der Punkte mit $x_j' = 0$, also die Lösungsmenge der Gleichung $f_j(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Die x_j-Nullklinen für $j = 1, \ldots, n$ zerlegen den $\mathbb{R}^n$ in verschiedene Regionen, in denen das durch die Differentialgleichung gegebene Vektorfeld jeweils in dieselbe Richtung zeigt. Häufig genügt eine Betrachtung des Verhaltens in den einzelnen Regionen bereits für ein qualitatives Verständnis des Phasenporträts.

Einparametrige Transformationsgruppen

Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine einparametrige Transformationsgruppe auf U ist eine stetige Abbildung $\Psi : \mathbb{R} \times U \to U$ mit

- $\Psi(0, x) = x$ *für alle* $x \in U$
- $\Psi(s + t, x) = \Psi(s, \Psi(t, x))$ *für alle* $s, t \in \mathbb{R}, x \in U$

Lemma

Jedes auf U vollständige Vektorfeld definiert eine einparametrige Transformationsgruppe auf U.
Für eine einparametrige Transformationsgruppe $\Psi : \mathbb{R} \times U \to U$ definiert $F(x) = \frac{d}{dt} |_{t=0} \Psi(t, x)$ ein vollständiges Vektorfeld, dessen einparametrige Transformationsgruppe Ψ ist.

Satz

Sei F Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L. Dann gilt für die Lösungen von $x' = F(x), x(0) = x_0$ und $y' = F(y), y(0) = y_0$ die Ungleichung

$$\|x(t) - y(t)\| \leq e^{Lt}\|x_0 - y_0\|.$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Gronwall-Ungleichung.

Lemma (Gronwall-Ungleichung)

Für eine stetige Funktion $x\colon [0, T] \to \mathbb{R}$ folgt aus $x(t) \leq c + \int_0^t b(s)x(s)ds$ für alle t die Ungleichung

$$x(t) \leq ce^{\int_0^t b(s)ds}$$

für alle t.

Rektifizierbarkeit von Flüssen

Mit mehr Aufwand kann man beweisen, dass die Lösungen sogar stetig differenzierbar von den Anfangswerten abhängen. Daraus folgt insbesondere, wenn $f(x_0) \neq 0$ ist, dass man in einer Umgebung von x_0 ein neues Koordinatensystem einführen kann, in dem das Vektorfeld f in der gesamten Umgebung konstant (z.B. $(1, 0 \ldots, 0)$) und der Fluss also parallel ist.
(Für die Lösung der Differentialgleichung ist dieser Satz nicht hilfreich, weil man zur Konstruktion des Koordinatenwechsels die Gleichung bereits gelöst haben muss.)
Komplizierter ist die Situation in der Umgebung sogenannter Gleichgewichtspunkte, in denen $f(x_0) = 0$ ist.

Bahnen

Wir betrachten im Weiteren stets eine Differentialgleichung $x' = F(x)$ auf $U \subset \mathbb{R}^n$ und den zugehörigen Fluss $\Phi \colon \Sigma_F U \to U$ mit der Flussdomäne $\Sigma_F \subset \mathbb{R} \times U$.

Definition

Die Bahn (oder der Orbit) eines Punktes x ist $O_x = \Phi((a_x, b_x) \times \{x\})$.

Lemma

Für $y \in O_x$ ist $O_y = O_x$.

Definition

Der Vorwärtsorbit eines Punktes x ist $O_x^+ = \Phi((0, b_x) \times \{x\})$. Der Rückwärtsorbit ist $O_x^- = \Phi((a_x, 0) \times \{x\})$.

Definition

Ein Gleichgewicht (oder stationärer Punkt oder Fixpunkt) ist ein Punkt x mit $O_x = \{x\}$.

Lemma

x ist genau dann ein Gleichgewichtspunkt, wenn $f(x) = 0$.

Periodische Bahnen

Definition

Ein periodischer Punkt ist ein Punkt x, für den es ein $T > 0$ gibt mit $\Phi(T, x) = x$. Die Periode $T(x)$ ist dann definiert als $T(x) = \inf\{T > 0 \colon \Phi(T, x) = x\}$. Eine periodische Bahn ist die Bahn eines periodischen Punktes.

Lemma

Wenn x kein Gleichgewichtspunkt ist, dann ist $\Phi(., x) \colon (a_x, b_x) \to U$ injektiv oder periodisch.

Invariante Mengen

Definition

Der Vorwärtsorbit eines Punktes x ist $O_x^+ = \Phi((0, b_x) \times \{x\})$. Der Rückwärtsorbit ist $O_x^- = \Phi((a_x, 0) \times \{x\})$.

Definition

Eine Menge $A \subset U$ ist vorwärts-invariant bzw. rückwärts-invariant bzw. invariant, wenn für jedes $x \in A$ der Vorwärts-Orbit bzw. Rückwärts-Orbit bzw. Orbit ganz in A liegt.

Lemma

- *Vereinigungen und Durchschnitte invarianter Mengen sind invariant. (entsprechend für vorwärts/rückwärts-invariant)*
- *Der Abschluss einer invarianten Menge ist invariant. (entsprechend für vorwärts/rückwärts-invariant)*
- *Wenn A und B invariant sind, dann ist $A \setminus B$ invariant.*

Limesmengen

Definition

Die ω-Limesmenge $\omega(x)$ eines Punktes x ist die Menge derjenigen $y \in U$, für die es eine Folge $t_n \to \infty$ mit $\Phi(t_n, x) \to y$ gibt.
Die α-Limesmenge $\alpha(x)$ eines Punktes x ist die Menge derjenigen $y \in U$, für die es eine Folge $t_n \to -\infty$ mit $\Phi(t_n, x) \to y$ gibt.

Lemma

Die ω- und α-Limesmenge sind abgeschlossen und invariant.

Beispiel

Wenn x ein periodischer Punkt ist, dann ist $\omega(x) = \alpha(x) = O_x$.

Beispiel

Das Differentialgleichungssystem

$$x' = \frac{1}{2}x - y - \frac{1}{2}(x^3 + y^2 x)$$

$$y' = x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}(y^3 + x^2 y)$$

hat ein Gleichgewicht in $(0,0)$ *und eine periodische Bahn entlang des Einheitskreises. Für alle von* $(0,0)$ *verschiedenen* (x,y) *ist die* ω*-Limesmenge der Einheitskreis.*

Beispiel

Die Differentialgleichung in Polarkoordinaten $r' = \sin(r), \theta' = 1$ *hat periodische Bahnen* γ_k *in* $r = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. *Dann ist* $\omega(r,\theta) = \gamma_n$ *für* $n\pi < r < (n+1)\pi$ *mit* n *ungerade, und* $\omega(r,\theta) = \gamma_{n+1}$ *für* $n\pi < r < (n+1)\pi$ *mit* n *gerade.*

Lemma

Wenn der Vorwärts-Orbit O_x^+ *von* x *in einer kompakten Menge enthalten ist, dann ist die* ω*-Limesmenge* $\omega(x)$ *nicht-leer, kompakt und zusammenhängend, und es gilt* $\lim_{t\to\infty} d(\Phi(t,x),\omega(x)) = 0$*.*
Wenn der Rückwärts-Orbit O_x^- *von* x *in einer kompakten Menge enthalten ist, dann ist die* α*-Limesmenge* $\alpha(x)$ *nicht-leer, kompakt und zusammenhängend, und es gilt* $\lim_{t\to-\infty} d(\Phi(t,x),\alpha(x)) = 0$*.*

Hamiltonsche Differentialgleichungssysteme

Die 1-dimensionale Newton-Gleichung

Die Newton-Gleichung hat die Form $\frac{d^2}{dt^2}x = f(x)$, wobei es zu f ein Potential $U(x) = -\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi$ gibt. Durch Einführen neuen Variablen $q = x, p = x'$ erhält man die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$q' = p$$

$$p' = f(q)$$

Die Bahnen eines Punktes liegen im $\mathbb{R}^2$. Für die Energie

$$E = \frac{1}{2}p^2 + U(q)$$

gilt aber

$$\frac{dE}{dt} = x' \cdot (x')' + U'(x) \cdot x' = x' \cdot f(x) + (-f(x)) \cdot x' = 0.$$

Die Bahn eines Punktes kann also die Kurve $E = E(x_0, x_0')$ nicht verlassen.

Anmerkung: Man kann die obigen Gleichungen umschreiben als

$$q' = \frac{\partial E}{\partial p}, p' = -\frac{\partial E}{\partial q}.$$

Hamiltonsche Dynamik

Auf dem $\mathbb{R}^n$ haben wir die Koordinaten $q = (q_1, \ldots, q_n), p = (p_1, \ldots, p_n)$ ("Ortskoordinaten" und "Impulskoordinaten"). Zu einer Funktion $H\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ (der "Hamilton-Funktion") betrachten wir die Differentialgleichung

$$q_i' = \frac{\partial H}{\partial p_i}, p_i' = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, i = 1, \ldots, n.$$

Physikalische Motivation: viele physikalische Gesetze leiten sich von Variationsprinzipien her. Für ein Funktional $L(q, q')$ soll $\int_a^b L(q(t), q'(t))dt$ minimiert werden. Das übersetzt sich in die Euler-Lagrange-Gleichung $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'} = \frac{\partial L}{\partial q}$. Mit

$$H(q, q') = \sum_i q_i' \frac{\partial L}{\partial q_i} - L(q, q')$$

erhält man obige Gleichungen aus der Euler-Lagrange-Gleichung.

Erhaltung der Energie: es gilt

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} p' + \frac{\partial H}{\partial q} q' = \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial q} \left(-\frac{\partial H}{\partial p}\right) = 0,$$

alle Bahnen bewegen sich also auf den $(2n-1)$-dimensionalen Niveauflächen von H.

Hamiltonsche Differentialgleichungen

Auf einer offenen Menge $U \subset \mathbf{R}^{2k}$ mit Koordinaten $(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k)$ betrachten wir ein Differentialgleichungssystem

$$
\begin{aligned}
x_1' &= f_1(x_1, \ldots, y_k) \\
&\ldots \\
x_k' &= f_k(x_1, \ldots, y_k) \\
y_1' &= g_1(x_1, \ldots, y_k) \\
&\ldots \\
y_k' &= g_k(y_1, \ldots, y_k)
\end{aligned}
$$

Ein solches Differentialgleichungssystem heisst Hamiltonsch, wenn es eine stetig differenzierbare Funktion $H \colon U \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$
\frac{\partial H}{\partial x_1} = -g_1, \ldots, \frac{\partial H}{\partial x_k} = -g_k,
$$
$$
\frac{\partial H}{\partial y_1} = f_1, \ldots, \frac{\partial H}{\partial y_k} = f_k
$$

Satz

Wenn ein autonomes Differentialgleichungssystem Hamiltonsch ist, dann ist die Hamilton-Funktion H ein erstes Integral.

Lemma

Wenn für ein autonomes Differentialgleichungssystem die Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ nicht von x abhängen und die Funktionen $g_1, \ldots, g_k$ nicht von y abhängen, und wenn weiterhin F eine gemeinsame Stammfunktion der f_i, also $\frac{\partial F}{\partial y_i} = f_i$, und G eine gemeinsame Stammfunktion der g_i, also $\frac{\partial G}{\partial x_i} = g_i$ für $i = 1, \ldots, k$ ist, dann ist das DGL-System Hamiltonsch und

$$H(x_1, \ldots, y_k) = F(y_1, \ldots, y_k) - G(x_1, \ldots, x_k)$$

eine Hamiltonfunktion.

Dieses Lemma lässt sich hauptsächlich für $k = 1$ anwenden (weil es dann immer eine Stammfunktion gibt).

Ein Teilchen der Masse $m = 1$ bewege sich reibungsfrei unter der von x abhängenden Kraft $F(x)$. Dann haben wir nach dem zweiten Newtonschen Gesetz die Differentialgleichung $x'' = F(x)$ bzw. mit $y := x'$ das Differentialgleichungssystem

$$x' = y$$

$$y' = F(x).$$

Ist V eine Stammfunktion von $-F$, dann ist

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$$

eine Hamilton-Funktion, denn man hat $\frac{\partial H}{\partial x} = -F(x)$ und $\frac{\partial H}{\partial y} = y$. Der $\mathbb{R}^{2n}$ wird in diesem Zusammenhang als "Phasenraum" bezeichnet, die x_i und y_i sind Koordinaten für den Ort und die Geschwindigkeit (bzw. den Impuls $p = mv$). In der Physik nennt man die Koordinaten meist q_i und p_i statt x_i und y_i.

Physikalisch kann die Hamilton-Funktion interpretiert werden als Gesamtenergie, zusammengesetzt aus der kinetischen Energie $\frac{1}{2}y^2$ und der potentiellen Energie $V(x)$.
Beispiele:

- $F(x) = -g$ Freier Fall im Schwerefeld der Erde
- $F(x) = -kx$ Schraubenfeder
- $F(x) = -g \sin x$ Fadenpendel
- $F(x) = -\frac{G}{x^2}$ Gravitation

Integrable Systeme

Wir definieren die Poisson-Klammer zweier auf $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ differenzierbarer Funktionen $f, g : U \to \mathbb{R}$ durch

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i}.$$

Definition

Eine Funktion $I(p, q)$ heisst erstes Integral der Hamilton-Gleichungen, wenn $\{H, I\} = 0$.

Lemma

Eine Funktion $I(p, q)$ ist genau dann ein erstes Integral, wenn sie auf jeder Bahn konstant ist.

Ein Satz von Liouville besagt: wenn es auf $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ für eine Hamiltonsche Differentialgleichung n Erhaltungsgrößen gibt, dann gibt es $2n-1$ Erhaltungsgrößen und das System kann also auf eine einfache DGL zurückgeführt werden. Mit dieser Methode löste Kowalewskaja 1888 die Kreiselgleichungen und mit dieser Methode kann man auch das Kepler-Problem (Zweikörperproblem, z.B. Sonne-Planet oder Proton-Elektron) lösen.
Wir erwähnen ohne vollständige mathematische Beweise einige Lehrsätze über Hamiltonsche Differentialgleichungssysteme:

- Satz von Liouville (1838): Das Volumen im Phasenraum $\mathbb{R}^{2n}$ ist invariant unter dem Fluss eines Hamiltonschen Differentialgleichungssystems.
- Wiederkehrsatz von Poincaré (1890): Wenn der Fluss eines Hamiltonschen Differentialgleichungssystems ein beschränktes Gebiet $D \subset \mathbb{R}^{2n}$ invariant läßt, dann gibt es in jeder (beliebig kleinen) offenen Menge $O \subset D$ einen Punkt $x \in O$, dessen Bahn O unendlich oft durchläuft.
- Satz von Noether (1918): Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines Hamiltonschen Differentialgleichungssystems

Anwendungen des Noether-Prinzips

- Wenn die Hamilton-Funktion invariant unter Verschiebungen in Richtung eines Vektors v ist, dann ist die entsprechende Komponente des Impulses (der Geschwindigkeit) eine Erhaltungsgröße.
- Wenn die Hamilton-Funktion invariant unter einer Drehung ist, dann ist die entsprechende Komponente des Drehimpulses eine Erhaltungsgröße.

Gradientensysteme

Gradientensysteme

Auf einer offenen Menge $U \subset \mathbf{R}^n$ mit Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ betrachten wir ein Differentialgleichungssystem

$$x_1' = f_1(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\ldots$$

$$x_n' = f_n(x_1, \ldots, x_n)$$

Ein solches Differentialgleichungssystem heisst Gradientensystem, wenn es eine stetig differenzierbare Funktion $V \colon U \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = -f_1, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n} = -f_n.$$

Der Fluss eines Gradientensystems heisst Gradientenfluss. Man verwendet die abkürzende Bezeichnung $x' = -gradV(x)$ mit $gradV = (\frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n})$.

Beispiel

Eine 1-dimensionale Differentialgleichung $x' = f(x)$ mit stetiger rechter Seite ist ein Gradientensystem.

Beispiel

Eine 2-dimensionale Differentialgleichung

$$x' = f(x, y), y' = g(x, y)$$

mit stetig differenzierbarer rechter Seite ist genau dann ein Gradientensystem, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

gilt.

Lemma

Der Gradientenfluss eines Gradientensystems $x' = -\mathrm{grad}V(x)$ ist orthogonal zu den Niveaumengen von V und die kritischen Punkte von V sind die Gleichgewichte des Gradientenflusses.

Lemma

Für die Bahn eines Gradientenflusses gilt $V' \leq 0$ mit Gleichheit nur in Gleichgewichten des Gradientenflusses.

Insbesondere gibt es zu einem isolierten Minimum x_0 von V eine Umgebung, in der alle Bahnen gegen x_0 konvergieren.

Beispiel

Der Gradientenfluss zu $V(x, y) = x^2(x-1)^2 + y^2$ *ist orthogonal zu den Niveaumengen von* V*, lässt deshalb die* x*-Achse und die Geraden* $x = 0, x = \frac{1}{2}, x = 1$ *invariant.*

Lemma

Die ω-und α-Limesmenge eines beliebigen Punktes besteht aus Gleichgewichtspunkten.

Lemma

Wenn V nur isolierte kritische Punkte hat, dann geht jede Bahn des Gradientenflusses entweder gegen Unendlich (d.h. es gibt keine Häufungspunkte) oder sie konvergiert gegen einen kritischen Punkt.

Definition

Ein Gleichgewicht x_0 *heisst stabil, wenn es zu jedem* $\epsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *gibt, so dass für alle* x *mit* $\parallel x - x_0 \parallel < \delta$ *und* $t \geq 0$ *gilt*

$$\parallel \Phi(t,x) - x_0 \parallel < \epsilon.$$

Andernfalls heisst es instabil.
Ein Gleichgewicht x_0 *heisst attraktiv, wenn es ein* $\delta > 0$ *gibt, so dass* $\lim_{t\to\infty} \Phi(t,x) = x_0$ *für alle* x *mit* $\parallel x - x_0 \parallel < \delta$ *gilt.*
Ein Gleichgewicht heisst asymptotisch stabil, wenn es stabil und attraktiv ist.
Ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht x_0 *heisst exponentiell stabil, wenn es ein* $\delta > 0$ *und positive Konstanten* a, c *gibt mit* $\|\Phi(t,x) - x_0\| \leq ce^{-at}\|x - x_0\|$ *für alle* x *mit* $\parallel x - x_0 \parallel < \delta$ *und alle* $t > 0$.

Auf dem $\mathbb{R}^1$ hat eine DGL $x' = f(x)$ ein Gleichgewicht in einer Nullstelle x_0 von f.
Diese ist stabil, wenn es ein $\delta > 0$ mit

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ gibt.
Sie ist asymptotisch stabil, wenn sogar $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0$ für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ gilt,
und exponentiell stabil, wenn $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < -\alpha$ für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ (für ein $\alpha > 0$) gilt.
Die letzten beiden Bedingungen sind bei diferenzierbarem f genau dann erfüllt, wenn $f'(x_0) < 0$.

Wir betrachten die Differentialgleichung $x' = Ax$ für eine lineare Abbildung $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Wenn A invertierbar ist, dann ist 0 das einzige Gleichgewicht.
Aus Differentialgleichungen I wissen wir, dass jede Lösung eine komplexe Linearkombination von Fundamentallöaungen $e^{\lambda_k t} P_k(t)$ mit Eigenwerten λ_k und Polynomen P_k ist, wobei der Grad von P_k der Differenz aus algebraischer und geometrischer Vielfachheit von λ_k (also Größe des zugehörigen Jordan-Blocks minus 1) ist.

Lemma

Wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben, dann ist 0 exponentiell stabil.

Beweisidee: Alle Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent. Es genügt, die Behauptung für eine Norm zu beweisen. Durch einen geeigneten Basiswechsel bringen wir die Matrix in Jordan-Form mit sehr kleinen Einträgen oberhalb der Diagonale. Wir benutzen diese neue Basis zur Definition einer Norm auf dem $\mathbb{R}^n$, in der A eine kontrahierende Abbildung ist.

Lemma

Wenn alle Eigenwerte von A nichtpositiven Realteil haben und für den Eigenwert 0 die geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen, dann ist 0 stabil. Andernfalls ist 0 instabil.

Definition

Wir nennen eine lineare Abbildung hyperbolisch, wenn für alle Eigenwerte $Re(\lambda) \neq 0$ *gilt.*

Für eine Matrix bezeichnen wir mit E^+ die Summe der Jordan-Blöcke zu Eigenwerten $Re(\lambda) > 0$ und mit E^- die Summe der Jordan-Blöcke zu Eigenwerten $Re(\lambda) < 0$, sowie mit E^0 die Summe der Jordan-Blöcke zu Eigenwerten $Re(\lambda) = 0$. Dann ist $\mathbb{R}^n = E^+ \oplus E^0 \oplus E^-$. Eine Matrix ist genau dann hyperbolisch, wenn $E^0 = 0$, also $\mathbb{R}^n = E^+ \oplus E^-$.

Lemma

Wenn A hyperbolisch ist, dann gilt $\lim_{t\to\infty} \Phi(t,x) = 0$ *für alle* $x \in E^-$ *und* $\lim_{t\to\infty} \Phi(t,x) = \infty$ *für alle* $x \notin E^-$.

Man nennt deshalb E^+ den instabilen und E^- den stabilen Unterraum für das Gleichgewicht 0.

Eine Ljapunow-Funktion auf einer Umgebung $U(x_0)$ eines Gleichgewichts x_0 von $x' = F(x)$ ist eine stetige Funktion $L\colon U(x_0) \to \mathbb{R}$ mit

- $L(x_0) = 0$
- $L(x) > 0$ für $x \neq x_0$
- $\langle grad(L), F \rangle \leq 0$ in $x \neq x_0$

Die Ljapunow-Funktion heisst strikt, wenn $\langle grad(L), F \rangle < 0$ in allen $x \neq x_0$ gilt.

Satz

Besitzt F bei x_0 eine Ljapunow-Funktion, dann ist x_0 ein stabiles Gleichgewicht. Wenn die Ljapunow-Funktion strikt ist, dann ist x_0 asymptotisch stabil.

Lemma

Für ein Hamiltonsches Differentialgleichungssystem ist die Hamilton-Funktion H eine Ljapunow-Funktion, aber keines strikte Ljapunow-Funktion.

Lemma

Für ein Gradientensystem $x' = -\mathrm{grad}V(x)$ *ist* V *eine strikte Ljapunow-Funktion.*

Lemma

Sei A eine lineare Abbildung, deren Eigenwerte negativen Realteil haben. Sei $B = \int_0^\infty e^{tA^T} e^{tA} dt$. Dann ist $V(x) = \langle x, Bx \rangle$ eine strikte Ljapunow-Funktion mit $\langle \mathrm{grad} V(x), Ax \rangle = -\|x\|^2$.

Satz

Wenn in einem Gleichgewicht x_0 von $x' = f(x)$ alle Eigenwerte von $Df(x_0)$ negativen Realteil haben, dann ist x_0 exponentiell stabil.

Pendelgleichung

Beispiel

Die Pendelgleichung mit Reibung $x'' = -\sin(x) + kx'$ *mit* $k > 0$ *hat ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht in* $(0, 0)$.

Definition

Eine Bahn O_{x_0} *heisst stabil, wenn es zu jeder Umgebung* U *eine Umgebung* V *gibt, so dass für alle* $x \in V$ *und* $t \geq 0$ *gilt*

$$\Phi(t, x) \in U.$$

Eine stabile Bahn O_{x_0} *heisst asymptotisch stabil, wenn es eine Umgebung* V *gibt, so dass* $\lim_{t \to \infty} d(\Phi(t, x), O_{x_0}) = 0$ *für alle* $x \in V$ *gilt.*

Beispiel

Die Differentialgleichung in Polarkoordinaten

$$r' = \sin(r)$$

$$\phi' = 1$$

hat asymptotisch stabile periodische Bahnen

Ebene dynamische Systeme

Definition

Ein Grenzzyklus ist eine isolierte periodische Lösung eines autonomen Differentialgleichungssystems.

Ein Grenzzyklus ist eine geschlossene Kurve, auf die benachbarte Trajektorien im Grenzwert unendlicher Zeit zulaufen oder von der sie sich entfernen:
Laufen benachbarte Trajektorien im Grenzwert unendlicher Zeit auf den Grenzzyklus zu, so ist der Grenzzyklus ein eindimensionaler Attraktor und wird asymptotisch stabil genannt.
Entfernen sich benachbarte Trajektorien dagegen im Grenzwert unendlicher Zeit (bzw. laufen im Grenzwert unendlich negativer Zeit auf den Grenzzyklus zu), so ist der Grenzzyklus ein eindimensionaler Repellor bzw. negativer Attraktor und wird instabil genannt.
Falls benachbarte Lösungen selbst auch periodische Lösungen sind, so handelt es sich nicht um einen Grenzzyklus, da er keine isolierte periodische Lösung darstellt.

Beispiel

Der van-der-Pol-Oszillator

$$x' = y$$

$$y' = (1 - x^2)y - x$$

hat einen Grenzzyklus.

Beispiel

$$x' = y + x^2 - \frac{x}{4}(y - 1 + 2x^2)$$
$$y' = -2(1 + y)x$$

hat Gleichgewichte $(0,0), (-1,-1), (1,-1), (-2,-1)$, *die Mengen* $y = -1$ *und* $y = 1 - 2x^2$ *invariant und für Startwerte im von den beiden invarianten Mengen eingeschlossenen Gebiet (mit Ausnahme des Gleichgewichts) bestehet die* ω*-Limesmenge aus zwei Gleichgewichten und den beiden sie verbindenden Bahnen.*

Satz

Für ein 2-dimensionales autonomes Differentialgleichungssystem kann die ω-Limesmenge $\omega(x)$ eines Punktes $x \in \mathbb{R}^2$, wenn sie kompakt und nichtleer ist und nur endlich viele Gleichgewichte enthält, nur von einer der folgenden Formen sein:
- ein Gleichgewicht,
- eine periodische Bahn,
- eine Menge von endlich vielen Gleichgewichten und von endlich vielen Bahnen, die für $t \to \pm\infty$ gegen jeweils eines der Gleichgewichte konvergieren, wobei es zu je zwei Gleichgewichten nur eine Bahn gibt, die für $t \to \pm\infty$ gegen diese beiden Gleichgewichte konvergiert.

Korollar

Wenn die ω-Limesmenge von x ein Grenzzykel γ mit $x \notin \gamma$ ist, dann gibt es eine offene Umgebung U von x mit $\omega(y) = \gamma$ für alle $y \in U$.

Korollar

Eine vorwärts-invariante kompakte Menge enthält entweder einen Grenzzykel oder ein Gleichgewicht.

y: Räuber, x: Beute

$$x' = (A - By)x, A, B \geq 0$$
$$y' = (Cx - D)y, C, D \geq 0$$

Nach Skalierung erhält man die Lotka-Volterra-Gleichnungen

$$x' = (1 - y)x$$

$$y' = \alpha(x - 1)y, \alpha > 0$$

Gleichgewichte: (0,0), (1,1)
Die x- und y-Achse und damit auch die durch die Ungleichungen $x, y \geq 0$ bestimmte Region sind invariant.
Aus der Kettenregel folgt

$$\frac{dy}{dx} = \alpha \frac{(x-1)y}{(1-y)x}$$

Die Bahnen sind implizit gegeben durch

$$f(y) + \alpha f(x) = const.$$

mit

$$f(x) = x - 1 - \log x$$

Satz

Die Lösungskurven der Lotka-Volterra-Gleichung sind periodisch und umkreisen das Gleichgewicht $(1,1)$.

Man hat also keine Grenzzyklen. Bei drei Tierpopulationen kann es Grenzzyklen geben, man kennt aber keine Beispiele mit mehr als drei Grenzzyklen.