Gewöhnliche Differentialgleichungen I

Thilo Kuessner

Eichstätt, Sommer 2021

Inhaltsverzeichnis

Folien (in Abständen aktualisiert):
http://newton.kias.re.kr/~kuessner/dg.pdf

Grundbegriffe

Klassische Mechanik

Ein Teilchen wird beschrieben als Punkt im Raum, dessen Bewegung eine glatte Funktion $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ beschreibt. Die Zeit-Ableitung $v = x'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ist die Geschwindigkeit des Teilchens und die Ableitung der Geschwindigkeit $a = v'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ist die Beschleunigung. Das Teilchen bewegt sich in einem Kraftfeld $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, es wird also eine Kraft $F(x)$ auf das Teilchen ausgeübt. Die Newtonsche Bewegungsgleichung besagt $F = ma$, wobei m die Masse des Teilchens, also eine positive Konstante ist. Man erhält die Gleichung

$$mx''(t) = F(x(t)).$$

Eine solche Gleichung zwischen der Funktion $x(t)$ und ihren Ableitungen nennt man Differentialgleichung. Die Newton-Gleichung ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, weil das die höchste vorkommende Ableitung ist. Genauer gesagt handelt es sich um ein Differentialgleichungssystem, denn man hat für jede der drei Koordinaten eine Differentialgleichung.

Lösungen der Newton-Gleichung

Für eine gegebene Kraft F möchte man Lösungen der Newton-Gleichung finden. Wir betrachten als Beispiel den freien Fall. Die wirkende Kraft ist die Gravitationskraft $F(x) = (0, 0, -mg)$ für eine positive Konstante g. Wir erhalten das Differentialgleichungssystem

$$mx_1'' = 0$$
$$mx_2'' = 0$$
$$mx_3'' = -mg.$$

Man erhält die Lösung

$$x(t) = x(0) + v(0)t - \frac{g}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t^2.$$

Zukunft und Vergangenheit des Teilchens sind festgelegt durch die Startposition $x(0)$ und die Startgeschwindigkeit $v(0)$.

Begriffe I

Für offene Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $C^k(U, V)$ die Menge der Funktionen $x \colon U \to V$, die stetige Ableitungen bis zur Ordnung k haben.
Eine gewöhnliche Differentialgleichung ist eine Gleichung der Form

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(k)}) = 0$$

mit einer stetigen Funktion $F \colon I \times U \times U_1 \times \ldots \times U_k \to \mathbb{R}$ für eine unbekannte Funktion $x \in C^k(I, U)$, also eine k-fach stetig differenzierbare Funktion $x \colon I \to U$ auf einem (evtl. unendlichen) Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Hier sind $U, U_1 \ldots, U_k$ Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Begriffe II

Ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem ist eine Gleichung der Form

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(k)}) = 0$$

mit einer stetigen Funktion $F\colon U \times U_1 \times \ldots \times U_k \to \mathbb{R}^n$ für eine unbekannte Funktion $x\colon I \to U$ auf einem (evtl. unendlichen) Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Hier sind $U, U_1 \ldots, U_k$ Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.
Man nennt t die unabhängige und x die abhängige Variable. Die höchste vorkommende Ableitung heisst die Ordnung der Differentialgleichung bzw. des Differentialgleichungssystems.
Wir werden stets annehmen, dass man das Differentialgleichungssystem nach der höchsten Ableitung auflösen kann, man also ein Differentialgleichungssystem der Form

$$x^{(k)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(k-1)})$$

hat.

Reduktion auf Systeme erster Ordnung

Ein Differentialgleichungssystem

$$x^{(k)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(k-1)})$$

kann durch Einführen neuer abhängiger Variablen $y = (x, x', \ldots, x^{(k-1)})$ in das äquivalente System erster Ordnung

$$y_1' = y_2$$

$$\ldots$$

$$y_{k-1}' = y_k$$

$$y_k' = f(t, y)$$

überführt werden.

Autonome Systeme

Ein Differentialgleichungssystem

$$x^{(k)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(k-1)})$$

heisst autonom, wenn f nicht von t abhängt. Für theoretische Betrachtungen ist es manchmal nützlich, ein Differentialgleichungssystem zu einem autonomen System zu machen, indem man t zu einer weiteren abhängigen Variablen x_0 macht und dementsprechend die Differentialgleichung $x_0' = 1$ hinzufügt.
Für ein autonomes System kann man eine Lösung $X \colon I \to U$ mit $X(t_0) = a$ durch die Zeitverschiebung $x(t) = X(t + t_0)$ zu einer Lösung mit $x(0) = a$ machen, weshalb wir autonome Anfangswertprobleme stets mit der Bedingung $x(0) = a$ formulieren werden.

Explizite Lösungen

Maximale Lösungen - Definition

Definition

Man bezeichnet als maximale Lösung des DGL-Systems

$$x^{(k)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(k-1)})$$

eine auf einem (evtl. unendlichen) Intervall $I \subset \mathbb{R}$ *definierte Lösung* $x \colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *mit der Eigenschaft, dass es keine auf einem Intervall* J *mit* $I \subsetneq J$ *definierte Lösung gibt, die auf* I *mit* x *übereinstimmt.*

Beispiel

Die Differentialgleichung

$$x' = x^2$$

hat die auf dem Intervall $(-\infty, 1)$ *definierte maximale Lösung* $x(t) = \frac{1}{1-t}$ *und die auf dem Intervall* $(1, \infty)$ *definierte maximale Lösung* $x(t) = \frac{1}{1-t}$.

Autonome Gleichungen erster Ordnung

Für eine stetige Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ auf $U \subset \mathbb{R}$ und für $x_0 \in \mathbb{R}$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$x' = f(x), x(0) = x_0.$$

Für $f(x_0) = 0$ ist $x(t) \equiv x_0$ eine Lösung.
Wir nehmen jetzt an, dass $f(x_0) \neq 0$ und dass also f auf einer evtl. kleineren Umgebung U von x_0 konstantes Vorzeichen hat.
Für $x \in U$ ist dann

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{f(y)}$$

eine monotone Funktion (monoton wachsend falls $f(x_0) > 0$, monoton fallend falls $f(x_0) < 0$) und hat deswegen eine Umkehrfunktion F^{-1}.

$$x(t) = F^{-1}(t)$$

ist dann eine Lösung des zu $\int_0^t \frac{x'(s)ds}{f(x(s))} = t$ äquivalenten Anfangswertproblems $x'(t) = f(x(t)), x(0) = x_0$.

Wir betrachten den Fall $f(x_0) > 0$. (Der Fall $f(x_0) < 0$ ist analog, und für $f(x_0) = 0$ ist $x(t) = x_0$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte konstante Lösung.)
Sei (x_1, x_2) die maximale Umgebung von x_0, auf der f positiv ist. (Falls dieses Intervall endlich ist, muss $f(x_1) = f(x_2) = 0$ sein.)
Setze

$$T_- = \lim_{x \longrightarrow x_1} F(x) < 0, \; T_+ = \lim_{x \longrightarrow x_2} F(x) > 0.$$

Dann ist die Lösung $x(t)$ auf dem Intervall (T_-, T_+) definiert und

$$\lim_{t \rightarrow T_-} x(t) = x_1, \; \lim_{t \rightarrow T_+} x(t) = x_2.$$

Insbesondere ist $x(t)$ genau dann für alle $t > 0$ definiert, wenn

$$T_+ = \int_{x_0}^{x_2} \frac{dy}{f(y)} = +\infty$$

und genau dann für alle $t < 0$ definiert, wenn
$-T_- = \int_{x_1}^{x_0} \frac{dy}{f(y)} = +\infty$.

Maximale Lösungen autonomer Differentialgleichungen II

Für $T_+ < \infty$ gibt es zwei Möglichkeiten: $x_2 = \infty$ oder $x_2 < \infty$.
Für $x_2 = \infty$ ist $\lim_{t \to T_+} x(t) = \infty$ und die Lösung lässt sich nicht in T_+ und darüber hinaus fortsetzen.
Für $x_2 < \infty$ können wir wegen $f(x_2) = 0$ die Lösung weiter fortsetzen durch $x(t) = x_2$ für $t \geq T_+$. Damit haben wir in diesem Fall zwei Lösungen des Anfangswertproblems

$$x' = f(x), x(T_+) = x_2,$$

nämlich $x(t)$ und die konstante Lösung x_2. (Wir werden in der Vorlesung später sehen, dass dieser Fall für stetig differenzierbare f nicht vorkommen kann.)
Analog diskutiert man die maximale Fortsetzbarkeit für $T_- > -\infty$.

Beispiel 1

Beispiel

$$U = \mathbb{R}, f(x) = x$$

$$x'(t) = x(t), x(0) = x_0 > 0$$

Wir haben $(x_1, x_2) = (0, \infty)$ und

$$F(x) = \ln\left(\frac{x}{x_0}\right).$$

Daraus folgt $T_\pm = \pm\infty$ und die Lösung

$$x(t) = e^t x_0$$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Beispiel 2

Beispiel

$$U = \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

$$x'(t) = x^2(t), x(0) = x_0 > 0$$

Wir haben $(x_1, x_2) = (0, \infty)$ und

$$F(x) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}.$$

Daraus folgt $T_- = -\infty$, $T_+ = \frac{1}{x_0}$ und die Lösung

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$$

ist auf $(-\infty, \frac{1}{x_0})$ definiert.
Wegen $\lim_{t \to \frac{1}{x_0}} x(t) = \infty$ kann diese Lösung nicht in T_+ und darüber hinaus fortgesetzt werden.

Beispiel 3

Beispiel

$$U = \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{|x|}$$

$$x'(t) = \sqrt{|x(t)|}, x(0) = x_0 > 0$$

Wir haben $(x_1, x_2) = (0, \infty)$ und

$$F(x) = 2(\sqrt{x} - \sqrt{x_0}).$$

Daraus folgt $T_- = -2\sqrt{x_0}$, $T_+ = +\infty$ und die Lösung

$$x(t) = (\frac{t}{2} + \sqrt{x_0})^2.$$

Diese Lösung lässt sich fortsetzen durch $x(t) = 0$ für $t < T_-$.

Trennung der Variablen

Das Anfangswertproblem

$$x' = f(x)g(t), x(0) = x_0$$

hat für $f(x_0) = 0$ die Lösung $x(t) \equiv x_0$.
Für $f(x_0) \neq 0$ hat f auf einer Umgebung von x_0 konstantes Vorzeichen und das Anfangswertproblem ist äquivalent zu

$$\int_0^t \frac{x'(s)ds}{f(x(s))} = \int_0^t g(s)ds.$$

Mit

$$F(x) = \int_{x_0}^x \frac{dy}{f(y)}$$

und der Umkehrfunktion F^{-1} hat man dann

$$x(t) = F^{-1}\left(\int_0^t g(s)ds\right)$$

als Lösung des Anfangswertproblems $x'(t) = f(x(t)), x(0) = x_0$.

Koordinatentransformation

Durch die Transformation

$$s = s(t), y = y(t, x)$$

mit $\frac{\partial s}{\partial t} \neq 0, \frac{\partial y}{\partial x} \neq 0$ wird die Differentialgleichung

$$x' = f(t, x)$$

in eine äquivalente Differentialgleichung überführt.

Beispiel

$$tx' + x = (2t + 1)$$

ist für $t \neq 0$ mittels der Transformation $y = tx, s = t$ äquivalent zu

$$y' = 2t + 1$$

mit der Lösung $y = t^2 + t + c$, also $x = t + 1 + \frac{c}{t}$.

Affine Transformationen

Eine Differentialgleichung der Form

$$x' = f(ax + bt + c)$$

kann mit der Transformation

$$y = ax + bt + c, s = t$$

in die Differentialgleichung

$$y' = af(y) + b$$

transformiert werden, die mit Trennung der Variablen gelöst wird.

Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen

Eine Differentialgleichung heisst homogen oder eine Ähnlichkeitsdifferentialgleichung, wenn sie von der Form

$$x' = f\left(\frac{x}{t}\right)$$

ist.
Durch die Koordinatentransformation $y = \frac{x}{t}, s = t$ wird sie in die Differentialgleichung

$$y' = \frac{f(y) - y}{t}$$

überführt, die mit Trennung der Variablen gelöst werden kann.

Lineare Gleichungen

Satz

Die lineare homogene Differentialgleichung

$$x' = a(t)x$$

mit Anfangswert $x(t_0) = x_0$ *hat die Lösung*

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} x_0.$$

Die lineare inhomogene Differentialgleichung

$$x' = a(t)x + g(t)$$

mit Anfangswert $x(t_0) = x_0$ *hat die Lösung*

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \left(\int_{t_0}^{t} e^{-\int_{u}^{t} a(s)ds} g(u)du + D \right).$$

Bernoulli-Gleichungen

Eine Differentialgleichung heisst vom Bernoulli-Typ, wenn sie von der Form

$$x' = f(t)x + g(t)x^n$$

mit $n \neq 0, 1$ ist.
Durch die Koordinatentransformation $y = x^{1-n}, s = t$ wird sie in die lineare Differentialgleichung

$$y' = (1-n)f(t)y + (1-n)g(t)$$

überführt.

Eine Differentialgleichung heisst vom Riccati-Typ, wenn sie von der Form

$$x' = h(t) + f(t)x + g(t)x^2$$

ist.

Wenn eine spezielle Lösung $x_p(t)$ bekannt ist, kann man mit der Koordinatentransformation $y = \frac{1}{x - x_p(t)}, s = t$ die lineare Differentialgleichung

$$y' = -(f(t) + 2x_p(t)g(t))y - g(t)$$

erhalten.

Exakte Differentialgleichungen

Eine exakte Differentialgleichung ist eine Differentialgleichung der Form

$$f(t,x)+g(t,x)x'=0$$

mit stetig differenzierbareb f,g, für die es eine "Stammmfunktion" F mit

$$\frac{\partial F}{\partial t}=f,\frac{\partial F}{\partial x}=g$$

gibt. Eine notwendige Bedingung dafür ist $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial t}$.
Die Lösungen einer exakten Differentialgleichung sind implizit durch die Gleichung

$$F(t,x(t))\equiv C$$

gegeben. Die Konstante kann durch $C=F(0,x_0)$ aus der Anfangsbedingung $x(0)=x_0$ bestimmt werden.

Eulersche Multiplikatoren

Wenn eine Differentialgleichung nicht exakt ist, kann man versuchen, durch Multiplikation mit einer nullstellenfreien, stetig differenzierbaren Funktion μ eine äquivalente exakte Differentialgleichung

$$\mu(t,x)f(t,x) + \mu(t,x)g(t,x)x' = 0$$

zu erhalten. Dafür muss μ die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial(\mu f)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu g)}{\partial t}$$

erfüllen. μ heisst integrierender Faktor oder eulerscher Multiplikator.

Qualitative Analyse von Differentialgleichungen erster Ordnung

Beispiel

Unter qualitativer Analyse verstehen wir die Untersuchung des Langzeitverhaltens von Lösungen (in Abhängigkeit vom Anfangswert) ohne dabei notwendig die Differentialgleichung explizit zu lösen.

Beispiel

$$x' = x(1-x) - h$$

Für $h > \frac{1}{4}$ sind alle Lösungen monoton fallend und konvergieren gegen $-\infty$.
Für $0 < h \leq \frac{1}{4}$ sind $x_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{1-4h})$ stationäre Lösungen. Für einen Anfangswert $x_0 < x_2$ ist die Lösung monoton fallend und konvergiert gegen $-\infty$. Für einen Anfangswert $x_2 < x_0 < x_1$ ist die Lösung monoton wachsend und konvergiert gegen x_1. Für einen Anfangswert $x_0 > x_1$ ist die Lösung monoton fallend und konvergiert gegen x_1.

Nullstellen und Langzeitverhalten

Lemma

Sei

$$x' = f(x), x(0) = x_0$$

ein Anfangswertproblem mit einer eindeutigen Lösung.
Wenn $f(x_0) = 0$, *dann ist* $x(t) \equiv x_0$ *eine stationäre Lösung.*
Wenn $f(x_0) < 0$, *dann konvergiert* $x(t)$ *für* $t \to \infty$ *gegen die erste Nullstelle links von* x_0 *(bzw. gegen* $-\infty$ *falls es keine solche Nullstelle gibt).*
Wenn $f(x_0) > 0$, *dann konvergiert* $x(t)$ *für* $t \to \infty$ *gegen die erste Nullstelle rechts von* x_0 *(bzw. gegen* $+\infty$ *falls es keine solche Nullstelle gibt).*

Beispiel I

Wir betrachten die Differentialgleichung $x' = x^2 - t^2$.
In der $t - x-$Ebene wird die Halbebene $t \geq 0$ durch die Geraden $x = t$ und $x = -t$ in drei Gebiete geteilt. Region I entspricht $x > t$, Region II entspricht $-t < x < t$, Region III entspricht $x < -t$.
Lösungen können von Region I oder Region III in Region II wechseln, aber nicht umgekehrt, da das Vektorfeld entlang der Geraden $x = \pm t$ konstant $(1, 0)$ ist.
Eine in Region III startende Lösung muss in Region II enden, während eine in Region I startende Lösung entweder in Region I oder in Region II enden kann.
Eine in Region II gelangte Lösung verbleibt dort und divergiert gegen $-\infty$. Dies geschieht nicht in endlicher Zeit.
Fragen: Divergieren in Region I verbleibende Lösungen in endlicher Zeit gegen $+\infty$? Nähern sich alle anderen Lösungen der Geraden $x = -t$ an?

Definition

Eine Sublösung einer Differentialgleichung $x' = f(t,x)$ *ist eine differenzierbare Abbildung* $x_- : [t_0, T) \to \mathbb{R}$ *mit* $x_-' < f(t, x_-(t))$ *für alle* $t \in [t_0, T)$.

Eine Superlösung einer Differentialgleichung $x' = f(t,x)$ *ist eine differenzierbare Abbildung* $x_+ : [t_0, T) \to \mathbb{R}$ *mit* $x_+' > f(t, x_+(t))$ *für alle* $t \in [t_0, T)$.

Beispiel

Für die Differentialgleichung $x' = x^2 - t^2$ *ist* $x(t) = -t$ *eine Sublösung und* $x(t) = t$ *eine Superlösung.*

Sub- und Superlösungen II

Lemma

i) Sei $x_-\colon [t_0, T) \to \mathbb{R}$ *eine Sublösung der Differentialgleichung* $x' = f(t,x)$ *mit* $x_(t_0) \leq x_0$. *Dann gilt für jede Lösung* $x\colon [t_0, T) \to \mathbb{R}$ *mit* $x(t_0) = x_0$ *die Ungleichung*

$$x_-(t) < x(t)$$

für alle $t \in (t_0, T)$.

ii) Sei $x_+\colon [t_0, T) \to \mathbb{R}$ *eine Superlösung der Differentialgleichung* $x' = f(t,x)$ *mit* $x_+(t_0) \geq x_0$. *Dann gilt für jede Lösung* $x\colon [t_0, T) \to \mathbb{R}$ *mit* $x(t_0) = x_0$ *die Ungleichung*

$$x(t) < x_+(t)$$

für alle $t \in (t_0, T)$.

Beispiel II

Neben $x_-(t) = -t$ und $x_+(t)$ hat man für $x' = x^2 - t^2$ noch die Sublösung

$$y_-(t) = \sqrt{t^2 + 2}$$

und die Superlösung

$$y_+(t) = -\sqrt{t^2 - 2}$$

für $t > 2\sqrt{\frac{2}{3}}$.
Sobald eine Lösung zwischen $x_-(t)$ und $y_+(t)$ liegt, muss sie dort bleiben und letztlich gegen die Gerade $x = -t$ konvergieren, weil das für $y_+(t)$ (und natürlich für $x_-(t)$) der Fall ist.
Sobald eine Lösung in Region II angelangt ist, wird sie monoton fallend und muss deshalb irgendwann kleiner sein als $-y_+(t) = \sqrt{t^2 - 2}$. Sobald sie zwischen $y_+(t)$ und $-y_+(t)$ liegt, ist $x'(t) < -2$, weshalb sie dann irgendwann zwischen $x_-(t)$ und $y_+(t)$ liegt und also letztlich gegen die Gerade $x = -t$ konvergiert.

Beispiel III

Wir zeigen jetzt, dass es nur eine Lösung gibt, die zwischen x_+ und y_- liegt.
Für jedes $T > 0$ betrachten wir die Lösungen mit Anfangsbedingungen $x(T) = x_+(T)$ bzw. $x(T) = y_-(T)$. Ihren Wert $x(0)$ bezeichnen wir mit $a(T)$ bzw. $b(T)$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen sind die Lösungen mit $x(0) \in [a(T), b(T)]$ genau diejenigen, die für $0 \leq t \leq T$ zwischen y_+ und x_- verbleiben.

Beispiel IV

Insbesondere wird für wachsendes T das Intervall $[a(T), b(T)]$ kleiner und wir haben im Grenzwert ein (evtl. aus nur einem Punkt bestehendes) Intervall $[a(\infty), b(\infty)]$. Lösungen mit Anfangswert in diesem Intervall müssen für alle Zeit zwischen x_+ und y_- verbleiben. Weil in diesem Bereich $f(t,x) = x^2 - t^2$ eine monoton wachsende Funktion in x ist, ist für zwei Lösungen x_0, x_1

$$x_1(t) - x_0(t) = x_1(t_0) - x_0(t_0) + \int_{t_0}^{t} (f(s, x_1(s)) - f(s, x_0(s)))ds$$

monoton wachsend in t.

Beispiel V

Aus
$$\lim_{t\to\infty} y_-(t) - x_+(t) = 0$$
folgt aber
$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) - x_0(t) = 0$$
im Widerspruch zur Monotonie. Also kann es in diesem Bereich nur eine Lösung x_0 geben. Alle Lösungen unterhalb x_0 enden in Region II und divergieren gegen $-\infty$, wobei sie sich $x = -t$ annähern. Alle Lösungen oberhalb x_0 enden oberhalb y_- und divergieren gegen $+\infty$.

Beispiel VI

Wir zeigen schließlich, dass Lösungen oberhalb y_- in endlicher Zeit gegen $+\infty$ divergieren.
Für diese Lösungen ist $x' = x^2 - t^2 > 2$ und damit $x(t) > x(t_0) + 2(t - t_0)$. Es gibt also ein $\epsilon > 0$ mit $x(t) > \frac{t}{\sqrt{1-\epsilon}}$.
Daraus folgt $x' > \epsilon x(t)^2$. Die Lösung $x(t)$ ist also eine Superlösung der Differentialgleichung $x' = \epsilon x^2$, deren Lösungen aber in endlicher Zeit gegen $+\infty$ divergieren. Dies muss also erst recht für $x(t)$ der Fall sein.

Existenz- und Eindeutigkeitssätze

Picard-Iteration I

Für eine stetige Funktion f ist das Anfangswertproblem

$$x' = f(t,x), x(0) = x_0$$

äquivalent zu der Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s,x(s))ds.$$

Die Lösung $x(t)$ ist also ein Fixpunkt des Integraloperators

$$x(t) \to (Kx)(t) := x_0 + \int_0^t f(s,x(s))ds$$

auf dem Banach-Raum der stetigen Funktionen $C([0,T], \mathbb{R}^n)$.
Als Picard-Iteration bezeichnet man die Approximation von Lösungen durch Iteration dieses Operators.

Picard-Iteration II

Beispiel

Für

$$x' = x, x(0) = 1$$

liefert Picard-Iteration mit Startwert $x_0(t) = 1$:

$$x_1(t) = 1 + t$$

$$x_2(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$$

$$x_3(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3$$

Annäherungen an die Lösung

$$x(t) = e^t.$$

Iterative Approximation von Fixpunkten

Erinnerung: Ein Banachraum ist ein normierter Vektorraum, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert. Die stetigen Funktionen auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall mit der Norm $\parallel f \parallel = max|f(x)|$ bilden einen Banachraum.
Eine Abbildung K heisst kontrahierend, wenn es eine Konstante $\theta < 1$ mit $\parallel K(x) - K(y) \parallel \leq \theta \parallel x - y \parallel$ für alle x, y gibt.
Banachscher Fixpunktsatz: Wenn $K : X \rightarrow X$ eine kontrahierende Abbildung auf einem Banachraum ist, dann gibt es einen eindeutigen Fixpunkt x und man erhält ihn als Grenzwert der Folge $x_{n+1} = Kx_n$ für einen beliebigen Startwert x_0.
Die Genauigkeit der Approximation kann man mit der Ungleichung

$$\parallel x_n - x \parallel \leq \frac{\theta^n}{1 - \theta} \parallel x_1 - x_0 \parallel$$

abschätzen.

Lokale Lipschitz-Stetigkeit

Eine Funktion $f(t,x)$ heisst lokal lipschitz-stetig im zweiten Argument, wenn es zu jedem $x_0 \in \mathbb{R}^n$, jedem $T_0 > 0$ und jedem $\delta > 0$ eine Konstante L mit

$$\parallel f(t,x) - f(t,y) \parallel \leq L \parallel x - y \parallel$$

für alle $(t,x) \neq (t,y) \in [0, T] \times B_\delta(x_0)$ gibt.
Stetig differenzierbare Funktionen sind lokal Lipschitz-stetig.
Wenn f eine lokal Lipschitz-stetige Funktion ist, dann gilt

$$\int_0^t \parallel f(s,x(s)) - f(s,y(s)) \parallel ds \leq Lt \sup_{0 \leq s \leq t} \parallel x(s) - y(s) \parallel$$

solange die Graphen von $x(t)$ und $y(t)$ in $[0, T] \times B_\delta(x_0)$ liegen.

Satz von Picard-Lindelöf

Satz

Wenn $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig im zweiten Argument ist, dann hat für $(t_0, x_0) \in U$ das Anfangswertproblem

$$x' = f(t,x), x(t_0) = x_0$$

für ein $\epsilon > 0$ eine eindeutige Lösung

$$x\colon (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \to \mathbb{R}^n.$$

Satz von Picard-Lindelöf, Beweis I

Beweisskizze: Es gibt $\epsilon, \delta > 0$, so dass für alle $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], x, y \in \overline{B_\delta(x_0)}$ gilt

$$\|f(t,x)\| \leq M$$

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|$$

mit $\delta\epsilon \leq M, \epsilon L < 1$.

$$Y = \left\{ x\colon\ [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \to \overline{B_\delta(x_0)} \text{ stetig mit } x(t_0) = x_0 \right\}$$

ist ein vollständiger metrischer Raum.

$$K(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

ist eine kontrahierende Abbildung $K \colon Y \to Y$, denn mit $\theta := L\epsilon < 1$ gilt

$$\|K(x) - K(y)\| \leq \theta \|x - y\|$$

für alle $x, y \in Y$.
Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat K einen eindeutigen Fixpunkt $x \in Y$. Für diesen gilt

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

und damit

$$x'(t) = f(t, x(t)), x(t_0) = x_0.$$

QED

Stetige Abhängigkeit vom Anfangswert

Satz

Sei F Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L. Dann gilt für die Lösungen von $x' = F(t,x), x(0) = x_0$ und $y' = F(t,y), y(0) = y_0$ die Ungleichung

$$\|x(t) - y(t)\| \leq e^{Lt}\|x_0 - y_0\|.$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Gronwall-Ungleichung.

Lemma (Gronwall-Ungleichung)

Für eine differenzierbare Funktion $x\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ und eine stetige, nichtnegative Funktion $b\colon [0,T] \to [0,\infty]$ sowie $c \in \mathbb{R}$ folgt aus

$$x(t) \leq c + \int_0^t b(s)x(s)ds$$

für alle $t \in [0,T]$ die Ungleichung

Fortsetzbarkeit von Lösungen I

Wir betrachten das Anfangswertproblem $x' = f(t,x), x(t_0) = x_0$ mit $f \in C(U, \mathbb{R}^n), U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Wir nehmen im Folgenden an, dass die Lösungen unseres Anfangswertproblems lokal existieren und eindeutig sind. Wenn wir zwei auf offenen Intervallen definierte Lösungen haben, dann müssen sie auf dem Durchschnitt der beiden Intervalle übereinstimmen. (Andernfalls, wenn sie auf einem kleineren maximalen Intervall übereinstimmen, stimmen sie wegen Stetigkeit auch in dessen Randpunkten und dann in offenen Umgebungen der Randpunkte überein.) Damit erhalten wir auf der Vereinigung der Definitionsintervalle eine Lösung, die auf beiden Intervallen mit den dort definierten Lösungen übereinstimmt. Indem man die Vereinigung der Definitionsintervalle aller lokal definierten Lösungen betrachtet, erhält man so ein maximales Definitionsintervall und eine auf diesem definierte "maximale Lösung". Man spricht von einer "globalen Lösung", wenn das Definitionsintervall ganz $\mathbb{R}$ ist.

Fortsetzbarkeit von Lösungen II

Satz

Sei (T_-, T_+) das maximale Definitionsintervall der Lösung des Anfangswertproblems $x' = f(t,x), x(0) = x_0$. Wenn $T_+ < +\infty$, dann verlässt die Lösung für $t \to T_+$ jede kompakte Menge C. Wenn $T_- > -\infty$, dann verlässt die Lösung für $t \to T_-$ jede kompakte Menge C.

Beweis: Wenn die Lösung für $t \to T_+$ in C verbleibt, dann muss es wegen Kompaktheit von C eine Teilfolge $t_n \to T_+$ geben, für die $x(t_n)$ gegen einen Punkt $x_+ \in C$ konvergiert. Nach dem vorherigen Lemma ist x dann auf ein Intervall $(T_-, T_+ + \epsilon)$ fortsetzbar im Widerspruch zur Maximalität des Definitionsintervalls.
Entsprechend für $t \to T_-$.

Lineare Differentialgleichungssysteme

Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten I

Ein lineares Differentialgleichungssystem ist ein System der Form

$$x' = A(t)x$$

mit einer von t abhängenden Matrix $A(t)$. Wenn A nicht von t abhängt, spricht von einem System mit konstanten Koeffizienten. Für ein lineares System mit konstanten Koeffizienten $x' = AX, x(0) = x_0$ bestimmen wir mit Picard-Iteration eine Folge von Näherungslösungen:

$$x_1(t) = x_0 + tAx_0$$

$$x_2(t) = x_0 + tAx_0 + \frac{t^2}{2}A^2x_0$$

$$\ldots$$

$$x_m(t) = \sum_{j=0}^{m} \frac{t^j}{j!}A^j x_0.$$

Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten I

Wenn man die Reihe

$$exp(A) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j$$

definieren kann, dann löst diese das Anfangswertproblem $x' = Ax, x(0) = x_0$

Matrixexponential

Der Vektorraum der komplexen $n \times n-$Matrizen ist isomorph zu $\mathbb{C}^{n^2}$. Mit der Norm $\parallel A \parallel = \max\{\parallel Ax \parallel : \ \parallel x \parallel = 1\}$ wird er zu einem Banach-Raum: Cauchy-Folgen konvergieren. Die Norm hat die Eigenschaften $\parallel AB \parallel \leq \parallel \parallel A \parallel \parallel \parallel B \parallel$ und $\parallel A + B \parallel \leq \parallel \parallel A \parallel + \parallel B \parallel$, woraus

$$\parallel \sum_{j=n}^{m} \frac{t^j}{j!} A^j \parallel \leq \sum_{j=n}^{m} \frac{t^j}{j!} \parallel A \parallel^j$$

folgt. Weil $\sum_{j=0}^{m} \frac{t^j}{j!} \parallel A \parallel^j$ eine gegen $e^{\parallel A \parallel}$ konvergierende Cauchy-Folge ist, ist dann auch $\sum_{j=0}^{m} \frac{t^j}{j!} A^j$ eine Cauchy-Folge. Es existiert also ihr Grenzwert $exp(A)$.

Beispiel

Für eine Diagonalmatrix $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ist $exp(D) = diag(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$.

Beispiel

Für

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$exp(N) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \ldots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \frac{1}{(n-3)!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrixexponential: Eigenschaften

Lemma

Für eine Matrix A und eine invertierbare Matrix B gilt

$$exp(BAB^{-1}) = Bexp(A)B^{-1}.$$

Lemma

Wenn für zwei Matrizen A, B gilt $AB = BA$, dann ist

$$exp(A+B) = exp(A)exp(B).$$

Beispiel

Für einen Jordan-Block

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

ist

$$exp(tJ) = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrixexponential beliebiger Matrizen

Für eine beliebige Matrix A gibt es einen Basiswechsel B, so dass BAB^{-1} eine aus Jordan-Blöcken zusammengesetzte Block-Matrix

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}$$

ist. Dann ist

$$exp(tA) = B^{-1} \begin{pmatrix} exp(tJ_1) & & & \\ & exp(tJ_2) & & \\ & & \dots & \\ & & & exp(tJ_r) \end{pmatrix} B.$$

Qualitative Diskussion der Integralkurven von $x' = Ax$ im $\mathbb{R}^2$ I

Wir betrachten im $\mathbb{R}^2$ die Differentialgleichung $x' = Ax$ für eine 2×2-Matrix A.
Fall 1: A hat zwei reelle Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Seien v_1, v_2 die zugehörigen Eigenvektoren. In der Basis v_1, v_2 ist A die Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Für eine Anfangsbedingung $x(0) = C_1 v_1 + C_2 v_2$ bekommt man die Lösung $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2$.

Qualitative Diskussion der Integralkurven von $x' = Ax$ im $\mathbb{R}^2$ II

Fall 1.1: $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$: Senke in $(0,0)$
Fall 1.2: $\lambda_1 < 0 = \lambda_2$: $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 v_2$, alle Punkte fließen in die von v_2 aufgespannte Gerade
Fall 1.3: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: Sattel in $(0,0)$
Fall 1.4: $\lambda_1 = 0 < \lambda_2$: $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 v_2$, alle Punkte fließen aus der von v_2 aufgespannten Gerade heraus
Fall 1.5: $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$: Quelle in $(0,0)$

Qualitative Diskussion der Integralkurven von $x' = Ax$ im $\mathbb{R}^2$ III

Fall 2: A hat einen einfachen (reellen) Eigenwert λ. Dann hat A Jordansche Normalform $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ in einer Basis v_1, v_2. Für eine Anfangsbedingung $x(0) = C_1 v_1 + C_2 v_2$ bekommt man die Lösung $x(t) = (C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}) v_1 + C_2 e^{\lambda t} v_2$.

Qualitative Diskussion der Integralkurven von $x' = Ax$ im $\mathbb{R}^2$ IV

Fall 3: A hat komplexe Eigenwerte $a \pm ib$ mit $b \neq 0$. Dann hat A in einer Basis v_1, v_2 die Form $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Für eine Anfangsbedingung $x(0) = C_1 v_1 + C_2 v_2$ bekommt man die Lösung $x(t) =$
$e^{at}(C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt))v_1 + e^{at}(-C_1 \sin(bt) + C_2 \cos(bt))v_2$.
Fall 3.1: $a > 0$: Quelle in $(0,0)$, spiralförmige Bahnen
Fall 3.2: $a = 0$: Kreisbahnen
Fall 3.3: $a < 0$: Senke in $(0,0)$, spiralförmige Bahnen

Stabilität linearer autonomer Systeme I

Satz

Für die Lösung $x(t)$ des Anfangswertproblems

$$x' = Ax, x(0) = x_0$$

gilt genau dann

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = (0, \ldots, 0),$$

wenn der Anfangswert x_0 in dem Unterraum liegt, der von verallgemeinerten Eigenräumen zu Eigenwerten λ mit

$$Re(\lambda) < 0$$

aufgespannt wird.
Die Lösung $x(t)$ ist genau dann beschränkt, wenn der Anfangswert x_0 in dem Unterraum liegt, der von verallgemeinerten Eigenräumen zu Eigenwerten λ mit $Re(\lambda) < 0$ und echten Eigenräumen zu Eigenwerten λ mit $Re(\lambda) = 0$ aufgespannt wird.

Ein lineares System heisst stabil, wenn alle Lösungen beschränkt bleiben, und asymptotisch stabil, wenn alle Lösungen für $t \to \infty$ gegen $(0, \ldots, 0)$ konvergieren.

Korollar

Ein lineares System ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte negative Realteil haben. Es ist genau dann stabil, wenn alle Eigenwerte nichtpositiven Realteil haben und für die Eigenwerte mit Realteil 0 *algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen.*
Im asymptotisch stabilen Fall gibt es zu jedem

$$\alpha < min\{-Re(\lambda_1), \ldots, -Re(\lambda_r)\}$$

eine Konstante $C = C(\alpha)$ *mit*

$$\| exp(tA) \| \leq Ce^{-t\alpha}$$

für alle $t \geq 0$

Beispiel: die Pendelgleichung

Die Pendelgleichung hat die Form $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$. Mit $x_1 = x, x_2 = x'$ entspricht sie der linearen Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind $\pm\omega i$, beide Eigenwerte haben Realteil 0.
Für $\omega \neq 0$ erhalten wir die Lösung

$$x(t) = \cos(\omega t)x(0) + \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)x'(0)$$

$$x'(t) = -\omega\sin(\omega t)x(0) + \cos(\omega t)x'(0).$$

Für $\omega = 0$ haben wir 0 als zweifachen Eigenwert, dessen Jordan-Block Grösse 2 hat. Die Lösung ist

$$x(t) = x(0) + tx'(0).$$

Beispiel: das gedämpfte Pendel I

Diese Gleichung hat die Form $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - kx'$. Mit $x_1 = x, x_2 = x'$ entspricht sie der linearen Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte der Matrix sind

$$-\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - \omega^2}.$$

Beispiel: das gedämpfte Pendel II

Für $k > 2\omega$ hat man zwei unterschiedliche reelle Eigenwerte und die Lösungen sind von der Form

$$(x(t), x'(t)) = Ae^{t\lambda_1}v_1 + Be^{t\lambda_2}v_2$$

mit $(x(0), x'(0)) = Av_1 + Bv_2$.
Für $k = 2\omega$ ist $-\omega$ ein zweifacher Eigenwert und die Lösungen sind von der Form $A(e^{-t\omega}v_1 + te^{-t\omega}v_2) + Be^{-t\omega}v_2$.
Für $0 < k < 2\omega$ hat man nicht-reelle Eigenwerte $\lambda_{1,2} = a \pm bi$ und die Lösungen sind von der Form

$$(x(t), x'(t)) = P(Ae^{ta}\cos(tb) + Be^{ta}\sin(tb))v_1 + (Be^{ta}\cos(tb) - Ae^{ta}\sin(tb$$

Sei (a, b) ein offenes Intervall mit $0 \in (a, b)$ und $A(t)$ eine Familie von $t \in (a, b)$ abhängender linearer Abbildungen $A(t)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Dann hat das Anfangswertproblem $x' = A(t)x(t), x(0) = x_0$ eine auf (a, b) definierte und durch x_0 eindeutig festgelegte Lösung. Die Lösungen von $x' = A(t)x(t)$ bilden also einen Vektorraum, der mittels $x \to x(0)$ zum $\mathbb{R}^n$ isomorph ist. Eine Basis dieses Vektorraums wird als Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems bezeichnet, ihre Elemente als Fundamentallösungen $\phi_1 \ldots, \phi_n$. Die Determinante eines Fundamentalsystems bezeichnet man als Wronski-Determinante $W(t)$.

Liouvillesche Formel

Lemma

Für alle $t \in (a,b)$ ist $W(t) \neq 0$.

Beweis: Sei $W(t) = 0$. Dann gibt es Konstanten mit $C_1\phi_1(t) + \ldots + C_n\phi_n(t) = 0$. Aus dem Eindeutigkeitssatz folgt $C_1\phi_1 + \ldots + C_n\phi_n \equiv 0$, womit es sich nicht um eine Basis des Lösungsraums handeln kann.

Satz

Für alle $t \in (a,b)$ ist

$$W(t) = W(0)e^{\int_0^t Spur(A(s))ds}.$$

Beweis: Aus dem Laplaceschen Entwicklungssatz und der daraus folgenden Formel für die Ableitung einer Determinante erhält man die Differentialgleichung $\frac{dW}{dt} = Spur(A(t))W(t)$.

Homogene Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten

Für stetige Funktionen $a_1, \ldots, a_k \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ betrachten wir die Differentialgleichung k-ter Ordnung

$$\frac{d^k x}{dt^k} + a_1(t)\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}} + \ldots + a_{k-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_k(t)x = 0.$$

Durch die Substitutionen $y_i = \frac{d^i x}{dt^i}$ wird sie in das lineare Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & -a_{k-2} & \ldots & -a_1 \end{pmatrix}$$

überführt. Der Lösungsraum ist ein Vektorraum, der mittels $x \to (x(0), \frac{dx}{dt}(0), \ldots, \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}(0))$ zum $\mathbb{R}^k$ isomorph ist.

Prinzipallösung

Als Prinzipallösung $\phi_j(t, t_0)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d^k x}{dt^k} + a_1(t)\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}} + \ldots + a_{k-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_k(t)x = 0.$$

bezeichnen wir die Lösung mit Anfangsbedingungen $\frac{d^j x}{dt^j}(t_0) = 1$ und $\frac{d^l x}{dt^l}(t_0) = 0$ für alle $l \neq j$. Als Prinzipalmatrixlösung $\Pi(t, t_0)$ bezeichnen wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} \phi_1(t, t_0) & \ldots & \phi_k(t, t_0) \\ \ldots & & \ldots \\ \phi_1^{(k-1)}(t, t_0) & \ldots & \phi_k^{(k-1)}(t, t_0) \end{pmatrix}.$$

Wronski-Determinante einer Differentialgleichung k-ter Ordnung

k Lösungen $x_1, \ldots, x_k$ einer Differentialgleichung k-ter Ordnung bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn die Determinante der Wronski-Matrix

$$W(t) = det \begin{pmatrix} x_1(t) & \ldots & x_k(t) \\ \ldots & & \ldots \\ \frac{d^{k-1}x_1}{dt^{k-1}} & \ldots & \frac{d^{k-1}x_k}{dt^{k-1}} \end{pmatrix}$$

in keinem Punkt Null ist.
Die Wronski-Determinante eines Fundamentalsystems läßt sich wegen $Spur(A) = -a_1$ berechnen durch $W(t) = W(0)e^{-\int_0^t a_1(s)ds}$.

Beispiel 1

Die auf $(0,\infty)$ definierte Differentialgleichung

$$x'' - \frac{1}{t}x' + \frac{1}{t^2}x = 0$$

hat die Lösungen

$$x_1(t) = t$$

$$x_2(t) = t\ln t.$$

Diese bilden ein Fundamentalsystem, denn

$$W(t) = det\begin{pmatrix} t & t\ln t \\ 1 & 1+\ln t \end{pmatrix} = t \neq 0.$$

Beispiel 2

Die auf $(0, \infty)$ definierte Differentialgleichung

$$x'' - \frac{2}{t}x' + (1 + \frac{2}{t^2})x = 0$$

hat die Lösungen

$$x_1(t) = t \cos t$$

$$x_2(t) = t \sin t.$$

Diese bilden ein Fundamentalsystem, denn

$$W(t) = det \begin{pmatrix} t \cos t & t \sin t \\ \cos t - t \sin t & \sin t + t \cos t \end{pmatrix} = t^2 \neq 0.$$

Die Differentialgleichung

$$x'' - \frac{2t}{1+t^2}x' + \frac{2}{1+t^2}x = 0$$

hat die Lösungen

$$x_1(t) = t$$

$$x_2(t) = t^2 - 1.$$

Diese bilden ein Fundamentalsystem, denn

$$W(t) = det \begin{pmatrix} t & t^2-1 \\ 1 & 2t \end{pmatrix} = t^2 + 1 \neq 0.$$

Beispiel 4: Hillsche Differentialgleichung

Die für eine gegebene Funktion $p(t)$ definierte Differentialgleichung $x'' + p(t)x = 0$ hat einen zweidimensionalen Lösungsraum. Wegen $a_1(t) \equiv 0$ ist $W(t)$ konstant. Für ein Fundamentalsystem $\{\phi, \psi\}$ muss also

$$\phi(t)\psi'(t) - \phi'(t)\psi(t) \equiv const$$

sein. Durch Variation der Konstanten erhält man

$$\psi(t) = \phi(t) \int_0^t \frac{const}{\phi^2(s)} ds + C.$$

Beispiel: Für $x'' - \frac{2x}{\cos^2 t}$ ist $\phi(t) = \tan t$ eine Lösung und man erhält eine von ϕ unabhängige Lösung als

$$\psi(t) = \tan t \int_0^t \frac{1}{\tan^2 s} ds = \tan t(-\cos t - t) = -1 - t \cdot \tan t.$$

Inhomogene Differentialgleichungen I

Für stetige Funktionen $a_1, \ldots, a_k, f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ betrachten wir die Differentialgleichung k-ter Ordnung

$$\frac{d^k x}{dt^k} + a_1(t)\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}} + \ldots + a_{k-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_k(t)x = f(t).$$

Für zwei Lösungen ϕ und ψ ist $x = \phi - \psi$ eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$\frac{d^k x}{dt^k} + a_1(t)\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}} + \ldots + a_{k-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_k(t)x = 0.$$

Wenn wir eine spezielle Lösung ϕ der inhomogenen Gleichung kennen, dann ergeben sich also alle anderen Lösungen als Summe aus ϕ und Linearkombinationen eines Fundamentalsystems $\phi_1, \ldots, \phi_k$ der homogenen Gleichung.

Inhomogene Differentialgleichungen II

Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, macht man den Ansatz

$$\phi(t) = C_1(t)\phi_1(t) + \ldots + C_k(t)\phi_k(t),$$

wobei $\{\phi_1(t), \ldots, \phi_k(t)\}$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung ist und die Funktionen $C_1(t), \ldots, C_k(t)$ zu bestimmen sind.
Die Ableitungen C_i' der $C_i(t)$ bestimmt man aus dem Gleichungssystem

$$C_1'\phi_1 + \ldots + C_k'\phi_k = 0$$

$$\ldots$$

$$C_1'\frac{d^{k-2}\phi_1}{dt^{k-2}} + \ldots + C_k'\frac{d^{k-2}\phi_k}{dt^{k-2}} = 0$$

$$C_1'\frac{d^{k-1}\phi_1}{dt^{k-1}} + \ldots + C_k'\frac{d^{k-1}\phi_k}{dt^{k-1}} = f$$

Die C_i erhält man durch Integrieren der C_i'.

Beispiel

Für die inhomogene Differentialgleichung

$$x'' + x = f$$

ist $\phi_1(t) = \cos t, \phi_2(t) = \sin t$ ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $x'' + x = 0$. Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, machen wir den Ansatz $x(t) = C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t$ und erhalten das Gleichungssystem

$$C_1' \cos t + C_2' \sin t = 0$$

$$-C_1' \sin t + C_2' \cos t = f$$

mit den Lösungen $C_1' = -f \sin t, C_2' = f \cos t$.
Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$x(t) = (D_1 - \int_0^t f(s) \sin s ds) \cos t + (D_2 + \int_0^t f(s) \cos s ds) \sin t.$$

Ansätze für spezielle Lösungen

Es gibt einige "direkte" Ansätze für die Suche nach einer speziellen Lösung einer inhomogenen Gleichung. Diese Ansätze wählt na je nach Beschaffenheit der "Störfunktion" $f(t)$ in der Differentialgleichung $x^{(k)}(t) + \ldots + a_k x(t) = f(t)$.
Wenn $f(t) = e^{at}$ ist, setzt man $x(t) = Ae^{at}$ an.
Wenn $f(t) = \cos(bt)$ oder $f(t) = \sin(bt)$ ist, setzt man $x(t) = A\cos(bt) + B\sin(bt)$ an.
Wenn $f(t)$ ein Polynom ist, setzt man für $x(t)$ ein Polynom vom selben Grad an.
Wenn $f(t)$ ein Summe oder ein Produkt aus obigem ist, setzt man für $x(t)$ ebenfalls Summe oder Produkt der obigen an.

$$x' + x = \sin(t)$$

Die homogene Gleichung $y' + y = 0$ hat die Fundamentallösung e^{-t}.
Als spezielle Lösung setzt man

$$x(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$$

an. Mit $x' = -A\cos(t) + B\sin(t)$ erhält man

$$x' + x = (A + B)\cos(t) + (B - A)\sin(t),$$

also sollte $A + B = 0, B - A = 1$ sein. Mit $A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}$ hat man eine spezielle Lösung. Die allgemeinen Lösungen sind also von der Form

$$x(t) = -\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) + Ce^{-t}.$$

Beispiel 2

$$x'' + 2x' + x = t + 1$$

Die homogene Gleichung $y'' + 2y' + y = 0$ hat die Fundamentallösungen e^{-t} und te^{-t}.
Als spezielle Lösung setzt man

$$x(t) = At + B$$

an. Mit $x' = A$ und $x'' = 0$ erhält man

$$x'' + 2x' + x = At + (2A + B),$$

also sollte $A = 1, 2A + B = 1$ sein. Mit $A = 1, B = -1$ hat man eine spezielle Lösung. Die allgemeinen Lösungen sind also von der Form

$$x(t) = t - 1 + C_1 e^{-t} + C_2 te^{-t}.$$

Beispiel 3

$$x'' + x = e^t$$

Die homogene Gleichung $y'' + y = 0$ hat die Fundamentallösungen $\cos(t)$ und $\sin(t)$.
Als spezielle Lösung setzt man

$$x(t) = Ae^t$$

an. Mit $x'' = Ae^t$ erhält man

$$x'' + x = 2Ae^t,$$

also sollte $2A = 1$ sein. Mit $A = \frac{1}{2}$ hat man eine spezielle Lösung.
Die allgemeinen Lösungen sind also von der Form

$$x(t) = \frac{1}{2}e^t + C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t).$$

Randwertprobleme

Wellengleichung I

Die Auslenkung $u(t,x)$ einer schwingenden Saite wird durch die partielle Differentialgleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)$$

beschrieben. Mit dem Ansatz

$$u(t,x)=w(t)y(x)$$

bekommt man

$$\frac{1}{c^2}\frac{w''(t)}{w(t)}=\frac{y''(x)}{y(x)}.$$

Wenn diese Gleichung für alle t, x gelten soll, müssen beide Seiten konstant sein. Wir setzen

$$\frac{1}{c^2} w''(t) = -\lambda w(t)$$
$$y''(x) = -\lambda y(x),$$

was die Lösungen

$$w(t) = c_1 \cos(c\sqrt{\lambda} t) + c_2 \sin(c\sqrt{\lambda} t)$$
$$y(x) = c_3 \cos(\sqrt{\lambda} x) + c_4 \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

hat. Mit den Randbedingungen

$$y(0) = y(1) = 0$$

muss $c_3 = 0$ und

$$\lambda = (\pi n)^2$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ sein. Man erhält die Lösungen

$$u(t, x) = (c_1 \cos(cn\pi t) + c_2 \sin(cn\pi t)) \sin(n\pi x).$$

Lemma

Wenn $c_{1,n}$ und $c_{2,n}$ Folgen mit $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|c_{i,n}| < \infty$ für $i = 1, 2$ sind, dann ist

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_{1,n}\cos(cn\pi t) + c_{2,n}\sin(cn\pi t))\sin(n\pi x)$$

eine Lösung der Wellengleichung mit $u(t,0) = u(t,1) = 0$.

Zahlreiche Probleme führen auf die Lösung eines "Eigenwertproblems"

$$Ly(x) = \lambda y(x)$$

mit Randbedingungen

$$\cos\alpha y(a) = \sin\alpha p(a)y'(a), \cos\beta y(b) = \sin\beta p(b)y'(b)$$

für einen Operator der Form

$$L = \frac{1}{r(x)}\left(-\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx} + q(x)\right).$$

Man will zeigen, dass es (für feste $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) eine abzählbare Menge von Eigenwerten λ_n (mit den gegebenen Randbedingungen) gibt und dass die zugehörigen Eigenfunktionen u_n ein "vollständiges System" bilden, d.h. gutartige Funktionen $u(x)$ können als $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x)$ zerlegt werden.

Wir betrachten einen (unendlich-dimensionalen) komplexen Vektorraum H mit einem Skalarprodukt. Für eine Menge orthonormaler Vektoren $u_0, \ldots, u_n \in H$ kann man jedes $f \in H$ schreiben als $f = f_{\|} + f_{\perp}$ mit $f_{\|} = \sum_{j=0}^{n} \langle u_j, f \rangle u_j$. Dann ist $\langle u_j, f_{\perp} \rangle = 0$ für alle j und $\langle f_{\|}, f_{\perp} \rangle = 0$. Insbesondere ist

$$\|f\|^2 = \sum_{j=0}^{n} |\langle u_j, f \rangle|^2 + \|f_{\perp}\|^2.$$

Für jedes $\hat{f}$ im Aufspann der u_j ist $\|f - \hat{f}\| \geq \|f_{\perp}\|$ mit Gleichheit nur für $f = f_{\|}$. Es ist also $f_{\|}$ der eindeutige Vektor im Aufspann der u_j mit dem kleinsten Abstand zu f.

Insbesondere erhält man die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{j=0}^{n} |\langle u_j, f\rangle|^2 \leq \|f\|^2,$$

mit Gleichheit nur falls f im Aufspann der u_j liegt.
Man nennt eine (evtl. abzählbar unendliche) Menge orthonormaler Vektoren eine orthonormale Basis, wenn

$$\|f\| = \sum_j \langle u_j, f\rangle u_j$$

für alle $f \in H$ gilt.

Eine linearer Operator ist eine auf einem Untervektorraum $D(A) \subset H$ definierte lineare Abbildung

$$A \colon D(A) \to H.$$

Der Operator heisst symmetrisch, wenn $D(A)$ dicht in H liegt und

$$\langle g, Af \rangle = \langle Ag, f \rangle$$

für alle $f, g \in D(A)$ gilt.
Eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ heisst Eigenwert von A, wenn es einen Eigenvektor $u \in D(A)$ mit $u \neq 0$ gibt, für den

$$Au = zu$$

gilt.

Satz

Für einen symmetrischen Operator sind alle Eigenwerte reell und Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.

Begriffe aus der Funktionalanalysis IV

Ein beschränkter Operator A ist ein linearer Operator mit

$$\|A\| := \sup_{\|f\|=1} \|Af\| < \infty.$$

Ein linearer Operator A heisst kompakt, wenn es für jede beschränkte Folge $f_n \in D(A)$ die Folge Af_n eine konvergente Teilfolge enthält.
Jeder kompakte Operator ist beschränkt. Die Verknüpfung eines beschränkten mit einem kompakten Operator ist kompakt.
Für einen beschränkten Operator A ist der Betrag jeden Eigenwertes höchstens $\|A\|$.

Satz

Ein kompakter Operator A hat einen Eigenwert α_0 mit

$$|\alpha_0| = \|A\|.$$

Satz

Für einen kompakten, symmetrischen Operator $A\colon H \to H$ *gibt es eine Folge reeller Eigenwerte* $\alpha_j \to 0$, *deren zugehörige Eigenvektoren* u_j *eine orthonormale Menge bilden, so dass jedes* $f \in Bild(A)$ *als*

$$f = \sum_j \langle u_j, f \rangle u_j$$

zerlegt werden kann. Wenn $Bild(A)$ *dicht in* H *liegt, dann bilden die Eigenvektoren eine orthonormale Basis.*

Auf $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$ betrachten wir die DGL $-(p(t)x')' + (q(t) - zr(t))x = 0$ mit $z \in C$. Diese ist mit $w(t) = p(t)x'(t)$ äquivalent zum System

$$x' = \frac{1}{p(t)} w$$

$$w' = (q(t) - zr(t))x,$$

welches für auf (a, b) stetige Funktionen $\frac{1}{p(t)}, q(t), r(t)$ eindeutige Lösungen hat.

Gegeben sei eine Sturm-Liouville-Gleichung. Wir wählen für H den Vektorraum der stetigen Abbildungen $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ und als Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(t)} g(t) r(t) dt.$$

Wir betrachten den linearen Operator

$$(Lf)(t) = \frac{1}{r(t)}\left(-\frac{d}{dt} p(t) \frac{d}{dt} + q(t)\right) f(t),$$

der auf

$$D(L) = \left\{ f \in C^2([a,b], \mathbb{C}) \middle| \cos\alpha f(a) - \sin\alpha p(a) f'(a) = 0, \cos\beta f(b) - \text{si}\right.$$

definiert ist.
Für $\alpha = 0$ erhält man die Dirichlet-Randbedingung und für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ die Neumann-Randbedingung.

Lemma

$D(L)$ liegt dicht in H.

Lemma

Wenn f und g dieselben Randbedingungen erfüllen, dann ist $\langle g, Lf \rangle = \langle Lg, f \rangle$.

L ist also ein symmetrischer Operator.

L ist nicht beschränkt, erst recht nicht kompakt. Wir können den Spektralsatz also nicht auf L anwenden. Stattdessen wollen wir den Spektralsatz für das Inverse anwenden.

Sei $z \in \mathbb{C}$ kein Eigenwert von L, dann ist $L - z \cdot Id$ invertierbar. Wir können die inhomogene Gleichung $Lf - zf = g$ lösen und dabei die Konstanten so wählen, dass die Randbedingungen erfüllt sind. Seien u_a, u_b zwei solche Lösungen.
Mit der Green-Funktion

$$G(z,t,x) = \frac{1}{W(z)} \left\{ \begin{array}{ll} u_b(z,t)u_a(z,s) & t \geq s \\ u_b(z,s)u_a(z,t) & t \leq s \end{array} \right\}$$

definieren wir die Resolvente

$$R_L(z)g(t) = \int_a^b G(z,t,s)g(s)r(s)ds,$$

die nach Konstruktion $(L - zId)R_L(z)g = g$ und $R_L(z)(L - zId)f = f$ für alle $f \in D(L), g \in H$ erfüllt.

Lemma

$R_L(z)$ ist ein kompakter Operator und für $z \in \mathbb{R}$ ein symmetrischer Operator.

Sturm-Liouville-Gleichungen via Funktionalanalysis IV

Satz

Das Sturm-Liouville-Problem hat eine abzählbare Menge von Eigenwerten, die nur in ∞ einen Häufungspunkt haben. Die entsprechenden Eigenfunktionen bilden eine orthonormale Basis für H, d.h. jedes $f \in H$ kann als

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle u_n, f \rangle u_n$$

zerlegt werden. Für $f \in D(L)$ ist diese Reihe gleichmäßig konvergent.

Beispiel

Für

$$L = -\frac{d^2}{dx^2}$$

und

$$D(L) = \left\{ f \in C^2([0,1], \mathbb{C}) | f(0) = f(1) = 0 \right\}$$

hat man Eigenwerte $(\pi n)^2$ und Eigenfunktionen

$$u_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x).$$

Für $f \in D(L)$ erhält man gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihe.