Manuskript zur Vorlesung

Topologie

1. **Allgemeine Topologie**
2. **Homotopie**
3. **Geometrische Topologie**

Prof. Wolfgang Kühnel

Ausgearbeitet unter Mitwirkung von Dr. Marc–Oliver Otto

Institut für Geometrie und Topologie

Universität Stuttgart

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Allgemeine Topologie

Literatur zu diesem Kapitel:

– K.Jänich, *Topologie*, 5. Aufl. Springer 1996, Kap. 1 und 6
– K.P.Grotemeyer, *Topologie*, B.I. 1969
– M.A.Armstrong, *Basic Topology*, Springer 1983, Kap 2,3,4
– B.v.Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, Springer 1979
– L.Führer, *Topologie mit Anwendungen*, Vieweg 1977
– E.Ossa, *Topologie*, Vieweg 1992

1A Grundbegriffe

Die allgemeine (mengentheoretische) Topologie befasst sich mit dem Studium von solchen Strukturen auf Mengen, die es erlauben, über Umgebungen, Konvergenz, Stetigkeit etc. zu sprechen. Die heute übliche Definition ist die folgende:

1.1 Definition *(Topologie)*
Es sei X eine Menge mit Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$. Dann heißt ein Mengensystem $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Topologie auf X, wenn gilt:

(i) $\emptyset \in \mathcal{O}$ *und* $X \in \mathcal{O}$

(ii) $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Longrightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$ *(Stabilität gegen endliche Durchschnitte)*

(iii) $O_i \in \mathcal{O}$ *für alle* $i \in I \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$ *(Stabilität gegen beliebige Vereinigungen).*

Weitere Bezeichnungen:

Die Elemente von X heißen Punkte, die Elemente von $\mathcal{O}$ heißen offene Mengen. Die Komplemente von offenen Mengen in X heißen abgeschlossene Mengen.

Das Paar $(X, \mathcal{O})$ heißt auch ein topologischer Raum.

$U \subset X$ heißt Umgebung von $x \in X$, falls $x \in U$ und falls ein $O \in \mathcal{O}$ mit $x \in O \subset U$ existiert. Insbesondere ist jede offene Menge U eine Umgebung jedes ihrer Punkte, weil man einfach $O = U$ setzen kann.

$\mathcal{O}_1$ heißt feiner als $\mathcal{O}_2$ (bzw. $\mathcal{O}_2$ gröber als $\mathcal{O}_1$), falls $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$.

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen x, falls jede Umgebung U von x alle x_n bis auf endlich viele n enthält, d.h. wenn es ein ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n \in U$ für alle $n \geq N$ gilt.

Beispiele:

(i) $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$, die sogenannte indiskrete Topologie (jede Folge konvergiert gegen jeden Punkt),

(ii) $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$, die sogenannte diskrete Topologie.

Beachte: in $\mathcal{P}(X)$ ist jede Menge offen und abgeschlossen. Die diskrete Topologie ist von der diskreten Abstandsmetrik induziert:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

In dieser Topologie ist jede einelementige Menge $\{x\}$ offen für jeden Punkt x. Dies hat zur Folge, dass nur diejenigen Folgen (x_n) konvergieren, die von einem gewissen Index n an konstant sind.

(iii) Allgemeiner ist eine Abstandsmetrik auf einer Menge X eine Funktion $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

1. $d(x,y) \geq 0$
2. $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
3. $d(y,x) = d(x,y)$
4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ für alle $y \in X$

Das Paar (X, d) heißt dann ein metrischer Raum. Die der Metrik d zugeordnete induzierte Topologie auf X ist so erklärt, dass eine Menge offen genau dann ist, wenn sie mit jedem ihrer Punkte auch eine gewisse ε-Umgebung $U_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$ um diesen Punkt enthält. Speziell sind diese ε-Umgebungen selbst offene Mengen.

(iv) Klassischer Spezialfall: $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Abstandsfunktion und der davon induzierten Standardtopologie (d.h. offene Mengen im üblichen Sinne der Analysis). Die Konvergenz von Folgen ist dann die aus Analysis I bekannte. Im Folgenden soll $[0,1] \subset \mathbb{R}$ stets das Einheitsintervall in dieser Standardtopologie bezeichnen.

(v) Eine andere Topologie auf $X = \mathbb{R}$ ist wie folgt gegeben: „offene Mengen" sind Intervalle $[a, b) \subset \mathbb{R}$ sowie beliebige Vereinigungen davon. Damit ist zum Beispiel $(-\infty, 0) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [-n, 0)$ offen.

Konsequenz: Diese Topologie ist feiner als die Standardtopologie, weil $(a,b) = \bigcup\limits_{n} \big[a + \frac{1}{n}, b\big)$ gilt. Damit sind alle im üblichen Sinne offenen Intervalle auch offen in dieser Topologie. Man beachte: Die Folge $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in dieser Topologie, die Folge $(-1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert dagegen in dieser Topologie nicht. Das Intervall $[0,1)$ ist nämlich eine Umgebung des Punktes 0, die kein Folgenglied enthält. Hieran wird auch deutlich, dass immer weniger Folgen konvergieren, je feiner die Topologie ist.

(vi) $\mathcal{O} = \{O \subset X \mid X \setminus O \text{ ist endlich [oder abzählbar] }\} \cup \{\emptyset\}$

(vii) $X = \{a, b\}, \quad \mathcal{O} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$, dabei ist $\{a\}$ offen und $\{b\}$ abgeschlossen.

1.2 Definition *(Stetigkeit)*
$f : (X_1, \mathcal{O}_1) \longmapsto (X_2, \mathcal{O}_2)$ heißt stetig, falls das Urbild jeder offenen Menge wieder offen ist.
Eine äquivalente Formulierung ist: f stetig in $x \Leftrightarrow$ zu jedem $y = f(x) \in X_2$ und jeder Umgebung V von y gibt es eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$.

Beispiele:

(i) Falls $\mathcal{O}_1$ die diskrete Topologie ist oder falls $\mathcal{O}_2$ die indiskrete Topologie ist, so ist jedes $f : (X, \mathcal{O}_1) \longmapsto (Y, \mathcal{O}_2)$ stetig.

(ii) Die Identität $Id : (X, \mathcal{O}_1) \longmapsto (X, \mathcal{O}_2)$ ist stetig genau dann, wenn $\mathcal{O}_1$ feiner als $\mathcal{O}_2$ ist. Speziell ist die Identität $Id : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwischen den Räumen (iv) und (v) oben stetig nur in einer Richtung.

(iii) Für reelle Funktionen in der Standard-Topologie ist die Stetigkeit äquivalent zu der aus Analysis I bekannten (z.B. nach dem $\varepsilon - \delta-$Kriterium).

1.3 Lemma *Die Komposition stetiger Abbildungen ist wieder stetig.*

Dies ist offensichtlich wegen $(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}\big(g^{-1}(O)\big)$.

1.4 Definition *(Homöomorphismus)*
f heißt Homöomorphismus oder topologische Abbildung, falls f bijektiv ist und f und f^{-1} stetig sind.

Äquivalent dazu: Ein stetiges $f : X \longrightarrow Y$ heißt Homöomorphismus, falls ein stetiges g existiert mit $f \circ g = id_Y$ und $g \circ f = id_X$.

X und Y heißen homöomorph zueinander, geschrieben $X \cong Y$, wenn ein solcher Homöomorphismus existiert.

Beispiel: Die Räume $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ und $B = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sind homöomorph zueinander, wenn A die Unterraumtopologie trägt (s. 1.5 unten) und B diejenige Topologie, bei der die im üblichen Sinne offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ ergänzt werden um alle Mengen vom Typ $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \setminus [a,b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und alle weiteren Mengen, die durch die Definition 1.1 erzwungen werden (Durchschnitte und Vereinigungen). Ein Homöomorphismus wird z.B. durch die stereographische Projektion definiert. Dieses Beispiel zeigt, dass Homöomorphie auch etwas versteckt auftreten kann und nicht offensichtlich sein muss.

Bemerkung: Wichtig in der Topologie sind besonders jene Eigenschaften, die unter Homöomorphismen erhalten bleiben. Das bedeutet, dass die Eigenschaft, wenn sie für X gilt, sich auf jeden zu X homöomorphen Raum überträgt. Man nennt solche Eigenschaften (bzw. von der Topologie abgeleitete Größen) deshalb auch topologische Invarianten. Das kann etwa eine Eigenschaft wie Kompaktheit sein, das können auch gewisse algebraische Objekte oder einfach charakteristische Zahlen sein, die man solchen topologischen Räumen zuordnen kann.

1B Initiale und finale Topologie

Wenn nur einer der beteiligten Räume mit einer Topologie versehen ist und der andere nicht, dann kann die Stetigkeit jeder gegebenen Abbildung auf eine bestimmte Art erzwungen werden. Das geht wie folgt:

a) Sei $f : X \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ gegeben, dann existiert eine gröbste Topologie $\mathcal{O}_f^I$ auf X, so dass f stetig wird. Sie heißt die initiale Topologie bzgl. f.
Setze $\mathcal{O}_f^I = \{f^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{O}_Y\}$.

b) Sei $f : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow Y$. Dann existiert eine feinste Topologie $\mathcal{O}_f^F$ auf Y, so dass f stetig wird. Sie heißt die finale Topologie bzgl. f.
Setze $\mathcal{O}_f^F = \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X\}$

Die analoge Definition ergibt sich, falls nicht eine einzige Abbildung f gegeben ist, sondern eine Familie $(f_i)_{i\in I}$. Beispiele sind das topologische Produkt in 1.12 sowie die topologische Summe in 1.14. Der meistgebrauchte Spezialfall ist der folgende:

1.5 Definition *$A \subset X$ sei gegeben, $\mathcal{O}$ sei eine Topologie auf X und $i : A \longrightarrow X$ sei die Inklusionsabbildung. Dann heißt die initiale Topologie bzgl. i die Spurtopologie oder Unterraumtopologie von A bzgl. $\mathcal{O}$. Man spricht gelegentlich auch von der induzierten Topologie oder der Relativtopologie. Diese ist gleich*

$$\mathcal{O}_A = \{i^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{O}\} = \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}\}.$$

Weiter sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $\pi : X \longrightarrow X/_\sim$ die natürliche Projektion, welche jedem x die Äquivalenzklasse $[x]$ zuordnet.
Dann heißt die finale Topologie bzgl. π die Quotiententopologie bezüglich $\sim$. Eine Menge von Äquivalenzklassen in $X/_\sim$ ist offen in der Quotiententopologie genau dann, wenn die Vereinigung aller dieser Äquivalenzklassen als Teilmenge von X offen in X ist.

Beispiele:

a) $A = [0, 1], X = \mathbb{R}$ mit der Standardtopologie auf X. Dann sind die offenen Mengen in der Unterraumtopologie gerade die Mengen $[0, a), (a, 1], (a, b)$ mit $0 < a < b < 1$ sowie Vereinigungen davon. Man beachte: $[0, \frac{1}{2}) = [0, 1] \cap (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, wobei ja $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ offen in $\mathbb{R}$ ist.

b) $f : X \longrightarrow Y$ sei surjektiv mit induzierter Äquivalenzrelation $x_1 \sim x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Dann definiert die Zuordnung $f(x) \longleftrightarrow [x]$ eine natürliche Bijektion zwischen Y und $X/_\sim$. Unter gewissen Voraussetzungen ist dann Y sogar homöomorph zum Quotientenraum mit der Quotiententopologie, z.B. wenn f stets offene Mengen in offene Mengen (oder abgeschlossene in abgeschlossene) überführt.

c) $X = \mathbb{R}^n, \quad x \sim y \Longleftrightarrow (x - y) \in \mathbb{Z}^n$, der Quotientenraum $X/_\sim$ heißt n-dimensionaler Torus. Als Punktmenge kann man diesen auch als Quotient zweier abelscher Gruppen $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ deuten. Die Topologie kann man in diesem Fall auch so beschreiben, dass eine Basis von ε-Umgebungen mit $\varepsilon < \frac{1}{2}$ unter der Projektions-Abbildung unverändert in ebensolche übergehen, weil innerhalb solcher Umgebungen nichts identifiziert wird. Insbesondere überführt die Projektionsabbildung offene Mengen in offene Mengen.

d) $X = S^n$ (n-Sphäre im $\mathbb{R}^{n+1}$) mit $x \sim y \Longleftrightarrow [y = x$ oder $x = -y]$.
Es werden also gerade die Antipoden-Paare von Punkten identifiziert. Der Quotient $X/_\sim$ heißt <u>n-dimensionaler projektiver Raum $\mathbb{R}P^n$</u>. Jeder Punkt entspricht dabei einer Geraden durch den Ursprung im $\mathbb{R}^{n+1}$ (so wird das in der klassischen projektiven Geometrie behandelt), und auch hier überführt die Projektionsabbildung die "kleinen" ε-Umgebungen ohne Identifikation in den Quotienten, weil sie nie Paare von Antipoden enthalten. Daher überführt die Projektionsabbildung $S^n \to \mathbb{R}P^n$ offene Mengen in offene Mengen.

In der obigen Definition von Unterraum- und Quotiententopologie wird eine gegebene Menge nach einem bestimmten Verfahren topologisiert, ohne dass eine Topologie am Anfang gegeben war. Solch eine Erzeugung von Topologien kann auch ohne Abbildungen erfolgen, einfach durch Angabe eines Minimalsystems von Mengen, die in jedem Fall offen sein sollen. Dies führt zum Begriff einer Basis bzw. Subbasis.

1.6 Definition *(Basis)*
$\mathcal{O}$ sei eine Topologie auf X. Ein Mengensystem $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ heißt <u>eine Basis von $\mathcal{O}$</u>, falls sich jede offene Menge als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ darstellen lässt.

Ein Mengensystem $\mathcal{S}$ heißt eine <u>Subbasis von $\mathcal{O}$</u>, wenn das System aller endlichen Durchschnitte von Elementen aus $\mathcal{S}$ eine Basis von $\mathcal{O}$ ist.

1.7 Folgerung *Jedes Mengensystem $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ ist eine Subbasis einer gewissen Topologie $\mathcal{O}$ auf X. Diese wird aus $\mathcal{S}$ gebildet durch das System aller endlichen Durchschnitte und dann daraus durch das System aller Vereinigungen.*

Zum Beweis: Formal gilt $\emptyset = \bigcup\limits_{S \in \emptyset} S$ (leere Vereinigung) sowie $X = \bigcap\limits_{S \in \emptyset} S$ (leerer Durchschnitt). Also gilt $\emptyset, X \in \mathcal{O}$. Die Axiome (ii) und (iii) in 1.1 sind leicht verifiziert.

Bemerkung: Wegen der bekannten Rechenregeln $f^{-1}(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f^{-1}(A_i)$ und $f^{-1}(\bigcap_i A_i) = \bigcap_i f^{-1}(A_i)$ genügt es für die Stetigkeit von f, dass $f^{-1}(O)$ offen ist für jedes O in einer Subbasis der Topologie.

Beispiele:

a) Das System $\mathcal{S} = \{(-\infty, b) \mid b \in \mathbb{Q}\} \cup \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{Q}\}$ ist eine Subbasis der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ (beachte: dieses System ist abzählbar).

b) Das System aller ε-Umgebungen $U_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ mit $x \in X$ und $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ in einem metrischen Raum (X, d) bildet eine Basis der von der Metrik d induzierten Topologie auf X.

c) Das System $\{\{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid |f(x) - f_0(x)| < \varepsilon\} \mid f_0 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$ ist eine Subbasis der Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathit{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Die offenen und die abgeschlossenen Mengen sind in einer Topologie ja besonders ausgezeichnet. Jeder sonstigen Menge kann man nun eine offene und eine abgeschlossene Menge zuordnen im Sinne eines Kernoperators bzw. eines Hüllenoperators.

1.8 Definition *(innerer Punkt, offener Kern, abgeschlossene Hülle, Rand)*
$\mathcal{O}$ sei eine Topologie auf X, und $Z \subset X$ sei eine Teilmenge von X.

1) $x \in Z$ heißt innerer Punkt von Z, wenn es eine offene Umgebung U gibt mit $x \in U \subset Z$.

2) $x \in X$ heißt Berührpunkt von Z, falls für jede Umgebung U von x gilt: $U \cap Z \neq \emptyset$.

Die Menge aller inneren Punkte Z° von Z heißt offener Kern, die Menge aller Berührpunkte $\overline{Z}$ von Z heißt abgeschlossene Hülle.

$\partial Z := \overline{Z} \setminus Z^\circ$ heißt Rand von Z, und $Z \subset X$ heißt dicht in X, falls $\overline{Z} = X$.

Beispiel: $\mathbb{Q}$ ist dicht als Teilmenge von $\mathbb{R}$ (mit der Standardtopologie).

1.9 Lemma *1. Z° ist die größte offene Menge, die in Z enthalten ist.*

2. $\overline{Z}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die Z enthält.

3. $Z = Z^\circ \iff Z$ ist offen.

4. $Z = \overline{Z} \iff Z$ ist abgeschlossen.

5. $(Z^\circ)^\circ = Z^\circ$, $\overline{\overline{Z}} = \overline{Z}$.

6. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
Die Zuordnung $Z \longmapsto \overline{Z}$ wird deshalb auch als Hüllenoperator bezeichnet.

Beispiele:

1) Es sei $X = \{a, b\}$, $\mathcal{O} = \{\emptyset,\ \{a\},\ \{a, b\}\}$. Dann ergibt sich als offener Kern bzw. abgeschlossene Hülle jeweils folgendes:

$$\{a\}^\circ = \{a\}, \quad \overline{\{a\}} = X, \quad \{b\}^\circ = \emptyset, \quad \overline{\{b\}} = \{b\}.$$

2) Im $\mathbb{R}^2$ mit der Standardtopologie betrachten wir die Menge

$$A = \{x \mid ||x|| < 1\} \cup \{x \mid ||x|| = 1,\ x_1 > 0\} \setminus \{\left(\tfrac{1}{n}, 0\right) \big| n \in \mathbb{N}\}.$$

Es wird dann

$$\overline{A} = \{x \mid ||x|| \leq 1\}, \quad A^\circ = \{x \mid ||x|| < 1\} \setminus \{\left(\tfrac{1}{m}, 0\right) \mid m \in \mathbb{N}\} \setminus \{(0,0)\}$$

3) Der Rand einer offenen Kreisscheibe im $\mathbb{R}^2$ ist offenbar gerade die Kreislinie, in Übereinstimmung mit unserer Anschauung. Aber der Rand der Teilmenge $\mathbb{Q}$ von $\mathbb{R}$ ist ganz $\mathbb{R}$ selbst wegen $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$.

Anmerkung: Der Hüllenoperator $Z \longmapsto \overline{Z}$ selbst kann zur Definition einer Topologie verwendet werden. Die Kuratowski-Axiome

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
2. $A \subset \overline{A}$
3. $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$
4. $\overline{\emptyset} = \emptyset$

für den Hüllenoperator beschreiben eine äquivalente Umformulierung von Definition 1.1, wenn man eine Menge A als abgeschlossen definiert (und entsprechend $X \setminus A$ als offen), wenn $\overline{A} = A$ gilt (Übung).

Um *Konvergenz* im Rahmen der allgemeinen Topologie zu erklären, sollte man auf die Verwendung von Folgen verzichten, weil dies immer eine gewisse Abzählbarkeit voraussetzt, jedenfalls lokal (vgl. unten die Abzählbarkeitsaxome). Stattdessen benutzt man ein Mengensystem, das sich gewissermaßen auf den Limespunkt (oder auch mehrere Limespunkte) zusammenzieht wie ein Filter, der bestimmte Bestandteile durchläßt und andere wegfiltert. Daher die folgende Definition.

1.10 Definition *(Filter, Umgebungsfilter)*
Ein Mengensystem $\mathcal{F}$ auf einer Menge M heißt ein Filter, wenn gilt:

1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$
2) $\emptyset \notin \mathcal{F}$
3) $U_1, U_2 \in \mathcal{F}$ *impliziert* $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{F}$
4) $U \in \mathcal{F}$ *und* $U \subset V \subset M$ *impliziert* $V \in \mathcal{F}$.

Für eine Filterbasis verlangt man statt 3) und 4) die schwächere Eigenschaft:

Für $U_1, U_2 \in \mathcal{F}$ *gibt es stets ein* $V \in \mathcal{F}$ *mit* $V \subset U_1 \cap U_2$.

Eine Filterbasis erzeugt einen Filter durch Hinzunahme aller Obermengen.

Für einen gegebenen topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ und für einen gegebenen Punkt $x \in X$ ist das Mengensystem aller Umgebungen von x ein Filter. Er heißt der Umgebungsfilter von x in dieser Topologie.

Der Umgebungsfilter von x beschreibt das Phänomen der Konvergenz gegen x in dieser Topologie (ohne Verwendung von Folgen) mit der folgenden Definition:

1.11 Definition *(Filterkonvergenz)*
Ein Filter $\mathcal{F}$ konvergiert gegen einen Punkt $x \in X$, falls $\mathcal{F}$ feiner ist als der Umgebungsfilter, d.h. falls $\mathcal{F}$ jede Umgebung von x enthält.

Speziell konvergiert nach Definition der Umgebungsfilter von x selbst gegen x. Die aus der Analysis vertraute Konvergenz von Folgen ist als Spezialfall mit enthalten: Eine gegebene Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erzeugt ein Mengensystem

$$\mathcal{M} := \{\{x_n \mid n \geq m\} \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

$\mathcal{M}$ erfüllt die Bedingungen (1),(2),(3) aus Definition 1.10. Nimmt man alle Obermengen gemäß (4) hinzu, so erhält man einen Filter, den sogenannten Endstückfilter der Folge. Dann konvergiert die Folge genau dann gegen x, wenn der Endstückfilter gegen x konvergiert.

Beispiele:

1. In der diskreten Topologie besteht der Umgebungsfilter von x aus allen Obermengen von $\{x\}$ (das ist der sogenannte Punktfilter), in der indiskreten Topologie nur aus dem ganzen Raum X.

2. Für eine feste Teilmenge $A \subset X$ ist die Menge aller Obermengen von A ein Filter, der sogenannte Hauptfilter. Dieser konvergiert i.A. nicht.

3. Die Konvergenz muss nicht eindeutig sein, d.h. es kann vorkommen, dass ein Filter gegen zwei verschiedene Punkte konvergiert. Zum Beispiel konvergiert in der indiskreten Topologie jeder Filter gegen jeden Punkt des Raumes.

4. Das Mengensystem

$$\mathcal{F} := \{A \subset X \mid X \setminus A \text{ ist endlich [bzw. abzählbar] }\}$$

ist ein Filter, falls X unendlich [bzw. überabzählbar] ist. Ob er konvergiert, hängt von der Topologie ab.

1.12 Definition *(topologisches Produkt)*
$(X_i, \mathcal{O}_i)$ seien topologische Räume, $i \in I$. Das kartesische Produkt $X = \times_{i \in I} X_i$ kann mit der Produkttopologie $\mathcal{O}$ versehen werden. Diese ist erklärt als die gröbste Topologie derart, dass alle Projektionen $p_i : X \longrightarrow X_i$ stetig sind. Das heißt: $\mathcal{O}$ ist die initiale Topologie bzgl. der Familie aller $p_i,\ i \in I$.
Als Schreibweise verwendet man auch

$$(X, \mathcal{O}) = \prod_{i \in I} (X_i, \mathcal{O}_i)$$

und nennt dies das topologische Produkt der Räume $(X_i, \mathcal{O}_i)$. Eine Basis dieser Topologie besteht aus allen Mengen der Form

$$O = \times_{i \in I} O_i$$

mit $O_i = X_i$ für alle i bis auf endliche viele.

Zur Konstruktion der Produkttopologie: Wenn jedes p_i stetig sein soll, muss die Produkttopologie alle Mengen $p_i^{-1}(O_i)$ enthalten. Dies sind gerade die Mengen $X = \times_{j \in I} O_j$ mit $O_j = X_j$ für alle $j \neq i$. Diese Mengen bilden dann eine Subbasis, und endliche Durchschnitte davon bilden dann gerade die oben angegebene Basis.

Für endliches $I = \{1, \ldots, n\}$ ist eine Basis gegeben durch alle Mengen vom Typ

$$O_1 \times O_2 \times \ldots \times O_n \text{ mit beliebigen } O_i \in \mathcal{O}_i,$$

Für unendliches I ist dies nicht so: Im Allgemeinen ist $\mathsf{X}_{j\in I} O_j$ *nicht* offen, wenn nur alle $O_j \in X_j$ offen sind.

Beispiele:

(i) Die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$ ist das topologische Produkt $\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$, von n Faktoren, jeweils mit der Standardtopologie. Dies wird am besten sichtbar in der Maximums-Norm $||x|| = \max_i |x_i|$. Damit werden die ε-Umgebungen kartesische Produkte von ε-Intervallen in den n Komponenten.

(ii) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der auf den einzelnen Faktoren von Intervallen $[a, b)$ erzeugten Topologie liefert eine merkwürdige Topologie. Eine Basis ist durch Mengen vom Typ $[a, b) \times [c, d)$ gegeben.

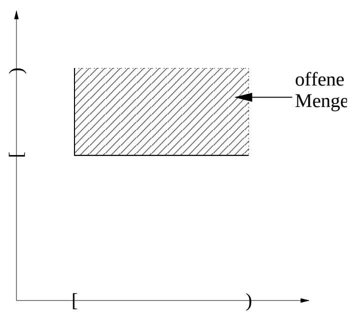


Abbildung 1.1: Produkttopologie auf $\mathbb{R}^2$, von $[a, b) \times [c, d)$ erzeugt

In dieser Topologie ist die Unterraumtopologie auf der Nebendiagonalen $\{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ diskret, weil der Durchschnitt von $[x, x+1) \times [-x, -x+1)$ mit der Nebendiagonalen nur aus $(x, -x)$ besteht. Man hat also einen überabzählbaren diskreten Unterraum. Damit ist jede Abbildung auf der Nebendiagonalen stetig, da auf diskreten topologischen Räumen jede Abbildung stetig ist. Es ist aber auch hier so, dass $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist. Dies hat zur Folge, dass nicht mehr jede auf der Nebendiagonalen stetige reelle Funktion stetig auf den ganzen Raum fortgesetzt werden kann (vgl. dazu den Satz von Tietze in 1.29).

(iii) Der Raum aller reellen Abbildungen $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathit{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ mit der Produkttopologie (und mit der Indexmenge $I := \mathbb{R}$) von Faktoren $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$, wobei $\mathcal{O}$ die Standardtopologie sei, ist homöomorph zu dem gleichen Raum, versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz

(Übung). Man kann dann jedes $f \in Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ identifizieren mit dem "Tupel" $(f(x))_{x\in\mathbb{R}}$.

1.13 Satz *(universelle Eigenschaft des topologischen Produkts)*
$(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ seien topologische Räume mit topologischem Produkt $(X, \mathcal{O}) = \prod_{i\in I}(X_i, \mathcal{O}_i)$, und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ sei ein beliebiger topologischer Raum. Dann gelten folgende Aussagen:

(i) Jede Familie $f_i\colon Y \to X_i$ von Abbildungen induziert eindeutig eine Abbildung $f\colon Y \to X$ mit $f_i = p_i \circ f$ und umgekehrt.

(ii) Jedes $p_i : X \longrightarrow X_i$ ist stetig, surjektiv und <u>offen</u>, d.h. p_i überführt offene Mengen in offene Mengen.

(iii) $f : Y \longrightarrow X$ ist genau dann stetig, wenn alle $f_i := p_i \circ f$ stetig sind.

Als kommutatives Diagramm haben wir:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p_i"] & Y \arrow[l, "f"'] \arrow[dl, "f_i"] \\ X_i & \end{tikzcd}$$

Dabei ist der Raum X mit seiner Topologie durch die Gültigkeit von (i), (ii), (iii) eindeutig bestimmt bis auf Homöomorphie. Dies ist gerade die universelle Eigenschaft.

Beweis:

(i) folgt, indem man $f(y) = (f_i(y))_{i\in I}$ setzt.

(ii) folgt leicht, weil die p_i nach Konstruktion in 1.12 stetig und surjektiv sind. Für die Subbasis-Elemente $p_i^{-1}(O_i)$ ist klar, dass $p_i(p_i^{-1}(O_i)) = O_i$ offen ist, also gilt dies auch für beliebige offene Mengen in $\mathcal{O}$. Damit ist die Abbildung p_i offen.

Zu (iii):

"$\Rightarrow$": Dies folgt einfach daraus, dass $f_i = p_i \circ f$ stetig ist als Komposition von stetigen Abbildungen.

"$\Leftarrow$": Jedes f_i sei stetig. $O \subset X$ sei eine offene Teilmenge von X. Es genügt, die Stetigkeit für den Fall zu testen, dass O ein beliebiges Element einer Subbasis, also von der Gestalt $O = p_i^{-1}(O_i)$ ist. Nun gilt $f^{-1}(O) = f^{-1}(p_i^{-1}(O_i)) = f_i^{-1}(O_i)$, und diese Menge ist offen in Y.

Daraus folgt die Stetigkeit von f.

□

1.14 Definition *(topologische Summe)*
Als finales Gegenstück zur Produkttopologie definiert man die Summentopologie von Räumen $(X_i, \mathcal{O}_i)$ als die finale Topologie $\mathcal{O}$ bezüglich der Familie aller Inklusionsabbildungen $j_i\colon X_i \to X$, wobei X als die disjunkte Vereinigung aller X_i erklärt ist. Man schreibt dafür auch

$$(X, \mathcal{O}) = \sum_{i \in I} (X_i, \mathcal{O}_i)$$

und spricht von der topologischen Summe der $(X_i, \mathcal{O}_i)$. Eine Menge O ist offen in der Summentopologie genau dann, wenn $j_i^{-1}(O) = O \cap X_i$ offen ist für alle $i \in I$.

Die Summentopologie ist weniger interessant als die Produkttopologie, weil einfach alle Teile disjunkt nebeneinander gesetzt werden, ohne eine wirkliche Beziehung oder einen Zusammenhang. Tatsächlich ist die topologische Summe nicht-leerer Räume stets unzusammenhängend im Sinne von Definition 1.16.

In Analogie zu 1.13 (entsprechender Satz über Produkte) gilt folgendes:

1.15 Satz *(universelle Eigenschaft der topologischen Summe)*
$(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ seien topologische Räume mit topologischer Summe $(X, \mathcal{O}) = \sum_{i \in I}(X_i, \mathcal{O}_i)$, und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ sei ein beliebiger topologischer Raum. Dann gelten folgende Aussagen:

(i) Jede Familie $f_i\colon X_i \to Y$ von Abbildungen induziert eindeutig eine Abbildung $f\colon X \to Y$ mit $f_i = f \circ j_i$ und umgekehrt.

(ii) Jedes $j_i : X_i \longrightarrow X$ ist stetig, injektiv und offen.

(iii) $f : X \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn alle $f_i := f \circ j_i$ stetig sind.

Als kommutatives Diagramm haben wir:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ X_i \arrow[u, "j_i"] \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

Dabei ist der Raum X mit seiner Topologie durch die Gültigkeit von (i), (ii), (iii) eindeutig bestimmt bis auf Homöomorphie. Dies ist gerade die universelle Eigenschaft.

Bemerkung: Man vergleiche diese Eigenschaft von topologischem Produkt und topologischer Summe mit dem algebraischen Produkt bzw. der algebraischen Summe von Vektorräumen. Es gelten dort exakte Analoga der Sätze 1.15 und 1.13 für lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen. Entsprechendes gilt auch für kartesische Produkte und freie Produkte von Gruppen, vgl. 3.8.

1C Zusammenhang

1.16 Definition *(Zusammenhang)*
Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt zusammenhängend, wenn X sich nicht als Vereinigung zweier disjunkter, nicht leerer Teilmengen A, B darstellen lässt, die beide in $\mathcal{O}$ offen und abgeschlossen sind. Die maximalen zusammenhängenden Unterräume heißen Zusammenhangskomponenten von $(X, \mathcal{O})$.

$(X, \mathcal{O})$ heißt wegzusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten x, y einen verbindenden stetigen Weg gibt, also eine stetige Abbildung $c : [0,1] \longrightarrow X$ mit $c(0) = x$ und $c(1) = y$. Die maximalen wegzusammenhängenden Unterräume heißen Weg–Komponenten von $(X, \mathcal{O})$.

Offenbar sind Zusammenhang und Wegzusammenhang topologische Invarianten. Das heißt, jeder zu einem (weg-)zusammenhängenden Raum homöomorphe Raum ist ebenfalls (weg-)zusammenhängend.

1.17 Lemma *(i) Jedes Intervall in $\mathbb{R}$ ist mit der Unterraumtopologie der Standardtopologie zusammenhängend und wegzusammenhängend.*

(ii) Falls $(X, \mathcal{O})$ wegzusammenhängend ist, ist $(X, \mathcal{O})$ auch zusammenhängend.

Beweis: (i) folgt aus grundlegenden Eigenschaften der reellen Zahlen. Keine echte nichtleere Teilmenge eines Intervalls kann sowohl offen wie abgeschlossen sein. Die kleinste obere Schranke (bzw. größte untere Schranke) einer solchen würde zu einem Widerspruch führen, vgl. die Dedekindschen Schnitte.
Zu (ii) seien A, B offene Mengen mit $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$. Es seien weiter $x \in A$ und $y \in B$ und $c : [0,1] \longrightarrow X$ stetig mit $c(0) = x$, $c(1) = y$. Dann sind wegen $c^{-1}(A \cap B) = c^{-1}(A) \cap c^{-1}(B)$ die Mengen $c^{-1}(A)$ und $c^{-1}(B)$ disjunkt

und offen und nicht leer im Widerspruch zu (i), beachte $c^{-1}(A) \cup c^{-1}(B) = c^{-1}(A \cup B) = [0,1]$. □

Bemerkung: Zusätzlich zu (i) gilt, dass jede zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit je zwei Elementen x, y auch das ganze Intervall $[x, y]$ enthält.

Die Umkehrung von (ii) gilt i.A. nicht:
Ein Gegenbeispiel ist die sogenannte "Sinuskurve des Topologen" (vgl. Abbildung 1.2), definiert als Vereinigung von A und B:

$$\begin{array}{rcll} A & = & \{(0,y) \mid -1 \leq y \leq 1\} & \subset \mathbb{R}^2 \\ B & = & \{(x, \ \sin \frac{1}{x}) \mid 0 < x \leq 1\} & \subset \mathbb{R}^2 \end{array}$$

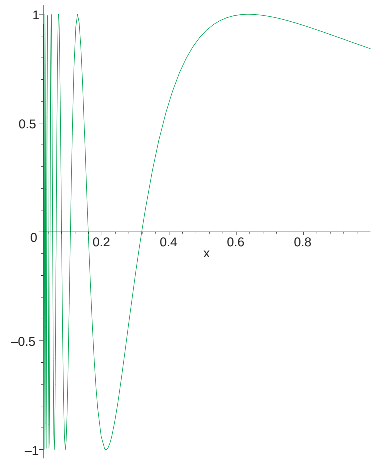


Abbildung 1.2: Sinuskurve des Topologen

$A \cup B$ ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend. Die Wegkomponenten sind gerade A und B selbst.

Ein anderes Beispiel:

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{r = 1 + e^{\varphi} \mid \varphi \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2 \\ B & = & \{r = 1\} \subset \mathbb{R}^2 \end{array}$$

jeweils in ebenen Polarkoordinaten (r, φ).
Wieder ist $A \cup B$ zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend. Der Grenzkreis B ist eine Wegkomponente. Solche Strukturen entstehen bei dynamischen Systemen bzw. bei Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen, man spricht dort tatsächlich von "Grenzkreisen".

Weitere Beispiele:

1. Das Intervall $(-1, +1)$ ist nicht zusammenhängend in der von Intervallen $[a, b)$ auf $\mathbb{R}$ erzeugten Topologie, weil es in die jeweils offenen und disjunkten Intervalle $(-1, 0) \cup [0, 1)$ zerlegbar ist.

2. Der Unterraum $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (mit der Standard-Unterraumtopologie) ist nicht zusammenhängend, weil zerlegbar in $\mathbb{Q} = \{x \mid x^2 < 2\} \cup \{x \mid x^2 > 2\}$.

3. Die topologische Summe zweier nicht–leerer topologischer Räume ist nicht zusammenhängend. Wenn die einzelnen Räume zusammenhängend sind, dann stimmen sie mit den Zusammenhangskomponenten der topologischen Summe überein.

1.18 Satz *Das stetige Bild eines (weg–)zusammenhängenden Raumes ist wieder (weg–)zusammenhängend.*

Beweis: für den Wegzusammenhang ist dies klar, weil ein stetiger Weg c in X vermöge $[0, 1] \xrightarrow{c} X \xrightarrow{f} Y$ einen stetigen Weg $f \circ c$ in Y induziert. Wenn also $f(x), f(y)$ in Y gegeben sind, dann verbinde man x und y in X durch einen stetigen Weg.
Für den Zusammenhang nehme man an, dass $Y = f(X)$ nicht zusammenhängend ist mit $Y = A \cup B, \quad A \cap B = \emptyset, \quad A, B$ offen, $A \neq \emptyset$. Dann ist analog $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ mit $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ und $f^{-1}(A) \neq \emptyset$. Somit ist X ebenfalls nicht zusammenhängend. $\square$

1.19 Folgerung *Es gilt der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in der Standardtopologie. Genauer: Eine stetige Funktion einer reellen Variablen $x \in [a, b]$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

Dagegen ist in der von Intervallen $[a, b)$ erzeugten Topologie auf $\mathbb{R}$ die Sprungfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

stetig, weil $f^{-1}(0)$ und $f^{-1}(1)$ beide offen und abgeschlossen sind. Der Zwischenwertsatz gilt hier also nicht.

1.20 Definition *(lokaler Zusammenhang)*
$(X, \mathcal{O})$ heißt lokal (weg–)zusammenhängend, wenn für jeden Punkt $x \in X$ jede offene Umgebung $U(x)$ eine (weg–)zusammenhängende Umgebung von x enthält.

Beispiele:

(i) Der Unterraum $(0,1) \cup (3,4) \subset \mathbb{R}$ ist lokal zusammenhängend, aber nicht zusammenhängend.

(ii) Die Vereinigung der Verbindungsstrecken des Punktes $(0,1) \in \mathbb{R}^2$ einerseits und $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ sowie allen Punkten $(\frac{1}{n}, 0) \in \mathbb{R}^2$, wobei $n \in \mathbb{N}$, andererseits ist (weg–)zusammenhängend, aber nicht lokal zusammenhängend, s. Abbildung 1.3.

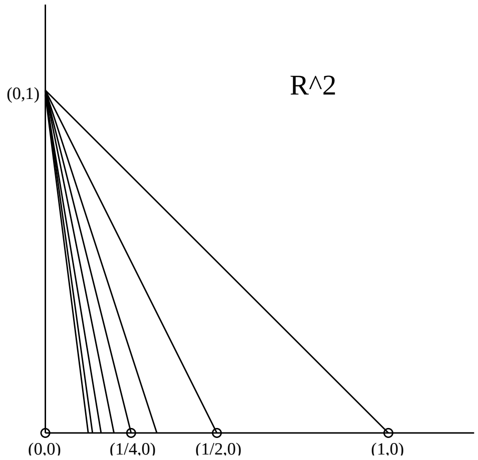


Abbildung 1.3: Beispiel eines zusammenhängenden, aber nicht lokal zusammenhängenden Raumes

1D Trennungsaxiome und Abzählbarkeitsaxiome

Motivation: Die Trennung von Punkten hängt eng mit der Eindeutigkeit der Konvergenz zusammen: Zwei Punkte mit disjunkten Umgebungen können nicht Grenzwert ein und desselben Filters (oder ein und derselben Folge) sein. Für je zwei reelle Zahlen $x \neq y$ gibt es stets eine stetige reelle Funktion f mit $f(x) = 0, f(y) = 1$. Man setze etwa $f(\xi) = \big((\xi - x)/(y - x)\big)^2$. Wenn eine stetige Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ gegeben ist und wenn $f(x) \neq f(y)$ gilt, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $\underbrace{(f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)}_{V_1} \cap \underbrace{(f(y)-\varepsilon, f(y)+\varepsilon)}_{V_2} = \emptyset$. Also sind $f^{-1}(V_1)$ und $f^{-1}(V_2)$ disjunkte offene Umgebungen von x und y.

Dies führt in natürlicher Weise zu den folgenden Fragen:

(1) Wann kann man zwei Punkte $x \neq y$ durch eine stetige reelle Funktion trennen (d.h. wann ist $f(x) \neq f(y)$ erreichbar) ?

(2) Wann kann man zwei Punkte durch disjunkte Umgebungen trennen?

1.21 Definition *(Trennungsaxiome)*
$(X, \mathcal{O})$ sei ein topologischer Raum. Die T_i–Axiome sind definiert durch die folgenden Trennungseigenschaften:

T_0–Axiom: Zu je zwei Punkten $x \neq y$ hat der eine eine Umgebung, in der der andere nicht liegt.

T_1–Axiom: Zu je zwei Punkten $x \neq y$ gibt es Umgebungen $U(x), U(y)$ mit $x \notin U(y)$ und $y \notin U(x)$.

T_2–Axiom: Zu je zwei Punkten $x \neq y$ gibt es disjunkte Umgebungen von x und y.

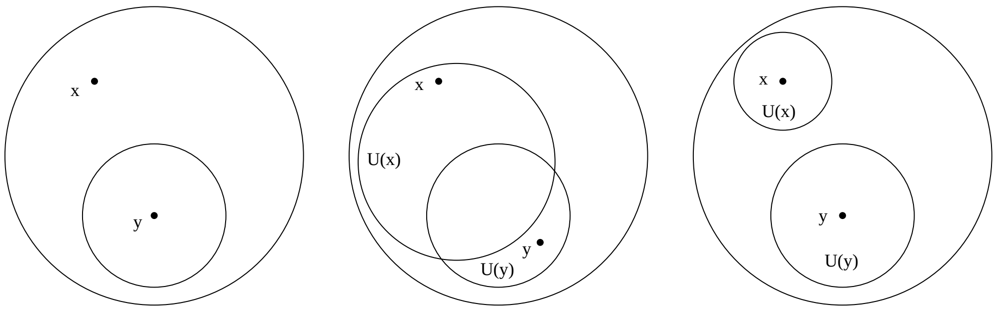


Abbildung 1.4: T_0, T_1, T_2-Axiom

T_3–Axiom: Zu jeder abgeschlossenen Menge A und jedem $x \notin A$, gibt es offene Mengen $U(A)$ und $U(x)$ mit $A \subset U(A),\ x \in U(x),\ U(x) \cap U(A) = \emptyset$.

T_4–Axiom: Zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen A, B, gibt es offene Mengen $U(A),\ U(B)$ mit $A \subset U(A),\ \ B \subset U(B),\ \ U(A) \cap U(B) = \emptyset$.

T_{3a}–Axiom: Zu jedem $x \in X$ und jeder offenen Umgebung $U(x)$ gibt es eine stetige Funktion $f : X \longrightarrow [0,1]$ mit $f(x) = 0$ und $f(y) = 1$ für alle $y \in X \setminus U(x)$.

$(X, \mathcal{O})$ heißt ein T_i–Raum, wenn das T_i–Axiom erfüllt ist.

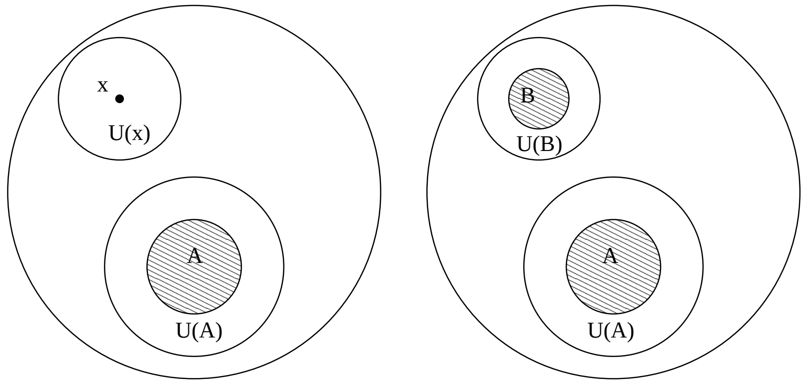


Abbildung 1.5: T_3, T_4-Axiom

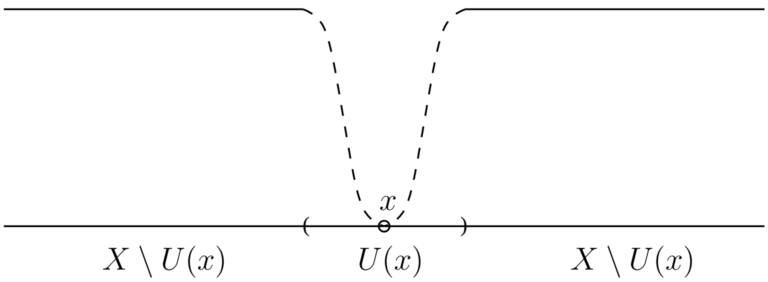


Abbildung 1.6: T_{3a}-Axiom

Ein T_2–Raum wird auch Hausdorff–Raum genannt nach F.Hausdorff (Hausdorffsches Trennungsaxiom).

Ein Raum X heißt regulär, falls X ein T_1–Raum und T_3–Raum ist.

Ein Raum X heißt vollständig regulär, falls X ein T_1–Raum und T_{3a}–Raum ist.

Ein Raum X heißt normal, falls X ein T_1–Raum und T_4– Raum ist.
Ein Unterraum eines normalen Raumes ist im Allgemeinen nicht wieder normal, wohl aber jeder abgeschlossene Unterraum. Diese Frage der Erblichkeit führt zu einer spezielleren Klasse von Räumen, die man als "vollständig normal" bezeichnet:
Ein Raum X heißt vollständig normal, (oder *normal-erblich*), falls X ein T_1–Raum ist und falls jeder Unterraum normal ist. Gelegentlich spricht man auch

von einem

T_5-Axiom: *Zu je zwei Mengen A und B mit $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ gibt es disjunkte offene Obermengen.* Siehe dazu OSSA, Kapitel 2.3.

Nach Definition sind alle Trennungsaxiome sowie die daraus abgeleiteten Eigenschaften wie "regulär" und "normal" topologische Invarianten.

1.22 Satz *Ein Raum ist ein T_1–Raum genau dann, wenn alle einelementigen Mengen abgeschlossen sind.*

1.23 Folgerung *normal $\Longrightarrow$ regulär $\Longrightarrow$ $T_2 \Longrightarrow T_1 \Longrightarrow T_0$.*

Bemerkung: Es gilt sogar: normal $\Longrightarrow$ vollständig regulär $\Longrightarrow$ regulär. Siehe dazu Folgerung 1.30 /nach dem Satz von Tietze).

Beweis: (von Satz 1.22)
„$\Longrightarrow$ ": $(X, \mathcal{O})$ sei T_1–Raum und $x \in X$.
Dann gibt es zu jedem $y \in X\backslash\{x\}$ eine offene Umgebung U_y von y mit $x \notin U_y$.
Folglich ist $X\backslash\{x\} = \bigcup_{y \in X\backslash\{x\}} U_y$ offen und $\{x\}$ damit abgeschlossen.
„$\Longleftarrow$ ": $\{x\}$ und $\{y\}$ seien abgeschlossen. Setze $U_x := X \backslash\{y\}$ und $U_y := X\backslash\{x\}$. Diese Mengen sind offen. Dann folgt $x \notin U_y$ und $y \notin U_x$. Da x, y beliebig waren, folgt das T_1–Axiom und damit die Behauptung. □

1.24 Satz $(X, \mathcal{O})$ *ist ein T_2–Raum genau dann, wenn die Konvergenz von Filtern eindeutig ist, d.h. wenn jeder konvergente Filter gegen genau einen Punkt konvergiert.*
Insbesondere ist in jedem T_2–Raum die Konvergenz von Folgen eindeutig.

Beweis: „$\Longrightarrow$ ": Ein gegen x und y konvergenter Filter muss die beiden Umgebungsfilter umfassen. Angenommen, der Filter $\mathcal{F}$ konvergiert gegen zwei verschiedene Punkte $x \neq y$. Wegen der T_2-Eigenschaft gibt es dann Umgebungen U_x, U_y mit $U_x \cap U_y = \emptyset$ im Widerspruch zur Definition des Filters.
„$\Longleftarrow$ ":
Wir nehmen an, dass das T_2-Axiom nicht erfüllt ist. Das heißt, ex gibt zwei Punkte $x \neq y$, so dass für alle Umgebungen U_x, U_y von x, y gilt $U_x \cap U_y \neq \emptyset$. DAs System aller dieser Umgebungen $U_x \cap U_y$ erzeugt einen Filter $\mathcal{F}$, der nach Konstruktion alle Umgebungen von x und alle Umgebungen von y enthält und damit sowohl gegen x wie gegen y konvergiert, Also ist die Konvergenz nicht eindeutig. □

1.25 Satz *(vom abgeschlossenen Graphen)*
$f: (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ sei stetig, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ sei ein T_2–Raum.
Dann ist der Graph von f

$$G := \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$$

abgeschlossen in der Produkttopologie $(X, \mathcal{O}_X) \times (Y, \mathcal{O}_Y)$.

Beweis: Es sei $(x, y) \notin G$, d.h. $y \neq f(x)$. Weil Y als T_2-Raum vorausgesetzt war, existieren disjunkte offene Umgebungen $U_y \cap U_{f(x)} = \emptyset$. Da f stetig ist, existiert eine Umgebung V_x von x mit $f(V_x) \subset U_{f(x)}$, also auch $U_y \cap f(V_x) = \emptyset$. Also ist $V_x \times U_y$ eine offene Umgebung von (x, y) in der Produkttopologie, die G nicht trifft. Damit ist das Komplement $(X \times Y) \backslash G$ offen und folglich G abgeschlossen im Produkt. $\square$

In analoger Weise folgt der folgende Satz:

1.26 Satz *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ ist ein T_2-Raum genau dann, wenn die Diagonale $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ eine abgeschlossene Teilmenge in der Produkttopologie ist.*

Aus dem $\mathbb{R}^n$ sind wir es gewohnt, dass man jederzeit von offenen zu abgeschlossenen Umgebungen übergehen kann, weil sie ineinander geschachtelt sind. Das ist im Allgemeinen nicht so, wohl aber in regulären Räumen.

1.27 Satz *Es sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) $(X, \mathcal{O})$ *ist T_3–Raum.*

(ii) Zu jedem $x \in X$ und jeder offenen Umgebung $U(x)$ gibt es eine abgeschlossene Umgebung $\overline{W(x)}$ mit $x \in \overline{W(x)} \subset U(x)$.
Man sagt auch: die abgeschlossenen Umgebungen bilden eine Basis des Umgebungsfilters von x.

Insbesondere ist die Eigenschaft (ii) in jedem regulären Raum erfüllt.

Beweis: $(i) \Longrightarrow (ii)$: Es sei $x \in X$ und U_x eine offene Umgebung von x. Damit ist $A := X \backslash U_x$ abgeschlossen. Wegen des T_3-Axioms gibt es offene Mengen V_A mit $A \subset V_A$ und eine offene Umgebung W_x von x mit $W_x \cap V_A = \emptyset$. W_x ist enthalten in der abgeschlossenen Menge $X \setminus V_A$, also ist auch der Abschluß $\overline{W_x}$ darin enthalten. Damit ist $\overline{W_x}$ eine abgeschlossene Umgebung von x, die A nicht trifft und die folglich im Komplement U_x enthalten ist.
Kurz: $x \in W_x \subset \overline{W_x} \subset X \backslash V_A \subset X \backslash A = U_x$.

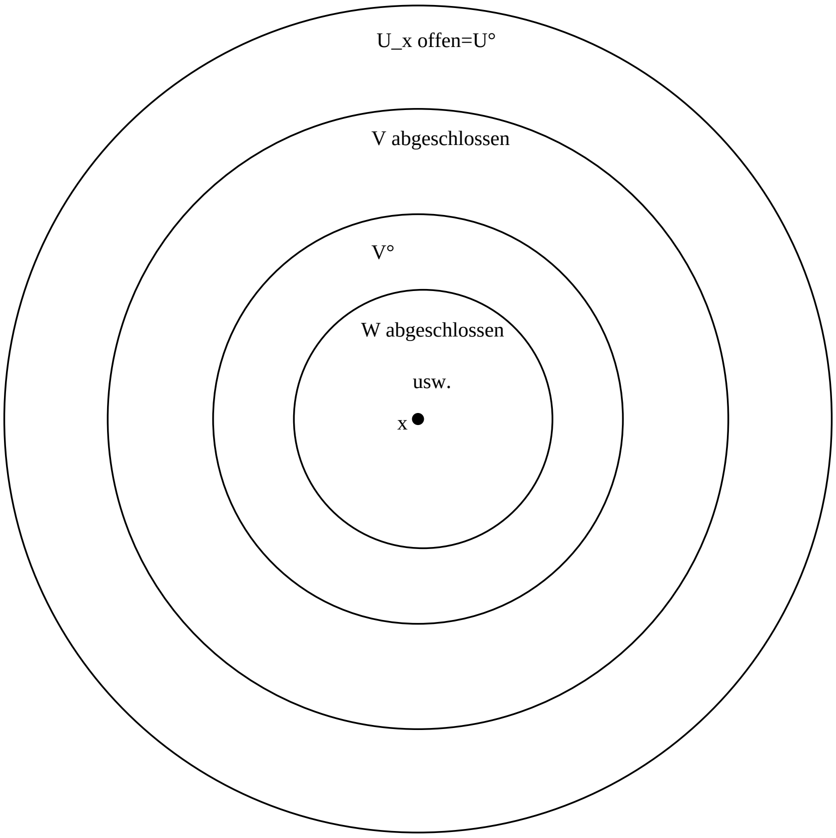


Abbildung 1.7: geschachtelte Umgebungen, offene und abgeschlossene

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Es sei $x \in X$ und $A \subset X$ eine abgeschlossene Menge und $x \notin A$. Dann liegt x in der offenen Menge $B := X \backslash A$. Nach Voraussetzung existiert eine abgeschlossene Umgebung V_x von x mit $x \in V_x \subset B = X \backslash A$. Wir können dann eine offene Umgebung U_x von x finden mit $U_x \subset \overline{U_x} \subset V_x$. Als disjunkte offene Obermengen von A und x haben wir dann $X \backslash V_x$ einerseits und U_x andererseits. Damit ist das T_3–Axiom erfüllt. □

1.28 Satz *(*URYSOHN*)*
Ein T_1–Raum X ist normal genau dann, wenn für je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen $A, B \subset X$ eine stetige Funktion $f : X \longrightarrow [0,1]$ mit $A \subset f^{-1}(0)$ und $B \subset f^{-1}(1)$ existiert.
Eine solche Funktion heißt dann auch eine Urysohn–Funktion.

Beweis: “ $\Longleftarrow$”:
Es seien A und B zwei abgeschlossene Mengen mit $A \cap B = \emptyset$. Nach Voraussetzung existiert ein stetiges $f : X \longrightarrow [0,1]$ mit $f^{-1}(0) \supset A$ und $f^{-1}(1) \supset B$
$\Longrightarrow V_A := f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ ist offen und enthält A und $W_B := f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ ist offen und enthält B.
$\Longrightarrow W_B \cap V_A = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) \cap f^{-1}([0, \frac{1}{2})) = \emptyset$
$\Longrightarrow X$ ist normal.

“$\Longrightarrow$”: Diese Richtung ist erheblich schwieriger, siehe Jänich Kapitel 8.

Die Beweisidee ist die folgende: Man wähle eine aufsteigende Kette von abgeschlossenen Mengen A_i, so dass

$$A = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset X \setminus B$$

und definiere eine Funktion f_n durch

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 0 && \text{für } x \in A_0 \\ f_n(x) &= \tfrac{1}{n} && \text{für } x \in A_1 \setminus A_0 \\ &\vdots && \\ f_n(x) &= \tfrac{k}{n} && \text{für } x \in A_k \setminus A_{k-1} \\ &\vdots && \\ f_n(x) &= 1 && \text{für } x \in X \setminus A_{n-1} \end{aligned}$$

Eine solche Treppenfunktion ist natürlich i.A. nicht stetig, aber sie approximiert die gesuchte Funktion. Weil der Raum als normal vorausgesetzt ist, können wir die A_i so wählen, dass stets $A_i \subset A_{i+1}^\circ \subset A_{i+1}$ gilt. Ferner kann man jedes f_n von dieser Art zu einem f_{2n} modifizieren, indem man zwischen je zwei der beteiligten Mengen eine weitere einfügt mit der gleichen Eigenschaft, also

$$\ldots A_i \subset \tilde{A}_i^{\circ} \subset \tilde{A}_i \subset A_{i+1}^\circ \subset A_{i+1} \ldots.$$

Durch Umnummerierung erhält man wieder ein f_{2n} vom gleichen Typ und kann das Verfahren iterieren. Nach Konstruktion halbiert sich bei jedem Schritt die Sprunghöhe der Treppenfunktion, und am Ende kann man setzen

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f_{2^k}$$

als punktweise konvergenten Limes einer monotonen, beschränkten Folge. Diese Grenzfunktion ist dann stetig und leistet das Gewünschte.

$\square$

Dieser Satz ist ein Spezialfall eines allgemeineren Satzes wie folgt:

1.29 Satz *(TIETZE)*
Es sei X ein normaler Raum, $A \subset X$ abgeschlossen und es existiere eine stetige Funktion $f : A \longrightarrow [0,1]$. Dann hat f eine stetige Erweiterung

$$F : X \longrightarrow [0,1] \text{ mit } F\big|_A = f.$$

Für einen Beweis siehe OSSA Kapitel II (S.52–53). Der Satz von Urysohn ist eine direkte Folgerung aus dem von Tietze, weil für disjunkte abgeschlossene Mengen A, B die stetige Funktion $f\colon A \cup B \to [0,1]$, definiert durch $f(x) = 0$ für $x \in A$ und $f(x) = 1$ für $x \in B$ eine stetige Fortsetzung auf X zuläßt.

Der Satz zeigt, dass die durch Intervalle $[a,b) \times [c,d)$ auf $\mathbb{R}^2$ erzeugte Topologie nicht normal sein kann, weil es einen überabzählbaren diskreten Unterraum (die Nebendiagonale) gibt und weil aus Kardinalitätsgründen nicht jede Funktion stetig fortgesetzt werden kann (vgl. FÜHRER, 9.18).

1.30 Folgerung *normal $\Longrightarrow$ vollständig regulär $\Longrightarrow$ regulär.*

1.31 Definition *(Abzählbarkeitsaxiome)*
Ein Mengensystem U heißt <u>Umgebungsbasis eines Punktes $x \in X$</u>, falls jedes Element von U eine Umgebung von x ist, und falls jede Umgebung von x eine aus U enthält. Der Begriff stimmt überein mit dem einer Basis des Umgebungsfilters.

Ein topologischer Raum erfüllt <u>das erste Abzählbarkeitsaxiom,</u> wenn jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

Der Raum erfüllt <u>das zweite Abzählbarkeitsaxiom,</u> wenn es eine abzählbare Basis der Topologie gibt.

Offensichtlich impliziert das zweite Abzählbarkeitsaxiom das erste.

<u>Beispiele:</u>

1) Jeder metrische Raum (mit der induzierten Topologie) erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, weil für jeden festen Punkt x die Umgebungen $U = \{U_{\frac{1}{n}}(x) | n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis bilden.

2) $\mathbb{R}^n$ mit der Standardtopologie erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom, denn das System der Umgebungen $\{U_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0,\ \varepsilon \in \mathbb{Q},\ x \in \mathbb{Q}^n\}$ bildet eine Basis der Topologie.

3) Ein überabzählbares topologisches Produkt $\prod_{i\in\mathbb{R}} X_i$ mit Faktoren X_i, die nicht die indiskrete Topologie tragen, erfüllt nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom. Daher ist hier die Konvergenz von Filtern etwas wesentlich anderes als die Konvergenz von Folgen, vgl. 1.7, 1.8.

1.32 Folgerung *Es sei (x_n) eine konvergente Folge in X und φ eine auf X definierte stetige Abbildung. Es gilt dann:*

$$\varphi(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n). \qquad (*)$$

Falls die Eigenschaft $(*)$ für jede konvergente Folge (x_n) in X gilt, nennt man φ folgenstetig.
Unter der Voraussetzung, dass X das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ist die Stetigkeit äquivalent zur Folgenstetigkeit.

1E Kompaktheit

In der Analysis des $\mathbb{R}^n$ spielt die Kompaktheit von Teilmengen eine wichtige Rolle, man denke etwa an Minimax-Aufgaben oder die Beschränktheit von Funktionen. Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist kompakt in der Standardtopologie genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Damit verwendet man aber eine Norm, was sich nicht gut für eine Behandlung im Rahmen der allgemeinen Topologie eignet. Stattdessen gelingt dies besser durch offene Überdeckungen. Eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ einer Menge A ist einfach ein System von offenen Mengen U_i mit $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Ein bekannter Satz ist der folgende:

1.33 Satz *(von* HEINE–BOREL *für kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.)*
Jede offene Überdeckung von $[a_1, b_1]\times\cdots\times[a_n, b_n]$ enthält eine endliche Teilüberdeckung. Genauer: zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ gibt es eine endliche Auswahl $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}$ dieser U_i, die ebenfalls eine Überdeckung bildet.

Diese Eigenschaft (die *Heine-Borelsche Überdeckungseigenschaft*) überträgt sich dann leicht auf abgeschlossene Teilmengen eines solchen n-dimensionalen Intervalls $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, vgl. Satz 1.35 unten.

1.34 Definition *(kompakt)*
Ein topologischer Raum heißt quasi–kompakt, wenn er die Heine–Borelsche Überdeckungseigenschaft hat, d. h. wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Ein quasi–kompakter T_2–Raum heißt kompakt.

Nach Definition ist die (Quasi-)Kompaktheit eine topologische Invariante.

1.35 Satz *X sei kompakt. Dann ist eine Teilmenge $A \subset X$ genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist.*

Beweis: "$\Longleftarrow$": A sei abgeschlossen, dann ist $X \setminus A$ offen. Es sei (O_i) eine offene Überdeckung von A. Dann ist (O_i) zusammen mit $X \setminus A$ eine offene Überdeckung von X. Da X als kompakt vorausgesetzt war existiert eine endliche Teilüberdeckung von X, welche auch eine Teilüberdeckung von A ist, wenn man $X \setminus A$ wieder entfernt.

"$\Longrightarrow$": A sei kompakt. Zu zeigen ist: $X \setminus A$ ist offen. Es sei $x \in X \setminus A$. Wegen der T_2-Eigenschaft existiert zu jedem $y \in A$ eine offene Umgebung $U_y(x)$ von x und eine offene Umgebung $U_x(y)$ von y mit $U_y(x) \cap U_x(y) = \emptyset$. Insbesondere bildet die Gesamtheit aller $U_x(y)$ mit $y \in A$ eine offene Überdeckung von A. Daher gibt es eine endliche Teilüberdeckung $U_x(y_1), \ldots, U_x(y_n)$ von A. Für alle $i \in I$ gilt $U_{y_i}(x) \cap U_x(y_i) = \emptyset$. Der endliche Durchschnitt $U_x := \bigcap_{1 \le i \le n} U_{y_i}(x)$ ist dann eine offene Umgebung von x. Da keines der $U_{y_i}(x)$ die zugehörige Menge $U_x(y_i)$ trifft, kann der Durchschnitt keinen Punkt mit A gemeinsam haben. Andererseits war x beliebig gewählt und besitzt stets eine offene Umgebung U_x in $X \setminus A$. Damit ist A abgeschlossen. □

1.36 Folgerung *kompakt $\Longrightarrow$ normal.*

Beweis: analog wie in Satz 1.35. □

1.37 Satz *(Tychonoff)*
Das topologische Produkt beliebig vieler (quasi–)kompakter Räume ist wieder (quasi–)kompakt.

Der übliche Beweis verwendet Ultrafilter und das Zornsche Lemma (bzw. das Auswahlaxiom), siehe JÄNICH, Kap. 10. Der Beweis ist in **Anhang 1** ausgeführt. Die Gültigkeit des Satzes von Tychonoff ist sogar äquivalent zum Auswahlaxiom.
Für endliche Produkte ist der Beweis viel leichter. Speziell für überabzählbare Produkte ist die Kompaktheit schwer vorstellbar. Insbesondere gilt dies für unendlich-dimensionale Würfel als Produkte des reellen Einheits-Intervalls mit sich selbst.

1.38 Lemma *Das stetige Bild eines quasi–kompakten Raumes ist wieder quasi–kompakt. Folgerung: Wenn X kompakt ist, Y ein T_2-Raum und $f\colon X \to Y$ stetig, dann ist auch $f(X)$ kompakt.*

Beweis: Sei $f : X \longrightarrow Z$ eine stetige Abbildung und $(O_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung des Bildes $Y := f(X)$ als Unterraum von Z. Das Urbild von Y ist $f^{-1}(Y) = X$. Damit ist $(f^{-1}(O_i))_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X, die wegen der Kompaktheit eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Die zugehörigen endlich vielen O_i bilden dann folglich eine Überdeckung von Y. □

1.39 Folgerung *Eine stetige Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ auf einem kompakten Raum ist beschränkt und nimmt Maximum und Minimum an.*

Diese Folgerung ist uns aus der Analysis wohlvertraut. Sie ist unentbehrlich für die Bearbeitung von Minimax-Aufgaben. Allein dies begründet schon die Bedeutung des Begriffes "kompakt".

1.40 Satz *$f : X \longrightarrow Y$ sei eine stetige Abbildung und bijektiv. X sei kompakt und Y sei T_2–Raum. Dann ist f ein Homöomorphismus.*

Beweis: Y ist kompakt nach Lemma 1.38. Zu zeigen ist: die Umkehrabbildung $g := f^{-1}$ ist stetig. Dazu sei $B \subset X$ eine beliebige offene Teilmenge von X. Damit ist $A := X\backslash B$ abgeschlossen und nach Satz 1.35 kompakt. Aufgrund der Bijektivität gilt $g^{-1}(A) = f(A)$, und damit sind beide kompakt nach Lemma 1.38 und folglich abgeschlossen nach Satz 1.35. Also ist $g^{-1}(X\backslash B) = Y\backslash g^{-1}(B)$ abgeschlossen. Folglich ist $g^{-1}(B)$ offen. Also ist g stetig. □

Bemerkung: Die Eigenschaft

$$\Big[f \text{ bijektiv und strukturerhaltend}\Big] \Longrightarrow \Big[f^{-1} \text{ strukturerhaltend}\Big]$$

ist bekannt von allen algebraischen Strukturen (Gruppen, Vektorräume, etc.). Tatsächlich bilden die kompakten topologischen Räume eine sogenannte „algebraische Kategorie“ im Sinne der Kategorientheorie. Man vergleiche dazu S.MacLane, *Kategorien*, Springer 1972, VI.9, Satz 1, S. 170.

1.41 Definition *(kompakt–offen–Topologie)*
X sei ein T_2–Raum und Y ein topologischer Raum, und es sei

$$Y^X := C(X,Y) := \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ stetig}\}$$

die Menge aller stetigen Abbildungsn von X nach Y. Dann ist die kompakt–offen–Topologie erklärt als die von der Subbasis

$$\Big\{\{f \in Y^X \mid f(K) \subset O\} \;\Big|\; K \subset X \text{ kompakt},\ O \subset Y \text{ offen}\Big\}$$

erzeugte Topologie auf Y^X.

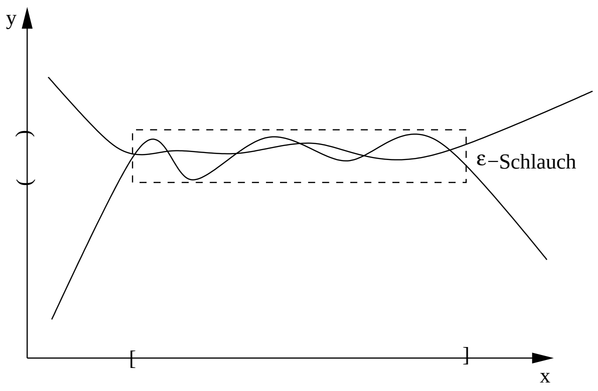


Abbildung 1.8: ε–Schlauch über ein kompaktes Intervall

Bemerkung: Falls X selbst kompakt ist und falls $Y = \mathbb{R}$, dann stimmt die kompakt-offen-Topologie mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz überein. Die offenen Mengen $(-\varepsilon, \varepsilon)^X$ stellen typische Umgebungen der Nullfunktion dar, Umgebungen einer Funktion f ergeben sich durch Addition $f + \varphi$ mit $\varphi \in (-\varepsilon, \varepsilon)^X$, also $\varphi(X) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$.
Im Falle $X = Y = \mathbb{R}$ stimmt die kompakt-offen-Topologie mit der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz überein, siehe Abbildung 1.8 für eine typische Umgebung einer konstanten Funktion. (Zur Erinnerung: Potenzreihen $\sum_n a_n x^n$ konvergieren innerhalb des Konvergenzradius nur lokal gleichmäßig, aber im Allgemeinen nicht gleichmäßig. Wir haben also sehr natürliche Beispiele für den Unterschied.)

Entscheidend für diese Äquivalenz ist die Tatsache, dass wir in den rellen Zahlen mit der Standard-Topologie stets kompakte Umgebungen wählen können, z.B. kompakte Intervalle. Dies führt zu dem Begriff der *Lokalkompaktheit*:

1.42 Definition *(lokalkompakt)*
Ein T_2–Raum heißt lokalkompakt, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt. Auch die Lokalkompaktheit ist eine topologische Invariante.

Bemerkung: Ist ein topologischer Raum lokalkompakt, dann ist er nach 1.27 auch regulär. Damit enthält jede Umgebung eine abgeschlossene und folglich nach 1.35 jede Umgebung eine kompakte.

Beispiel:
Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ als Unterraum der reellen mit der Standardtopo-

logie bilden einen nicht lokalkompakten topologischen Raum. Man sieht leicht, dass das Intervall $\mathbb{Q} \cap [1,2]$ von den (in der Spurtopologie offenen) Intervallen $\mathbb{Q} \cap [1, \sqrt{2} - \frac{1}{n})$ und $\mathbb{Q} \cap (\sqrt{2} + \frac{1}{n}, 2]$ überdeckt wird, wobei n alle natürlichen Zahlen durchläuft. Offensichtlich gibt es aber keine endliche Teilüberdeckung, weil diese stets eine gewisse Umgebung von $\sqrt{2}$ aussparen würde. Mit dem gleichen Argument kann kein rationales Intervall kompakt sein, und keine kompakte Teilmenge von $\mathbb{Q}$ kann ein Intervall enthalten.

1.43 Satz *(Ein–Punkt–Kompaktifizierung)*
$(X, \mathcal{O})$ sei lokalkompakt, aber nicht kompakt. Dann wird $X_\infty := X \cup \{\infty\}$ mit einer geeigneten Topologie $\mathcal{O}_\infty$ ein kompakter Raum, der X als dichten Unterraum enthält. X_∞ heißt die Ein–Punkt–Kompaktifizierung von X.

Die Konstruktion der Topologie $\mathcal{O}_\infty$ auf X_∞ ist die folgende:
$\mathcal{O}_\infty := \mathcal{O} \cup \mathcal{U}(\infty)$ mit $\mathcal{U}(\infty) := \{(X_\infty \backslash K) \bigm| K \subset X,\ K \text{ kompakt }\}$. Das System $\mathcal{U}(\infty)$ der Umgebungen des Punktes ∞ besteht also gerade aus den Komplementen kompakter Teilmengen von X.

Beweis: Wenn wir von einer offenen Überdeckung von X_∞ in dieser Topologie ausgehen, so kann der Punkt ∞ nur durch eine Menge vom Typ $O = (X \cup \{\infty\}) \backslash K$ überdeckt werden. Das Komplement K wird dann wegen der Kompaktheit durch eine endliche Teilüberdeckung überdeckt. Daher ist der Raum X_∞ stets quasikompakt. Die T_2-Eigenschaft folgt aber nur dann, wenn jeder Punkt in X eine kompakte Umgebung besitzt, weil nur dann $x \in X$ von ∞ durch disjunkte Umgebungen getrennt werden kann. Also impliziert die Lokalkompaktheit von X die Kompaktheit von X_∞. □

Beispiele:
Für den Raum $X = \mathbb{R}^n$ mit der Standardtopologie ist die Ein-Punkt-Kompaktifizierung der Raum $X_\infty \cong S^n$, also die Standard-Sphäre im $\mathbb{R}^{n+1}$. Für $n = 1$ haben wir das schon in dem Beispiel nach Def. 1.4 gesehen. Im Falle $n = 2$ ist dies auch als Riemannsche Zahlenkugel bekannt:

$$X = \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C},\ X_\infty \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \widehat{\mathbb{C}}.$$

Andere Kompaktifizierungen des $\mathbb{R}^n$ sind durchaus möglich und gebräuchlich:

$\mathbb{R} \cong (0,1) \longrightarrow [0,1]$	(Kompaktifizierung durch 2 Punkte)
$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$	(ebenso)
$\mathbb{R}^n \cong \overset{\circ}{B^n} \longrightarrow \overline{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lvert\lvert x \rvert\rvert \leq 1\}$	(Kompaktifizierung als Vollkugel)
$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \cup \mathbb{R}P^{n-1} \cong \mathbb{R}P^n$	(reeller projektiver Raum)
$\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}P^{n-1} \cong \mathbb{C}P^n$	(komplexer projektiver Raum)

1.44 Satz *(universelle Kompaktifizierung)*
Zu jedem vollständig regulären Raum X gibt es eine <u>*universelle Kompaktifizierung*</u> *$\check{X}$ mit einer Einbettung $X \subset \check{X}$, so dass X dicht in $\check{X}$ ist. Sie heißt auch die* <u>*Stone–Čech–Kompaktifizierung.*</u>
Die Universalität bedeutet dabei genauer: Zu jedem weiteren kompakten Raum K und jedem stetigen $f : X \longrightarrow K$ gibt es genau ein stetiges $\check{f} : \check{X} \longrightarrow K$, das f fortsetzt.

Man beachte, dass die universelle Eigenschaft der Stone–Čech–Kompaktifizierung diese bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmt. Sie gilt ja insbesondere für jede weitere Kompaktifizierung. Also kann man diese universelle Eigenschaft jeweils wechselseitig ausnutzen und dann die Eindeutigkeit verwenden.

Als kommutatives Diagramm haben wir folgendes:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & K \\ \check{X} \arrow[ur, "\check{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Die <u>Konstruktion</u> der Stone–Čech–Kompaktifizierung ist die folgende: Wir definieren eine Indexmenge J als die Menge aller stetigen Funktionen $f\colon X \to [0,1]$. Dann definieren wir eine Einbettung $j\colon X \to \prod_J [0,1]$ durch $j(x) = (f(x))_{f\in J}$. Der Abschluss $\check{X} = \overline{j(X)}$ ist dann kompakt, weil $\prod_J [0,1]$ nach dem Satz von Tychonoff kompakt ist. Nach Definition ist $j(X)$ dicht in $\check{X}$. Dass die Topologien auf X und $j(X)$ übereinstimmen, rechnet man leicht nach. Für weitere Details und den Beweis siehe Querenburg 12.18 oder Führer 11.25, 11.26.

Als weitere Eigenschaften von Räumen in der allgemeinen Topologie erwähnen wir folgende:

$(X, \mathcal{O})$	<u>metrisierbar</u>	$\iff$ es gibt eine Abstandsmetrik auf X, die $\mathcal{O}$ induziert.
		$\Longrightarrow$ 1. Abzählbarkeitsaxiom.
$(X, \mathcal{O})$	<u>separabel</u>	$\iff$ es gibt eine abzählbare dichte Teilmenge.
$(X, \mathcal{O})$	<u>Lindelöf–Raum</u>	$\iff$ jede offene Überdeckung besitzt eine abzählbare Teilüberdeckung.
$(X, \mathcal{O})$	<u>parakompakt</u>	$\iff$ T_2 und jede offene Überdeckung besitzt eine lokalendliche Verfeinerung.

Für die Hierarchie dieser und anderer Begriffe vgl. H.Schubert, Topologie, Teubner, insbesondere die große Tabelle in I.9.3.

Kapitel 2

Homotopie

Literatur zu diesem Kapitel:

- M.A.Armstrong, *Basic Topology*, Ch. 5
- K.Jänich, *Topologie*, Kap. 5 und 9
- L.Führer, *Topologie mit Anwendungen*, Kap. 14
- K.H.Mayer, *Algebraische Topologie*, Kap. II, Birkhäuser 1989
- E.Ossa, *Topologie*, Kap. 3

Der Begriff der Homotopie bedeutet so etwas wie „stetige Deformierbarkeit" von Räumen und Abbildungen, also z.B. der Übergang einer stetigen Abbildung zu einer anderen durch eine stetige 1–Parameterschar von stetigen Abbildungen. Speziell ist dies naheliegend für Wege, also für stetige Abbildungen, die auf einem reellen Intervall definiert sind. Daher benötigt man die Existenz hinreichend vieler Wege in den betrachteten Räumen. Aus diesem Grunde machen wir im Folgenden die

Generalvoraussetzung in Kap. 2:
Jeder Raum X sei wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend.

Als Schreibweise für Homöomorphie verwenden wir $\cong$, d.h. X und Y sind homöomorph genau dann, wenn $X \cong Y$. Das ähnliche Zeichen $\simeq$ bezeichnet die Homotopie bzw. Homotopie-Äquivalenz, was in den beiden folgenden Definitionen näher erklärt wird. Die "Schrumpfung" eines Raumes auf einen anderen ist ein Beispiel einer Homotopie–Äquivalenz, siehe Abbildung 2.1.

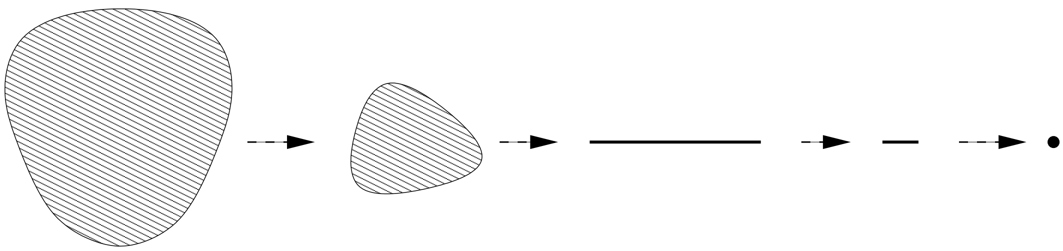


Abbildung 2.1: Eine Homotopie-Äquivalenz von topologischen Räumen

2A Homotopie von Abbildungen und von Wegen, Homotopie–Äquivalenz

2.1 Definition *(Homotopie)*
Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \longrightarrow Y$ zwischen zwei topologischen Räumen X, Y heißen <u>*homotop*</u> *zueinander (geschrieben $f \simeq g$), wenn es eine* <u>*Homotopie*</u> *zwischen ihnen gibt, d.h. eine stetige Abbildung: $h : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ mit*

$$h(x,0) = f(x) \text{ und } h(x,1) = g(x) \text{ für alle } \quad x \in X.$$

Offensichtlich ist die Homotopie von Abbildungen eine Äquivalenzrelation.

Man kann dabei die folgende <u>physikalische Vorstellung</u> haben: Der zusätzliche Parameter $t \in [0,1]$ läuft durch ein Zeitintervall, und für jedes feste t haben wir die stetige Abbildung $h_t(x) = h(x,t)$. Die Homotopie ist dann die stetige Veränderung von h_t in Abhängigkeit von t.

Beispiel: Die identische Abbildung

$$g = Id : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad \text{(mit der Standardtopologie)}$$

ist homotop zur konstanten Abbildung $f = 0$, d.h. $f \simeq g$ durch die Homotopie $h(x,t) := t \cdot x$. Offensichtlich ist das so definierte $h : \mathbb{R}^n \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und es gilt $h(x,0) = 0 = f(x)$ sowie $h(x,1) = x = g(x)$.

Dagegen ist dies für die n-Sphäre $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = 1\}$ ganz anders: Eine konstante Abbildung $f\colon S^n \to S^n$ ist niemals homotop zu $Id : S^n \to S^n$. Dies ist allerdings nicht offensichtlich und kann ohne weitere Hilfsmittel der Topologie nicht bewiesen werden.

2.2 Definition *(Homotopie-äquivalent)*
Zwei topologische Räume X, Y heißen homotopie–äquivalent zueinander (geschrieben $X \simeq Y$), wenn es stetige Abbildungen $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ mit $f \circ g \simeq Id_Y$ und $g \circ f \simeq Id_X$ gibt. Auch dies ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation, und die Abbildungen f und g heißen auch Homotopie–Äquivalenz.

X heißt kontrahierbar, wenn X homotopie–äquivalent zu einem einelementigen Raum ist. Zwei homöomorphe Räume sind stets auch homotopie–äquivalent, die Umkehrung gilt jedoch nicht.

Die Äquivalenzklassen von Räumen nach Homotopieäquivalenz bestimmen die sogenannten Homotopietypen oder Homotopieklassen. Analog sprechen wir von *Homöomorphietypen* oder *topologischen Typen* für die durch Homöomorphie definierten Äquivalenzklassen.

Beispiele: 1. $\mathbb{R}^n$ ist kontrahierbar. Mit $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ wird für die Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ mit $f(x) = 0$ sowie $g(0) = 0$ die Komposition $f \circ g$ die Identität auf Y, und $g \circ f$ (die Nullabbildung) wird homotop zur Identität auf X vermöge der Homotopie $h(x,t) = tx$.

2. Eine Kreisscheibe mit 3 Löchern in der Ebene ist homotopieäquivalent zu einer Vereinigung dreier Kreislinien, ein Torus mit einem herausgenommenen Punkt ist homotopieäquivalent zu einer Vereinigung zweier Kreislinien (Abbildung 2.2):

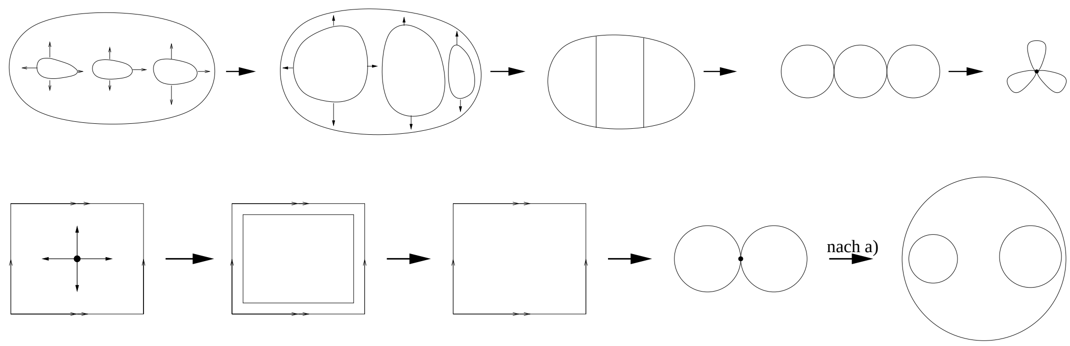


Abbildung 2.2: Homotopie-Äquivalenzen

2.3 Definition *(Punktierte Räume und Homotopien)*
Ein punktierter Raum ist erklärt als ein Paar (X, x_0) mit $x_0 \in X$. Zwei punktierte Räume (X, x_0) und (Y, y_0) heißen homotopieäquivalent zueinander, wenn es stetige Abbildungen f und g gibt

$$f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0) \text{ und } g : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$$

$$f(x_0) = y_0,\ g(y_0) = x_0,\ f \circ g \simeq Id_Y,\ g \circ f \simeq Id_X,$$

wobei die Homotopie den Basispunkt festläßt. Stetige Abbildungen zwischen punktierten Räumen sowie Homotopien von solchen sollen im Folgenden stets den Basispunkt erhalten.

Diese Betrachtungsweise ist sinnvoll und notwendig auch bei der Untersuchung von stetigen Wegen und ihren Homotopieeigenschaften, insbesondere bei geschlossenen Wegen mit ausgezeichnetem Anfangs– und Endpunkt.

2.4 Definition *(Homotopie von Wegen)*
Ein Weg in X ist eine stetige Abbildung $c : [0,1] \longrightarrow X$, vgl. Def. 1.16. Eine Homotopie zweier Wege c_0, c_1 ist erklärt wie in 2.1, nämlich als stetige Abbildung $h\colon [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ mit $h(s,0) = c_0(s)$ und $h(s,1) = c_1(s)$. Genauer ist dies die sogenannte freie Homotopie von Wegen.

Ein Weg c heißt geschlossen, wenn $c(0) = c(1)$. Falls c_0 und c_1 beide geschlossen sind, dann heißen sie geschlossen homotop, wenn sie homotop sind mit einer Homotopie h derart, daß alle h_t ebenfalls geschlossene Wege sind. Ein geschlossener Weg heißt nullhomotop, wenn er geschlossen homotop zu einem konstanten Weg ist.

Falls (X, x_0) ein punktierter Raum ist mit $c_0(0) = c_0(1) = c_1(0) = c_1(1) = x_0$, dann fordern wir sinnvollerweise, dass zusätzlich $h(0,t) = h(1,t) = x_0$ für alle t gilt (fester Anfangs– und Endpunkt x_0). M.a.W.: Alle c_t seien geschlossen mit gleichem Anfangs- und Endpunkt x_0. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man dies wegen des Wegzusammenhanges von X auch stets erreichen.

Bemerkung: Je zwei Wege mit gleichem Anfangspunkt sind frei homotop zueinander, weil jeder einzelne homotop zum konstanten Weg ist: Setze $h(s,t) = c(st)$. Das liefert eine Homotopie zwischen c und dem konstanten Weg c_0 mit $c_0(s) = c(0)$. Diese Erkenntnis ist natürlich eine gewisse Trivialität und kann weiter nichts liefern. Daher konzentriert man sich auf die geschlossene Homotopie, die die eigentlich interessanten Phänomene beschreibt.

2.5 Lemma *Zwei geschlossene Wege c_0, c_1 in X mit Anfangs- und Endpunkt $c_0(0) = c_0(1) = c_1(0) = c_1(1) = x_0$ sind geschlossen homotop genau dann, wenn sie homotop sind als Abbildungen zwischen den punktierten Räumen $(S^1, (1,0))$ und (X, x_0).*

Der Kurve $c : [0,1] \longrightarrow X$ kann man dabei die Abbildung $\tilde{c} : S^1 \longrightarrow X$ zuordnen mit $\tilde{c}(e^{is}) = c(\frac{s}{2\pi})$. Bei diesem Übergang benutzt man, dass S^1 homöomorph ist zum Quotienten $[0,1]/_{\{0,1\}}$, vgl. die Definition der Quotiententopologie in 1.5.

2.6 Lemma *Der Raum X sei kontrahierbar auf einen Punkt $x_0 \in X$. Dann ist jeder geschlossene Weg $c : S^1 \longrightarrow (X, x_0)$ geschlossen homotop zu dem konstanten Weg x_0.*

Beweis: $f\colon (X, x_0) \to \{x_0\}$ und $g\colon \{x_0\} \to (X, x_0)$ seien konstante Abbildungen, der einpunktige Raum $\{x_0\}$ ist trivialerweise punktiert. Nun sei h eine Homotopie zwischen $g \circ f$ und der Identität auf X, also $h(x,0) = x_0, h(x,1) = x$. Dann ist $h \circ \left(c \times Id_{[0,1]}\right)$ eine Homotopie zwischen c und dem konstanten Weg x_0. Denn es gilt $h(c(s),0) = g(f(c(s))) = x_0$ und $h(c(s),1) = c(s)$. Außerdem sind alle Kurven $c_t(s) = h(c(s),t)$ geschlossen. $\square$

<u>Ziel</u> ist im folgenden Abschnitt 2B die Bestimmung aller Homotopieklassen von geschlossenen Wegen $c : S^1 \longrightarrow X$ mit festem Basispunkt x_0. Dies liefert eine weitere topologische Invariante, die gleichzeitig eine algebraische Interpretation zuläßt und damit eine Brücke zur Algebra schlägt.

2B Die Fundamentalgruppe

Strategie:

(1) Die Hintereinanderausführung von geschlossenen Wegen führt zu einer zweistelligen Verknüpfung.

(2) Diese Verknüpfung ist assoziativ (bis auf Homotopie).

(3) Es gibt ein inverses Element (bis auf Homotopie) und ein neutrales Element (der konstante Weg, ebenfalls bis auf Homotopie).

(4) Die Eigenschaften (1),(2),(3) definieren auf der Menge der Homotopieklassen eine Gruppe, die sogenannte <u>Fundamentalgruppe</u> von (X, x_0).

2.7 Definition *(Komposition $*$ von Wegen)*
(X, x_0) sei ein punktierter topologischer Raum (wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend), c_0, c_1 seien geschlossene Wege mit Anfangs– und Endpunkt x_0. Dann erklären wir die Komposition geschlossener Wege wie folgt:

$$c_0 * c_1(s) := \begin{cases} c_0(2s) & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ c_1(2s-1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Dieser Weg $c_0 * c_1$ ist auch an der Nahtstelle $s = \frac{1}{2}$ stetig, weil $c_0(1) = c_1(0) = x_0$. Die Komposition $*$ wird so zu einer zweistelligen Verknüpfung auf dem Raum aller geschlossenen Wege.

Der konstante Weg ist

$$c_{x_0}(s) := x_0$$

Der inverse Weg eines gegebenen c ist

$$c^{-1}(s) := c(1-s)$$

Vereinbarung: Der Einfachheit halber bezeichnet im Folgenden das Symbol x_0 auch den konstanten Weg c_{x_0} , der jedes s auf den Punkt x_0 abbildet.

Dies ergibt die folgende **algebraische Struktur:**

2.8 Lemma *Die Komposition von geschlossenen Wegen erfüllt die Gruppenaxiome bis auf (geschlossene) Homotopie, d.h. es gelten die Regeln:*

(1) $\big(c_0 * c_1\big) * c_2 \;\simeq\; c_0 * \big(c_1 * c_2\big)$ *(Assoziativität)*

(2) $c * x_0 \;\simeq\; c \;\simeq x_0 * c$ *(neutrales Element x_0)*

(3) $c^{-1} * c \;\simeq x_0 \;\simeq c * c^{-1}$ *(inverses Element)*

Beweis: (1) Es gilt

$$(c_0 * c_1) * c_2(s) = \begin{cases} c_0(4s) & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ c_1(4s-1) & \text{für } \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ c_2(2s-1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

sowie

$$c_0 * (c_1 * c_2)(s) = \begin{cases} c_0(2s) & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ c_1(4s-2) & \text{für } \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{4} \\ c_2(4s-3) & \text{für } \frac{3}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Definiere nun eine Homotopie durch

$$h(s,t) = \begin{cases} c_0(\frac{4s}{1+t}) & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{t+1}{4} \\ c_1(4s-1-t) & \text{für } \frac{t+1}{4} \leq s \leq \frac{t+2}{4} \\ c_2(1-\frac{4(1-s)}{2-t}) & \text{für } \frac{t+2}{4} \leq s \leq 1 \end{cases} .$$

h ist die gesuchte Homotopie zwischen $(c_0 * c_1) * c_2$ und $c_0 * (c_1 * c_2)$.

(2) Entsprechend gilt

$$c * x_0(s) := \begin{cases} c(2s) & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ x_0 & \text{für } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} ,$$

und

$$h(s,t) = \begin{cases} c((t+1)s) & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{1}{t+1} \\ x_0 & \text{für } \frac{1}{t+1} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

definiert eine Homotopie zwischen c und $c * x_0$.

(3) Hier gilt

$$c * c^{-1}(s) := \begin{cases} c(2s) & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ c(2-2s) & \text{für } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} ,$$

und

$$h(s,t) = \begin{cases} c(2s) & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{t}{2} \\ c(t) & \text{für } \frac{t}{2} \leq s \leq 1-\frac{t}{2} \\ c(2-2s) & \text{für } 1-\frac{t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

definiert eine Homotopie zwischen x_0 und $c * c^{-1}$. □

2.9 Folgerung *(Fundamentalgruppe)*
Die Menge aller Homotopieklassen geschlossener Wege in (X, x_0) bildet mit der Komposition $*$ eine Gruppe, die sogenannte <u>*Fundamentalgruppe*</u> $\pi(X, x_0)$.

Als *Schreibweise* verwenden wir $[c]$ für die Homotopieklasse von c. $[c]$ ist unabhängig von dem Repräsentanten und von der Parametrisierung, und wir können die Gruppen-Multiplikation mit dem gesonderten Symbol $\cdot$ beschreiben durch

$$[c_0] \cdot [c_1] := [c_0 * c_1].$$

Nach dem Satz 2.7. ergeben sich die folgenden Identitäten:

$$\big([c_0] \cdot [c_1]\big) \cdot [c_2] = [c_0] \cdot \big([c_1] \cdot [c_2]\big)$$

$$[c] \cdot [x_0] = [c] = [x_0] \cdot [c]$$

$$[c^{-1}] \cdot [c] = [x_0] = [c] \cdot [c^{-1}], \quad \text{d.h.} \quad [c]^{-1} = [c^{-1}].$$

Dabei ist $[x_0]$ das neutrale Element der Gruppe, das auch als 1 geschrieben wird. Weil die Fundamentalgruppe i.A. nicht kommutativ ist, wird sie gewöhnlich multiplikativ geschrieben. Dennoch spricht man von *nullhomotopen* Wegen c, wenn $[c] = 1$ gilt.

2.10 Folgerung *Der Isomorphietyp von $\pi(X, x_0)$ hängt nicht von x_0 ab, sondern nur von X. Hier verwenden wir entscheidend, dass X als wegzusammenhängend vorausgesetzt ist.*

Als Schreibweise verwendet man daher auch $\pi(X)$ statt $\pi(X, x_0)$ für den Isomorphietyp der Fundamentalgruppe.

X heißt einfach zusammenhängend, wenn die Fundamentalgruppe $\pi(X)$ trivial (d.h. einelementig) ist oder, äquivalenterweise, wenn jeder geschlossene Weg in X nullhomotop ist.

Beweis: Es seien x_0, y_0 zwei Punkte von X. Da X wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg γ zwischen x_0 und y_0. Dann definiert

$$i : \pi(X, x_0) \longrightarrow \pi(X, y_0)$$

$$[c] \longmapsto [\gamma^{-1} * c * \gamma]$$

einen Homorphismus von Gruppen mit inversem Homomorphismus

$$j : \pi(X, y_0) \longrightarrow \pi(X, x_0)$$

$$[c'] \longmapsto [\gamma * c' * \gamma^{-1}].$$

Also sind beide Gruppen isomorph. Diese Isomorphie ist aber nicht kanonisch, sondern hängt von der Wahl von γ ab. $\square$

2.11 Lemma *(Strukturelle Eigenschaften)*
Jede stetige (basispunkterhaltende) Abbildung $f\colon (X,x_0) \longrightarrow (Y,y_0)$ *induziert einen Homomorphismus* $f_* : \pi(X,x_0) \longrightarrow \pi(Y,y_0)$ *durch* $f_*[c] := [f \circ c]$.

Für die Komposition zweier stetiger Abbildungen gilt: $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$

Falls f^0 *und* f^1 *homotop sind (vermöge einer basispunkterhaltenden Homotopie), dann gilt* $(f^0)_* = (f^1)_*$.

Beweis:

1. Wohldefiniertheit: Eine Homotopie h_t zwischen c_0 und c_1 induziert die Homotopie $f \circ h_t$ zwischen $f \circ c_0$ und $f \circ c_1$.

2. f_* ist ein Homomorphismus:

$$f_*([c_0] \cdot [c_1]) = f_*([c_0 * c_1]) = [f \circ (c_0 * c_1)]$$

$$= [(f \circ c_0) * (f \circ c_1)] = [f \circ c_0] \cdot [f \circ c_1] = f_*([c_0]) \cdot f_*([c_1]).$$

$$f_*([x_0]) = [f \circ x_0] = [f(x_0)] = [y_0].$$

3. Komposition:

$$(g \circ f)_*[c] = [(g \circ f) \circ c] = [g \circ (f \circ c)] = g_*([f \circ c]) = g_*(f_*([c])) = (g_* \circ f_*)[c].$$

4. Homotopie: Eine Homotopie zwischen f^0 und f^1 induziert eine Homotopie zwischen $f^0 \circ c$ und $f^1 \circ c$ für jede Kurve c. Daraus folgt $f^0_*([c]) = [f^0 \circ c] = [f^1 \circ c] = f^1_*([c])$. Dies gilt für jedes $[c]$, also folgt $f^0_* = f^1_*$. $\square$

Warnung: Injektivität und Surjektivität übertragen sich keineswegs von f auf f_*. Es ist aber trivialerweise Id_* die Identität der Fundamentalgruppe.

2.12 Lemma *(Isomorphie der Fundamentalgruppen)*
Zwei homotopie-äquivalente (insbesondere zwei homöomorphe) Räume haben isomorphe Fundamentalgruppen. Folglich besitzt ein kontrahierbarer Raum stets eine triviale (d.h. einelementige) Fundamentalgruppe $\pi(X) = \{1\}$ *. Ein kontrahierbarer Raum ist also einfach zusammenhängend.*

Beweis: Falls $f \circ g \simeq Id_Y$ und $g \circ f \simeq Id_X$, dann folgt nach dem vorangegangenen Lemma $f_* \circ g_* = Id_{\pi(Y)}$ und $g_* \circ f_* = Id_{\pi(X)}$, folglich sind f_* und g_* zueinander inverse Homomorphismen. Insbesondere sind die Fundamentalgruppen von X und Y isomorph zueinander. Die Fundamentalgruppe eines einelementigen

Raumes ist trivialerweise einelementig. Ein kontrahierbarer Raum ist nach Definition homotopie–äquivalent zu einem einpunktigen Raum. $\square$

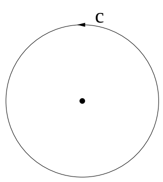
Bemerkung: Die Zuordnung

$$\big(X \xrightarrow{f} Y\big) \qquad \longmapsto \qquad \big(\pi(X) \xrightarrow{f_*} \pi(Y)\big)$$

ist ein Beispiel eines sogenannten *Funktors*, d.h. π wird (mit $\pi(f) := f_*$) zu einer strukturerhaltenden Abbildung von der Klasse aller (wegzusammanhängenden und lokal wegzusammenhängenden) Räume in die Klasse aller Gruppen. Die "Struktur" wird dabei durch die Komposition von stetigen Abbildungen bzw. von Homomorphismen gegeben. Diese Idee ist grundlegend für die Kategorientheorie.

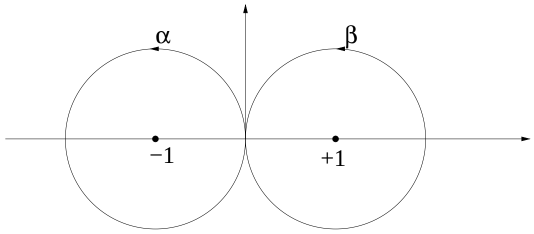
Beispiele:

1. Betrachte $X = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ oder $X = S^1 \subseteq \mathbb{C}$ und $x_0 = 1 \in \mathbb{C}$.
   Setze $c(s) := e^{2i\pi s}, 0 \leq s \leq 1$. Dann sind
   $$[c], [c]^2, [c]^3, \ldots, [c]^0 = [x_0], [c]^{-1}, [c]^{-2}, \ldots$$
   Elemente von $\pi(X, x_0)$. Man kann die Isomorphie $(\pi(X), \cdot) \cong (\mathbb{Z}, +)$ zeigen, wobei $[c] \longleftrightarrow 1$, s. 2.29. Die Fundamentalgruppe ist also als die freie Gruppe mit einem erzeugenden Element $[c]$ unendlich zyklisch.



2. Eine zusammenhängende offene Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ (ein *Gebiet*) ist einfach zusammenhängend genau dann, wenn das Komplement keine kompakte Zusammenhangs-Komponente hat. Falls zusätzlich G beschränkt ist, heißt das gerade, dass auch das Komplement zusammenhängend ist.

3. Setze $X := \mathbb{C}\backslash\{-1, +1\}, \quad x_0 = 0$ und ferner
   $\alpha(s) := e^{2i\pi s} - 1$ und $\beta(s) := e^{2i\pi s - \pi i} + 1$.



Dann sind $[\alpha], [\beta], \in \pi(X, x_0), [\alpha]$ und $[\beta]$ beide nicht trivial, ebenso alle Potenzen $[\alpha]^k, [\beta]^k \quad (k \in \mathbb{Z})$, aber auch alle Produkte der Art

$$[\alpha]^{k_1}[\beta]^{k_2}\ [\alpha]^{k_3}\ \cdots [\beta]^{k_n} \cdots \qquad k_i \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}.$$

Dabei gilt das Potenzgesetz

$$[\alpha]^{k_1} \cdot [\alpha]^{k_2} = [\alpha]^{k_1+k_2},$$

entsprechend für reine Potenzen von β oder von $\alpha\beta$ oder $\beta\alpha$, aber nicht für beliebige gemischte Produkte, weil die Reihenfolge eine Rolle spielt. Man kann zeigen: $\pi(X, x_0)$ ist die freie Gruppe mit zwei Erzeugenden $[\alpha], [\beta]$. Dieser algebraische Begriff wird im Folgenden präzisiert.

2C Freie Gruppen und Relationen

2.13 Definition *(Freie Gruppe)*
S sei eine Menge. Eine freie Gruppe über S ist eine Gruppe $F(S)$ zusammen mit einer Abbildung $j\colon S \longrightarrow F(S)$, so dass für jede Gruppe G und jede Abbildung $f : S \longrightarrow G$ ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus $\overline{f} : F(S) \longrightarrow G$ existiert mit $\overline{f} \circ j = f$, als kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"] & G \\ F(S) \arrow[ur, "\exists!\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$F(S)$ ist durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt bis auf Isomorphie.

Folgerung: Jede Gruppe ist Quotient einer freien Gruppe (setze dazu einfach $S := G$ als Menge). Zwei freie Gruppen $F(S)$ und $F(\widetilde{S})$ sind isomorph zueinander genau dann, wenn es eine Bijektion zwischen S und $\widetilde{S}$ gibt. Dies liegt daran, dass für jede Gruppe G die Menge der Abbildungen von S nach G in natürlicher Bijektion zu der Menge der Homomorphismen von $F(S)$ nach G steht.

Analog ist jeder Vektorraum frei über einer Basis: Jede mengentheoretische Abbildung von der Basis in irgendeinen Vektorraum (mit demselben Grundkörper) besitzt eine eindeutige lineare Fortsetzung auf den von dieser Basis erzeugten Vektorraum. Das kann als dasselbe kommutative Diagramm geschrieben werden wie oben.

In gleicher Weise ist eine “freie Konstruktion” auch für topologische Räume möglich: Der “freie topologische Raum” über einer Menge M ist diese Menge mit der diskreten Topologie. Es läßt sich dann jede mengentheoretische Abbildung $f : M \to Y$ in irgendeinen topologischen Raum Y eindeutig als stetige Abbildung auf M mit der diskreten Topologie auffassen. Obwohl dies recht trivial anmutet, so ist es weit weniger trivial für die kompakten Räume. Der “freie kompakte Raum” über einer Menge M ist die Stone–Čech–Kompaktifizierung (vgl. 1.44) des Raumes M, wobei M die diskrete Topologie trägt. Diese freie Konstruktion erfüllt die analoge universelle Eigenschaft wie oben die freie Gruppe. Für die Kategorientheorie sind solche Konstruktionen besonders ergiebig. Für weitere freie Konstruktionen und ihre Dualen (sog. “Kofreie Konstruktionen”) vergleiche man G.Preuss, *Allgemeine Topologie*, Springer.

Konstruktion der freien Gruppe $F(S)$:

$$\begin{array}{lll}
S = \emptyset & \Longrightarrow & F(S) = \{1\} \\
S = \{x\} & \Longrightarrow & F(S) = \{x^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \ \cong \mathbb{Z} \ \ (\text{wobei } x^k \longleftrightarrow k) \\
S = \{x, y\} & \Longrightarrow & F(S) = \{1, x^k, y^l, x^k y^l, y^k x^l, x^k y^l x^m, y^k x^l y^m, \cdots\} \\
& & = \ \text{Menge aller reduzierten}^1 \text{ Wörter in } x, y \\
S = \{x_1, \ldots, x_n\} & \Longrightarrow & F(S) = \text{Menge aller reduzierten Wörter} \\
& & (x_{j_1})^{k_1} (x_{j_2})^{k_2} \cdots (x_{j_r})^{k_r}, k_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad j_k \neq j_{k+1}
\end{array}$$

Für beliebiges S verfährt man analog und definiert die freie Gruppe als die Menge aller (endlichen und reduzierten) Wörter in den Elementen x_i von S als Alphabet. Die Multiplikation in dieser Gruppe ist jeweils die (automatisch assoziative) Hintereinander-Schreibung von Wörtern, wobei für Potenzen ein- und desselben Elementes (wenn sie direkt hintereinander zu stehen kommen) die üblichen Potenzgesetze gelten, also $x^{k_1} x^{k_2} = x^{k_1+k_2}, x^0 = 1$.

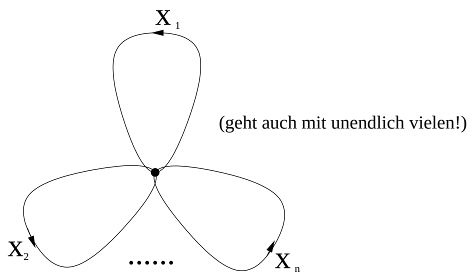


Abbildung 2.3: n-blättriges Kleeblatt (“Wedge”) aus Kreislinien

[1] Ein Wort heißt *reduziert*, wenn es kein Teilwort $xx^{-1}, x^{-1}x, yy^{-1}, y^{-1}y$ enthält; das *leere Wort* wird als neutrales Element 1 interpretiert.

Ein topologischer Raum mit Fundamentalgruppe $F\{x_1, \ldots, x_n\}$ ist das sog. n-blättrige Kleeblatt aus Kreislinien, auch *Wedge-Summe* oder *Wedge-Produkt* von n Kreisen genannt, s. Abbildung 2.3 (vgl. auch die Beispiele nach 2.12).

2.14 Definition *(Quotient nach einer Untergruppe bzw. Teilmenge)*
H sei eine Untergruppe von G. Dann ist bekanntlich $G/H := \{g \cdot H \mid g \in G\}$ eine Gruppe (der Quotient von G nach H), falls H ein Normalteiler von G ist. Die entscheidende Bedingung ist dabei, dass die Multiplikation

$$(g_1 H) \cdot (g_2 H) := (g_1 g_2) \cdot H$$

wohldefiniert ist, was jedenfalls dann der Fall ist, wenn $H \cdot g_2 = g_2 \cdot H$ für alle g_2 gilt (Definition des Normalteilers).

Falls H kein Normalteiler ist, dann sei $\langle H \rangle$ der kleinste Normalteiler, der H umfaßt (Beachte: Der Durchschnitt von Normalteilern ist wieder ein Normalteiler). Dann definieren wir analog $G/H := G/\langle H \rangle$ und nennen dies den Quotienten von G nach H. Dies ist auch möglich für beliebige Teilmengen H von G. M.a.W.: Es ist stets möglich, einen Gruppenhomomorphismus $G \to G/\langle H \rangle$ zu definieren, in dessen Kern eine beliebig vorgebbare Teilmenge $H \subset G$ liegt, und zwar so, dass dieser Kern kleinstmöglich ist.

Dieses Verfahren wird wichtig bei der Konstruktion von Gruppen als Quotient von freien Gruppen $F(\{x, y\})$ nach sogenannten *Relationen*, d.h. Gleichungen zwischen x und y. Dies ist der topologischen Situation besonders gut angepasst, insbesondere bei Verklebungskonstruktionen, weil man meist erst einmal Erzeugende der Fundamentalgruppe findet und sich dann über deren Relationen untereinander Gedanken machen muss.

2.15 Definition *(Freie Gruppe mit Relationen)*
Wenn man in einer freien Gruppe $F(S)$ willkürlich irgendwelche Gleichungen $w_1 = 1, \ldots, w_n = 1$ mit Elementen (Wörtern) $w_i \in F(S)$ fordert (in $F(S)$ gelten diese Gleichungen natürlich nicht!), dann kann man gemäß der obigen Definition den Quotienten nach der Teilmenge $H = \{w_1, \ldots, w_n\}$ bilden, d.h. den Quotienten G/H nach dem kleinsten Normalteiler $N = \langle H \rangle$, der $\{w_1, \ldots, w_n\}$ enthält.
Als Sprechweise nennt man die Gleichungen $w_1 = 1, \ldots, w_n = 1$ Relationen und nennt den Quotienten die freie Gruppe über S mit diesen Relationen.
Schreibweise:

$$F(S)/N = \langle x_1, \ldots, x_k \mid w_1 = 1, \ldots, w_n = 1 \rangle, \text{ falls } S = \{x_1, \ldots, x_k\}.$$

Beispiele:

1. Die freie Gruppe $F(\{x\})$ mit einem Erzeugenden x und mit der Relation $x^n = 1$ (d.h. mit einem Wort $w = x^n$ in der obigen Definition) liefert

$$F(\{x\})/(x^n = 1) = \langle x \mid x^n = 1\rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\},$$

   d.h. die Restklassen modulo n. *Man kann auch sagen:* Ein erzeugendes Element x mit der Relation $x^n = 1$ definiert die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}_n$.

2. $F(\{x, y\})$ mit Relationen $x^2 = 1 = y^2, \quad xyx = y$, (d.h. mit drei Wörtern $w_1 = x^2, w_2 = y^2, w_3 = xyxy^{-1}$) ist isomorph zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (leichte Übung).

3. $F(\{x, y\})$ mit Relationen $x^5 = 1, y^3 = 1, (xy)^2 = 1$, also

$$G = \langle x, y \mid x^5 = y^3 = (xy)^2 = 1),$$

   ist eine sehr bekannte Gruppe. N sei der kleinste Normalteiler, der x^5, y^3 und $(xy)^2$ enthält. Dann wird $G = F(\{x, y\})/N$ isomorph zur Ikosaedergruppe I der Ordnung 60 (bzw. isomorph zur alternierenden Gruppe A_5, d.h. der Gruppe aller geraden Permutationen von fünf Elementen). Es entspricht dabei x einer Drehung um eine Ecke des Ikosaeders, y einer Drehung um einen Dreiecks-Mittelpunkt und xy einer Drehung um einen Kanten-Mittelpunkt. Diese Beschreibung geht bereits auf HAMILTON 1856 zurück, vgl. dazu Abschnitt 5.67 in H.S.M.COXETER, W.O.J.MOSER, *Generators and Relations for Discrete Groups*, 4th ed. 1968, Springer.

WARNUNG: Es ist keineswegs so, dass eine freie Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden und Relationen endlich sein muss. Oft ist es sogar schwierig oder unmöglich, dies zu entscheiden (das sog. *Wortproblem* spielt hier eine Rolle).

Weitere Beispiele von Fundamentalgruppen:

1. S^n (n–Sphäre), $n \geq 2$. Jeder geschlossene Weg ist auf einen Punkt zusammenziehbar, also $\pi(S^n) \cong \{1\}$. *Beachte aber:* $\pi(S^1) \cong \mathbb{Z}$, s. 2.29.

2. Die Fundamentalgruppe eines offenen oder abgeschlossenen Balles $B^n_\varepsilon(x)$ im $\mathbb{R}^n$ ist trivial (Bälle sind sogar kontrahierbar, mit dem gleichen Argument wie in dem ersten Beispiel nach 2.2).

3. Betrachte $B^2 \subset \mathbb{R}^2$ mit der Identifikation von je zwei Antipoden auf dem Rand, s. Abbildung 2.4. Dies ist ein Modell der reellen projektiven Ebene $P^2(\mathbb{R})$. Der "halbe Rand" α ist ein geschlossener Weg. Demnach definiert

α eine Homotopieklasse, also ein Element der Fundamentalgruppe. Es ist $[\alpha] \neq 1$. Jedoch gilt

$$[\alpha] \cdot [\alpha] = [\alpha * \alpha] = 1,$$

was man an Abbildung 2.4 ablesen kann. Das heißt: Für die Fundamentalgruppe dieses Raumes gilt

$$\pi \cong \langle [\alpha] \;\Big|\; [\alpha]^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

Analog geht dies mit n Teilstücken auf dem Rand und entsprechender Identifikation von je n Punkten. Dann gilt für die Fundamentalgruppe

$$\pi \cong \langle [\alpha] \;\Big|\; [\alpha]^n = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_n.$$

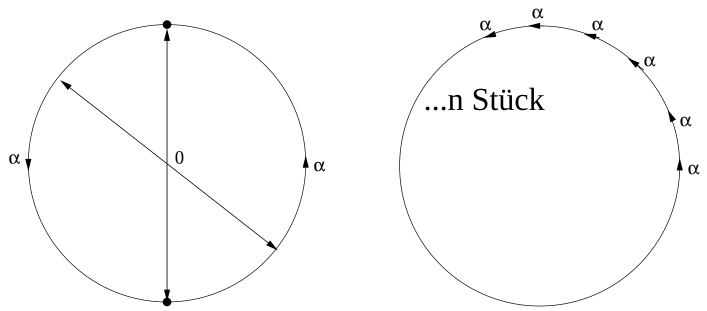


Abbildung 2.4: Kreisscheibenmodell für die reelle projektive Ebene (links) und analoge Konstruktion für n Teile auf dem Rand (rechts)

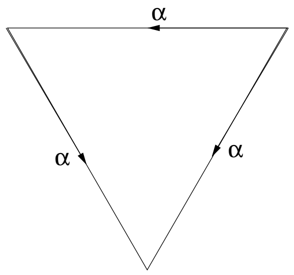


Abbildung 2.5: Der Hut des Topologen (engl.: "dunce hat")

4. Der Hut des Topologen, s. Abbildung 2.5. Die Fundamentalgruppe dieses Raumes ist

$$\pi \cong \langle [\alpha] \;\Big|\; [\alpha]^2[\alpha]^{-1} = 1 \rangle \cong \{1\}.$$

Tatsächlich ist dieser Raum kontrahierbar, obwohl man dies nicht auf den ersten Blick sieht.

5. Der Torus hat die Fundamentalgruppe

$$\pi = \langle [\alpha], [\beta] \;\Big|\; \underbrace{[\alpha][\beta][\alpha]^{-1}[\beta]^{-1} = 1}_{[\alpha][\beta]=[\beta][\alpha]} \;\rangle \cong \mathbb{Z}^2,$$

d.h. die freie abelsche Gruppe mit 2 Erzeugenden. Die einzige Relation definiert gerade die Kommutativität.

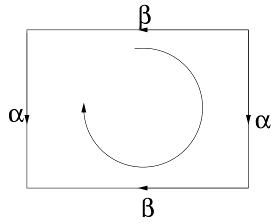


Abbildung 2.6: Torus $S^1 \times S^1$ mit Fundamentalgruppe $\mathbb{Z}^2$

6. Allgemein gilt:

$$\pi(X \times Y) \cong \pi(X) \times \pi(Y),$$

wobei auf der linken Seite das topologische Produkt steht, auf der rechten Seite das Produkt von Gruppen. Dieser Isomorphismus ist wie folgt gegeben:

$$c : [0,1] \longrightarrow X \times Y, \quad c(s) = (c_1(s), c_2(s))$$

$$\pi(X \times Y) \longrightarrow \pi(X) \times \pi(Y), \quad \text{wobei} \quad [c] \longmapsto ([c_1], [c_2])$$

Folgerung:

$$\pi(S^1 \times S^1) \cong \pi(S^1) \times \pi(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

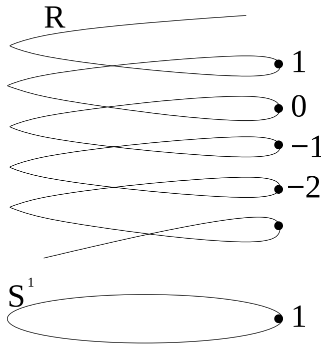
Allgemeiner ist jede endlich erzeugte abelsche Gruppe als Fundamentalgruppe eines endlichen Produkts darstellbar. Als Faktoren benötigt man nur S^1 für $\mathbb{Z}$, $P^2(\mathbb{R})$ für $\mathbb{Z}_2$ sowie die obigen Beispiele mit zyklischer Fundamentalgruppe $\mathbb{Z}_n$.

7. Jede freie Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden und Relationen ist Fundamentalgruppe eines zwei-dimensionalen topologischen Raumes. Man gewinnt ihn aus dem Kleeblatt von hinreichend vielen Kopien von S^1 (entsprechend der Zahl der Erzeugenden) und realisiert dann jede Relation durch eine eingeklebte Kreisscheibe mit vorgegebenem Rand, entsprechend der Relation.

Die naheliegende Frage, ob und wie man $\pi(U \cup V)$ allein aus $\pi(U), \pi(V)$ und $\pi(U \cap V)$ berechnen kann, wird im wesentlichen durch den Satz von Seifert und van Kampen beantwortet in 3.9.

2D Überlagerungen, Liftung von Homotopien

Ein wichtiges Beispiel:



Überlagerung $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ mit $\exp(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = e^{2\pi i t}$

Dabei ist das Bild eines geschlossenen Weges stets geschlossen, aber auch das Bild eines nicht geschlossenen Weges kann geschlossen werden, wenn Anfangs- und Endpunkt in $\mathbb{R}$ eine ganzzahlige Differenz haben. Der Effekt ist also der folgende: Es entstehen nach Anwendung der Abbildung mehr geschlossene Wege als vorher, weil ja gewisse Punkte identifiziert werden. Diese Abbildung ist sozusagen der Prototyp dessen, was man eine *Überlagerung* nennt. In der angelsächsischen Literatur heißt eine Überlagerung "covering" oder "covering map". Dies ist nicht zu verwechseln mit einer Überdeckung, die ebenfalls als "covering" bezeichnet wird.

2.16 Definition *(Überlagerung)*
Sei $p\colon Y \longrightarrow X$ eine surjektive stetige Abbildung. Wir nennen X die Basis, Y den Totalraum, p die Projektion und $p^{-1}(x)$ die Faser über einem Punkt $x \in X$ in der Basis. Die Abbildung $p\colon Y \longrightarrow X$ heißt trivial (oder genauer: triviale Faserung), falls ein topologischer Raum F existiert und ein Homöomorphismus $Y \cong X \times F$, der das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, leftrightarrow, "\cong"] \arrow[d, "p"] & X \times F \arrow[dl, "Projektion"] \\ X & \end{tikzcd}$$

p heißt lokal trivial (oder genauer: lokal triviale Faserung), falls dies lokal gilt, d.h. wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ besitzt, so daß

$$p\big|_{p^{-1}(U)}\colon p^{-1}(U) \longrightarrow U$$

trivial ist. Dann ist insbesondere $p^{-1}(U) \cong U \times F$, und es gilt $F := p^{-1}(x) \cong p^{-1}(y)$ für alle $x, y \in X$, falls X zusammenhängend ist.

p heißt Überlagerung, falls p lokal trivial ist und wenn alle Fasern $p^{-1}(x)$ diskrete Räume sind. Das letztere bedeutet, dass die Fasern die diskrete Topologie tragen in der Spurtopologie, die von Y induziert wird.

Falls X zusammenhängend ist, dann ist die Kardinalität der Fasern konstant über X. Sie heißt die Blätterzahl von p, und p heißt auch eine k–blättrige Überlagerung, falls diese Blätterzahl endlich und gleich k ist. In diesem Fall ist das Urbild der obigen Umgebung U eine disjunkte Vereinigung von k Kopien davon, und p ist, eingeschränkt auf jeder Kopie einzeln, ein Homöomorphismus.

Beispiele:

1. Die eingangs erwähnte Exponentialabbildung $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ ist eine Überlagerung mit der diskreten Faser $\mathbb{Z}$ (plus Konstante).

   Analog ist der n–Torus das Bild unter einer Überlagerung: $\mathbb{R}^n \longrightarrow (S^1)^n$ mit $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (e^{ix_1}, \ldots, e^{ix_n})$. Dabei ist die Faser ebenfalls diskret und gleich $\mathbb{Z}^n$ (plus einem konstanten Vektor).

2. Die Parallelfläche eines Möbiusbandes (eingebettet in den $\mathbb{R}^3$) definiert eine 2–blättrige Überlagerung. Das Möbiusband selbst ist der Totalraum einer lokal trivialen, aber nicht trivialen, Faserung mit Basis S^1 (der *Seele* des Möbiusbandes) und einem Intervall als Faser.

3. Die kanonische Projektion $p : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ ist trivial im Sinne von 2.16. Das gilt auch für die Projektion

   $$p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

   $$(x, V) \longrightarrow x,$$

   wobei V Tangentialvektor in x ist. Dagegen ist die Einschränkung von p auf Punkte $x \in S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ und solche Vektoren V, die tangential sind (d.h. $\langle x, V\rangle = 0$), nur lokal trivial, aber nicht trivial. (Das ist der Satz von der *Nichtkämmbarkeit des Igels*, vgl. Ossa, Satz 1.6.2).

4. Die Zuordnung $\mathbb{C} \ni z \xmapsto{p_k} z^k \in \mathbb{C}, k = 1, 2, \ldots$ definiert eine Überlagerung

   $$p_k\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Die Faser ist dabei diskret mit k Elementen, sozusagen die k-te Wurzel im Komplexen. Aber für $k \geq 2$ ist $p_k : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ keine Überlagerung, weil der Nullpunkt keine Umgebung besitzt, so dass dort p trivial ist. (Man sagt: Der Nullpunkt ist ein Verzweigungspunkt, und $p_k : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ nennt man eine verzweigte Überlagerung.)

5. Die Hopf–Abbildung $h : S^3 \longrightarrow S^2$ ist eine lokal triviale Faserung. Zu ihrer Definition benutzen wir komplexe Zahlen und schreiben die 3-Sphäre als

$$S^3 := \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid z\bar{z} + w\bar{w} = 1\}$$

sowie die 2-Sphäre als Riemannsche Zahlenkugel $S^2 := \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Definiere nun

$$h(z,w) := \frac{z}{w}, \quad \text{wobei } \frac{z}{0} := \infty \quad \text{für } z \neq 0.$$

Dann gilt $h(e^{i\theta}z, e^{i\theta}w) = h(z,w)$ für alle reellen θ, also bildet h jeweils einen ganzen Kreis auf einen Punkt ab. Für festes (z,w) ist die Faser $\{(e^{i\theta}z, e^{i\theta}w) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ über (z,w) ein Kreis, genannt Hopf–Kreis. In dem durch konstantes $|z|, |w|$ definierten Torus heißen diese Kreise auch Villarceau–Kreise. Auf diese Weise kann man die Riemannsche Zahlenkugel mit der Menge der komplexen Geraden im $\mathbb{C}^2$ identifizieren, die durch den Ursprung gehen, also mit der *komplexen projektiven Geraden*: $P^1(\mathbb{C}) = \widehat{\mathbb{C}} \cong S^2$.

h ist surjektiv, denn:

$$h(1,0) = \infty \quad \text{und} \quad h\Big(\frac{z}{\sqrt{1+z\bar{z}}}\,,\ \frac{1}{\sqrt{1+z\bar{z}}}\Big) = z \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

h ist lokal trivial, denn das Urbild einer jeden Kreisscheibe B^2 (bzw. einer Hemisphäre in der Zahlenkugel) ist ein Volltorus (homöomorph zu $B^2 \times S^1$).

6. Ein berühmtes Beispiel einer Überlagerung ist die Quotientenabbildung $S^3 \to S^3/\widetilde{I}$, wobei $\widetilde{I}$ die *binäre Ikosaedergruppe* als Untergruppe der Einheitsquaternionen $S^3 \subset \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ ist. Der Quotient ist die *Poincaré-Sphäre*, auch *sphärischer Dodekaederraum* genannt. Deren Fundamentalgruppe ist dann insbesondere isomorph zu $\widetilde{I}$, eine Gruppe der Ordnung 120 mit trivialer Kommutator-Faktorgruppe, vgl. Seifert-Threlfall, §62. Eine Quotientengruppe (als 2-facher Quotient, d.h. es werden jeweils Paare von Elementen identifiziert) von $\widetilde{I}$ ist isomorph zur Ikosaedergruppe $I \cong A_5$, daher der Name. Abstrakt gilt $\widetilde{I} = \langle\, x, y \mid x^5 = y^3 = (xy)^2 \,\rangle$, vgl. die Beispiele nach 2.15.

2.17 Satz *(Hochheben oder Liften von Wegen):*
$p : Y \longrightarrow X$ sei eine Überlagerung, $c : [0,1] \longrightarrow X$ sei ein Weg. Dann gibt es zu jedem y_0 mit $p(y_0) = c(0)$ genau einen Weg $\widetilde{c} : [0,1] \longrightarrow Y$ mit $\widetilde{c}(0) = y_0$ und $p \circ \widetilde{c} = c$. Dieses $\widetilde{c}$ heißt Hochhebung oder Liftung von c.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "p"] & \\ {[0,1]} \arrow[u, "\exists! \tilde{c}"] \arrow[r, "c"] & X \end{tikzcd}$$

Beweis: Lokal ist dies klar: Wähle $U \subseteq X$ so, dass $p : p^{-1}(U) \longrightarrow U$ trivial ist, also $p^{-1}(U) \cong U \times F$ mit diskreter Faser F. Damit gibt es zu c in jedem Blatt $U \times \{f_0\}$ genau eine Liftung, weil f_0 konstant bleiben muss (eine stetige Abbildung von einem zusammenhängenden Raum in einen diskreten Raum ist notwendig konstant nach 1.18).

Damit existiert in einer jeden solchen Umgebung von $c(0)$ genau eine Liftung $\widetilde{c}$ von c. Entsprechendes gilt in einer solchen Umgebung jedes Punktes $c(t)$.

Eindeutigkeit: $\widetilde{c}_1$ und $\widetilde{c}_2$ seien Liftungen von c mit $\widetilde{c}_1(0) = \widetilde{c}_2(0)$. Die Menge aller $t \in [0,1]$ mit $\widetilde{c}_1(t) = \widetilde{c}_2(t)$ ist dann einerseits abgeschlossen in $[0,1]$, andererseits auch offen. Also stimmt sie mit $[0,1]$ überein.

Existenz: Die Menge aller $t \in [0,1]$, für die eine Liftung $\tilde{c} : [0,t] \longrightarrow Y$ existiert, ist nicht leer, weil $t = 0$ dazu gehört. t_0 sei das Supremum dieser Menge.

1) Falls $t_0 = 1$ ist nichts zu zeigen.

2) Falls $t_0 < 1$, wähle eine Liftung von $c\big|_{[t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon]}$ für geeignete $\varepsilon > 0$ (das ist möglich, da lokal trivial). Dann kann man für jedes $\tau \in [t_0 - \varepsilon, \ \ t_0]$ die beiden Liftungen zusammensetzen. Dann ist t_0 *nicht* das Supremum. Widerspruch.

Bemerkung: Man hat die freie Wahl von $\widetilde{c}(0)$, wenn nur $p(\widetilde{c}(0)) = c(0)$. □

Ganz analog kann man auch Homotopien liften:

2.18 Satz *(Hochhebung oder Liftung von Homotopien)*
p: $Y \longrightarrow X$ sei eine Überlagerung, $h : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ sei eine Homotopie zwischen h_0 und h_1 (wir schreiben $h_t(s) := h(s,t)$). Dann gibt es zu jeder Liftung $\widetilde{h}_0$ von h_0 genau eine Liftung $\widetilde{h}$ von h, die $\widetilde{h}_0$ fortsetzt (d.h. $p \circ \widetilde{h} = h$ und $\widetilde{h}(s,0) = \widetilde{h}_0(s)$).

Beweis: Für jedes feste t existiert eine eindeutige Liftung $\widetilde{h}_t$ von h_t nach 2.17, und für festes s folgt ebenso, dass $h(s,-)$ eine eindeutige Liftung $\widetilde{h}(s,-)$ besitzt. Die Frage ist nur noch, ob $\widetilde{h}$ stetig von s **und** t abhängt. Das zeigt man wieder in einer Umgebung U, in welcher $p_|: p^{-1}(U) \to U$ trivial ist.

2.19 Folgerung *Falls zwei geschlossene Wege c_1, c_2 in X geschlossen homotop sind, so haben die beiden Liftungen $\widetilde{c}_1$, $\widetilde{c}_2$ zum gleichen Anfangspunkt auch den gleichen Endpunkt.*

Beweis: Falls nicht, könnten die Homotopien zwischen ihnen nicht geliftet werden. Die "Endpunktabbildung" $t \mapsto \widetilde{h}_t(1)$ der gelifteten Homotopie ist eine stetige Abbildung von $[0,1]$ in die Faser hinein. Sie ist daher konstant, weil die Faser die diskrete Topologie trägt.

2.20 Folgerung *$p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ sei eine Überlagerung mit $p(y_0) = x_0$. Als stetige Abbildung induziert p nach 2.11 einen Gruppenhomomorphismus $p_* : \pi(Y, y_0) \longrightarrow \pi(X, x_0)$. Dann ist p_* injektiv.*

Also induziert jede Überlagerung p über der Basis (X, x_0) eine Untergruppe von $\pi(X, x_0)$, nämlich das Bild unter p_*. Diese Untergruppe nennt man die charakteristische Untergruppe der Überlagerung.

Bemerkung: Falls $\pi(X, x_0)$ endlich ist, so ist die Blätterzahl der Überlagerung auch endlich und gleich dem *Index* der charakteristischen Untergruppe in $\pi(X, x_0)$, also der Zahl der Nebenklassen.

Ein Beispiel dazu:

$$p_k : S^1 \longrightarrow S^1$$
$$e^{i\nu} \longrightarrow e^{ki\nu} = (e^{i\nu})^k$$

Dies ist eine k–blättrige Überlagerung. Der induzierte Homomorphismus

$$(p_k)_* : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ist einfach die Multiplikation mit k, also $x \longmapsto k{\cdot}x$. Die zugehörige charakteristische Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ist also $k\mathbb{Z}$ (alle durch k teilbaren Zahlen) mit Index $k = |\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}_k|$. Das gilt analog auch für den Torus mit Überlagerungsabbildung von $\mathbb{R}^2$. Auch der Torus überlagert sich selbst, z.B. $p_{k,l}(e^{im}, e^{in}) = (e^{ikm}, e^{iln})$. Dies ist eine $(k \cdot l)$-blättrige Überlagerung mit $(p_{k,l})_*(m,n) = (km, ln)$. Die charakteristische Untergruppe ist also isomorph zu $k\mathbb{Z} \times l\mathbb{Z}$ mit Index $k \cdot l$. Analog kann man ganzzahlige invertierbare Matrizen auf dem Torus wirken lassen.

Kurz: *Eine Hierarchie von Überlagerungen induziert eine Hierarchie von Untergruppen.*

$$\begin{tikzcd}
 & Y_1 \arrow[dr] & \\
Z \arrow[ur] \arrow[dr] & & X \\
 & Y_2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & \pi(Y_1) \arrow[dr, "inj."] & \\
\pi(Z) \arrow[ur, "inj."] \arrow[dr, "inj."'] & & \pi(X) \\
 & \pi(Y_2) \arrow[ur, "inj."'] &
\end{tikzcd}$$

2E Die Hierarchie von Überlagerungen und die universelle Überlagerung

Man kann sich nun fragen, ob man die letztgenannte Tatsache umkehren kann. Dies führt zu folgender

Vermutung: Zu jeder Untergruppe von G von $\pi(X, x_0)$ gibt es eine Überlagerung

$$p_G : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0),$$

die diese Untergruppe als charakteristische Untergruppe induziert, also

$$(p_G)_*(\pi(Y, y_0)) \cong G \subseteq \pi(X, x_0).$$

2.21 Definition *Ein Raum X heißt semi–lokal einfach zusammenhängend, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U hat, so dass $\pi(U, x) \longrightarrow \pi(X, x)$ der triviale Homomorphismus ist.*

Tatsächlich ist oben formulierte Vermutung richtig, wenn an (X, x_0) die richtigen Voraussetzungen gestellt werden, denn es gilt der folgende

2.22 Satz *Es sei (X, x_0) wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend und außerdem semi–lokal einfach zusammenhängend. Dann existiert zu jeder Untergruppe $G \subset \pi(X, x_0)$ eine Überlagerung, die G als charakteristische Untergruppe hat.*

Zum Beweis s. Schubert, III 6.7. Der Beweis ist recht lang. Wir wollen hier nur den Fall $G = \{1\}$ näher betrachten und die universelle Überlagerung konstruieren:

2.23 Satz *(universelle Überlagerung)*
Der topologische Raum (X, x_0) sei wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und außerdem semi–lokal einfach zusammenhängend.
Dann existiert eine Überlagerung $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$, so dass der Totalraum $\widetilde{X}$ einfach zusammenhängend ist, d.h. eine einelementige (triviale) Fundamentalgruppe besitzt. Sie heißt die universelle Überlagerung von X und ist eindeutig bis auf die Wahl des Basispunktes $\widetilde{x}_0$.

Beweis: Wir definieren $Y = \widetilde{X}$ als die Menge aller Paare $(x, [c])$, wobei x alle Punkte von X durchläuft und $[c]$ alle Homotopieklassen von Wegen $c\colon [0,1] \to X$ mit $c(0) = x_0,\ c(1) = x$, wobei die Homotopieklassen mit festgehaltenem Anfangs- und Endpunkt zu nehmen sind (also keine freie Homotopie). Je zwei solche Homotopieklassen unterscheiden sich gerade um ein Element der Fundamentalgruppe $\pi(X, x_0)$. Es wird also jeder Punkt x aufgespalten in so viele Punkte, wie die Fundamentalgruppe Elemente hat. Als Basispunkt y_0 wählen wir $y_0 = (x_0, [x_0])$ mit dem konstanten Weg x_0 (hier könnte man auch eine andere Wahl treffen). Die Überlagerungsabbildung p ordnet dann jedem Paar $(x, [c]) \in Y$ den Punkt $x \in X$ zu. Offenbar sind die lokalen topologischen Eigenschaften von Y die gleichen wie die von X, und auch Y ist wegzusammenhängend, weil man jeden Punkt $y = (x, [c])$ mit y_0 verbinden kann durch den Weg c^{-1}.

Zu zeigen bleibt:

1. p ist eine Überlagerung,
2. Die Fundamentalgruppe von Y ist trivial.

Zum Beweis von 1. wählen wir eine Umgebung U eines gegebenen Punktes $x \in X$, so dass jeder geschlossene Weg in U nullhomotop in X ist. Diese existiert nach Voraussetzung. Je zwei geschlossene Wege in U werden also zu Wegen in $p^{-1}(U)$ geliftet mit gleichen Endpunkten, wenn die Anfangspunkte gleich sind. Die Liftung selbst hängt natürlich von der Wahl des Anfangspunktes in der Faser ab. Folglich besteht das Urbild $p^{-1}(U)$ dann aus Kopien, die homöomorph zu U sind (jeweils vermöge der Einschränkung von p). Jedes Element von $\pi(X, x_0)$ bestimmt genau eine solche Kopie. Damit ist p lokal trivial, und die Faser über jedem Punkt x steht offensichtlich in natürlicher Bijektion zu $\pi(X, x_0)$.

Zum Beweis von 2. betrachten wir eine Homotopieklasse $[c]$ von geschlossenen Wegen in Y, also ein Element von $\pi(Y, y_0)$. Es gilt somit $c(0) = c(1) = y_0$ und folglich $p(c(0)) = p(c(1)) = x_0$. Wegen der Injektivität der Abbildung p_* ist die

Homotopieklasse $p_*([c]) = [p \circ c]$ genau dann trivial, wenn $[c]$ trivial ist. Wenn nun $[p \circ c]$ nicht trivial wäre, dann wäre die eindeutige Liftung $\widetilde{p \circ c}$ nach Y ein nicht geschlossener Weg. Dieser würde zum Beispiel in $y_0 = (x_0, [x_0])$ beginnen und in $(x_0, [c])$ enden. Nach Voraussetzung ist aber c geschlossen in Y. $\square$

Die universelle Überlagerung heißt aus naheliegendem Grunde auch *einfach zusammenhängende Überlagerung*. Der Name *universell* kommt daher, dass sie in der Tat als Überlagerung ganz oben in der Hierarchie steht mit der folgenden universellen Eigenschaft:

2.24 Satz *Der topologische Raum X erfülle die Voraussetzungen aus Satz 2.23, und $p_Y\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ sei eine Überlagerung. Dann gibt es eine eindeutige Überlagerung $\widetilde{p_Y}\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \to (Y, y_0)$ derart, dass p mit der Komposition von $\widetilde{p_Y}$ und p_Y übereinstimmt, also $p = p_Y \circ \widetilde{p_Y}$ gilt und demnach folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "p_Y"] & \\ \widetilde{X} \arrow[u, "\exists! \widetilde{p_Y}"] \arrow[r, "p"'] & X \end{tikzcd}$$

2.25 Definition *(Decktransformation)*
$p\colon Y \to X$ sei eine Überlagerung. Ein Homöomorphismus $f\colon Y \to Y$ heißt eine <u>Decktransformation</u>, wenn f die Fasern von p respektiert, also wenn $p \circ f = p$ gilt und demnach folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[dl, "p"] \\ X & \end{tikzcd}$$

2.26 Lemma *Wenn Y zusammenhängend ist und wenn eine Decktransformation $f\colon Y \to Y$ in einer Faser einen Fixpunkt hat, dann ist sie in dieser Faser (und sogar auf dem ganzen Totalraum) die Identität. Mit anderen Worten: Eine nicht-identische Decktransformation operiert fixpunktfrei auf dem Totalraum der Überlagerung.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die Menge der Fixpunkte offen ist. Es sei $f: Y \to Y$ eine Decktransformation mit einem Fixpunkt y, d.h. $f(y) = y$. U sei eine zusammenhängende offene Umgebung von $p(y)$ mit $p^{-1}(U) \cong F \times U$, vgl. 2.16. U_y sei diejenige Komponente von $p^{-1}(U)$, die y enthält. Nun bleibt ein Punkt von U_y unter f fix, nämlich y selbst. Wegen der Stetigkeit müssen dann alle Punkte von U_y in U_y hinein abgebildet werden. Da f die Fasern bewahrt, kann kein Punkt von U_y in einen anderen Punkt abgebildet werden. Damit enthält die Fixpunktmenge von f ganz U_y, ist also offen.

Mit einem ähnlichen Argument enthält die Fixpunktmenge die ganze (Weg-)-Zusammenhangskomponente von y: Wir betrachten einen Weg c von y nach z. Die Menge $\{t \mid c(t) \text{ ist Fixpunkt}\}$ ist offen nach dem oben Gesagten und außerdem abgeschlossen, weil der Grenzwert einer Folge von Fixpunkten wie oben eine zusammenhängende Umgebung hat, die Fixpunkte enthält und folglich nur aus Fixpunkten bestehen kann. Da Y zusammenhängend ist, ist folglich die Fixpunktmenge der ganze Raum. $\square$

2.27 Lemma *Jede Decktransformation der universellen Überlagerung $p: \widetilde{X} \to X$ induziert eindeutig ein Element von $\pi(X)$ und umgekehrt.*

Beweis: Jeder geschlossene Weg c in X mit Basispunkt x_0 besitzt für jede Wahl eines Anfangspunktes $y \in p^{-1}(c(0))$ eine eindeutige Liftung $\widetilde{c}$ mit $\widetilde{c}(0) = y$. Die Endpunktabbildung $\widetilde{c}(1) = z$ dieser Liftung definiert dann eine Decktransformation mit $y \mapsto z$, die nur von der Homotopieklasse von c abhängt..

Umgekehrt: Wir betrachten eine Decktransformation f, die zwei Punkte y, z in der Faser über dem Basispunkt x_0 ineinander abbildet, d.h. $z = f(y)$ und $p(y) = p(z) = x_0$. Es sei c ein beliebiger stetiger Weg in $\widetilde{X}$ von y nach z. Dann ist $p \circ c$ ein geschlossener Weg und bestimmt folglich ein Element $[p \circ c] \in \pi(X, x_0)$. Diese Homotopieklasse von der Wahl von c unabhängig. Wir zeigen, dass sie auch von der Wahl von y, z unabhängig ist: Es sei c_1 ein Weg von y_1 nach $z_1 = f(y_1)$ und c_2 ein Weg von y_2 nach $z_2 = f(y_2)$. Die Endpunktabbildung der Liftung von $[p \circ c_2]^{-1}$ ist eine Decktransformation, die z_2 in y_2 abbildet. Ihre Komposition mit f hat also den Fixpunkt y_2 und ist nach Lemma 2.26 die Identität. Damit muss diese Endpunktabbildung auch z_1 in y_1 abbilden, und dies impliziert $[p \circ c_1] = [p \circ c_2]$.

Nach Konstruktion sind diese beiden Zuordnungen zwischen der Fundamentalgruppe einerseits und der Decktransformationsgruppe andererseits invers zueinander, also insbesondere bijektiv.

$\square$

2.28 Folgerung *(Decktransformationsgruppe)*
Die Menge aller Decktransformationen ist eine Gruppe. Ist $p\colon \widetilde{X} \to X$ die universelle Überlagerung, dann ist diese Gruppe isomorph zur Fundamentalgruppe von X.

2.29 Folgerung *Die Fundamentalgruppe von S^1 ist isomorph zu $\mathbb{Z}$.*

Beweis: Die Decktransformationsgruppe der universellen Überlagerung $\mathbb{R} \to S^1$ ist offensichtlich isomorph zur Gruppe aller Translationen $\{T_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ mit $T_k(x) = x + k \cdot 2\pi$. Also ist sie wegen $T_k \circ T_l = T_{k+l}$ auch isomorph zur additiven Gruppe $\mathbb{Z}$ selbst. Nach 2.28 ist sie isomorph zur Fundamentalgruppe von S^1. □

2.30 Folgerung *Insbesondere sind die abgeschlossene Kreisscheibe $B^2 \subset \mathbb{R}^2$ und ihr Rand S^1 nicht homotopie-äquivalent. Es gibt nicht einmal eine stetige Abbildung $f\colon B^2 \to S^1$, die den Rand punktweise festhält, d.h. $f(x) = x$ für $x \in S^1$. Man sagt dazu auch: S^1 ist kein Retrakt von B^2.*

Denn anderenfalls wäre die Komposition $S^1 \xrightarrow{inkl} B^2 \xrightarrow{f} S^1$ die Identität und würde folglich den identischen Homomorphismus von $\pi(S^1) \cong \mathbb{Z}$ in sich induzieren. Es ist aber $\pi(B^2) \cong 1$. Somit wäre dieser Homomorphismus trivial.

Bemerkung: Zu jeder Untergruppe G von $\pi(X)$ gibt es eine Überlagerung, deren charakteristische Untergruppe isomorph zu G ist. Falls G zusätzlich ein Normalteiler ist, dann ist $\pi(X)/G$ isomorph zur Gruppe aller Decktransformationen. Eine solche Überlagerung heißt deshalb auch eine *normale Überlagerung* oder eine *reguläre Überlagerung*, vgl. SCHUBERT, III 6.6.

Kapitel 3

Geometrische Topologie

Literatur zu diesem Kapitel:
– M.A.Armstrong, *Basic Topology*, Chapter 7
– W.Massey, *Algebraic Topology, an Introduction*, Chap.1, Springer 1977
– E.Ossa, *Topologie*, 3.8
– V.G.Boltjanskij, V.A.Efremovič, *Anschauliche kombinatorische Topologie*, Vieweg 1986
– L.C.Kinsey, *Topology of Surfaces*, Springer 1991
– V.V.Prasolov, *Intuitive Topology*, AMS 1995 (Mathematical World, Volume 4)
– H.Seifert, W.Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*
– J.Stillwell, *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*, Springer 1980 (weiterführendes Werk, geht über den Rahmen dieser Vorlesung hinaus)

Wie der Name schon sagt, beschäftigt sich die geometrische Topologie mit solchen topologischen Objekten, die auch eine geometrische (oft anschauliche) Bedeutung haben, z.B. Kurven und Flächen. Diese kann man abstrakt studieren hinsichtlich des Homöomorphieproblems, oder man kann Einbettungen in höher-dimensionale euklidische Räume und das zugehörige Äquivalenzproblem betrachten, z.B. Isotopie: *welche Einbettungen lassen sich ineinander durch eine stetige Schar von Einbettungen überführen?* Beide Aspekte liefern interessante topologische Erkenntnisse. Zum Beispiel ist der berühmte Jordansche Kurvensatz ein Satz der geometrischen Topologie. Zuerst wollen wir uns aber den abstrakten topologischen Typen zuwenden. Die Kurven sind hierbei wenig ergiebig, denn ein zusammenhängender Hausdorff–Raum, der lokal homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist (eine sogenannte 1-*dimensionale Mannigfaltigkeit*), ist entweder homöomorph zu $\mathbb{R}$ selbst oder aber homöomorph zum Kreis S^1. Daher studieren wir gleich die 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten.

3A Flächen als Objekte der Topologie

3.1 Definition *(Fläche)*
Eine Fläche X ist ein (weg-)zusammenhängender Hausdorff–Raum, der lokal homöomorph zum $\mathbb{R}^2$ ist.

Genauer heißt das: Zu jedem $x \in X$ gibt es eine Umgebung $U(x)$, die homöomorph zur offenen Kreisscheibe $B^2 = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid ||y|| < 1\}$ in der Standardtopologie ist (beachte $B^2 \cong \mathbb{R}^2$). Man nennt das zur besseren Unterscheidung auch eine Fläche ohne Rand.

Eine Fläche mit Rand ist ein zusammenhängender Hausdorff–Raum X, so dass jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung besitzt, die homöomorph ist zu einem der beiden Fälle

1. *B^2 (Kreisscheibe),*
2. *$B^2_+ = \{(x_1, x_2) \in B^2 \mid x_2 \geq 0\} \cong \mathbb{R} \times [0, \infty)$ (halbe Kreisscheibe).*

Die Menge aller Punkte, für die nur die Bedingung 2 zutrifft (und nicht 1), heißt der Rand ∂X von X.

Analog erhält man den Begriff einer n–dimensionalen Mannigfaltigkeit, wenn die Dimension 2 durch n ersetzt wird und B^2 durch B^n sowie B^2_+ durch $B^n_+ \cong \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$.

Beispiele:

(i) Die 2–dimensionale Sphäre $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid ||x|| = 1\}$ ist eine kompakte Fläche (ohne Rand).

(ii) *Der Torus* $S^1 \times S^1 (\cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$ ist eine kompakte Fläche (ohne Rand).

(iii) *Der Zylinder* $[0, 1] \times S^1$ ist eine kompakte Fläche mit Rand $\{0, 1\} \times S^1$.

(iv) *Das Möbiusband* $[0, 1] \times [0, 1]/_\sim$ mit $(0, x) \sim (1, 1 - x)$ für alle x ist eine kompakte Fläche mit Rand, wobei der Rand homöomorph zum Kreis S^1 ist. Insbesondere ist der Rand seinerseits zusammenhängend. Er besteht aus $[0, 1] \times \{0, 1\}$ mit Identifikation $(0, 1) \sim (1, 0), (0, 0) \sim (1, 1)$. Die "Seele" des Möbiusbandes ist dabei die geschlossene Kurve $[0, 1] \times \{\frac{1}{2}\}$ mit der Identifikation $(0, \frac{1}{2}) \sim (1, \frac{1}{2})$.

(v) *Die reelle projektive Ebene* $\mathbb{R}P^2 := S^2/_\pm$ ist eine kompakte Fläche, vgl. Beispiel d) nach 1.5.

(vi) *Die Kleinsche Flasche* $\mathbb{K} := S^1 \times S^1/_\sim$ mit

$$\left(e^{i\varphi}, e^{i\theta}\right) \sim \left(e^{i(\varphi+\pi)}, \quad e^{i(2\pi-\theta)}\right), \quad 0 \leq \varphi, \theta \leq 2\pi$$

ist eine kompakte Fläche mit einer 2–blättrigen Überlagerung $S^1 \times S^1 \longrightarrow K$. Die betreffende Decktransformation auf dem Torus $\{\left(e^{i\varphi}, e^{i\theta}\right)\}$ ist geometrisch die Gleitspiegelung $(\varphi, \theta) \mapsto (\varphi + \pi, -\theta)$.

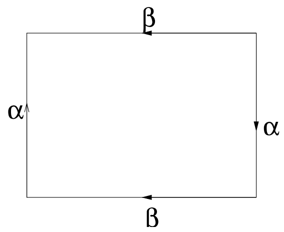


Abbildung 3.1: Fundamentalbereich der Kleinschen Flasche

Flächen mit Rand kann man längs ihrer gemeinsamen Ränder verkleben in dem Sinne, dass man bei der disjunkten Vereinigung je eine Randkomponente der einen mit einer der anderen punktweise identifiziert und dann den Raum mit der Quotiententopologie versieht. Dazu braucht man nur einen Homöomorphismus zwischen den jeweiligen Randkomponenten vorzugeben.

Genauer: M_1, M_2 seien zwei Flächen mit je einer Randkomponente

$$\partial M_1 \cong S^1 \cong \partial M_2.$$

Als Verklebung betrachten wir

$$M := M_1 \dot{\cup} M_2/_\sim,$$

wobei $x \in \partial M_1$ und $y \in \partial M_2$ äquivalent sind, falls gilt, $y = h(x)$, mit einem Homöomorphismus h zwischen den beiden Rändern. Auf die Wahl dieses Homöomorphismus kommt es dabei nicht wirklich an.

Als Beispiel haben wir:

3.2 Lemma *Die Sphäre ist homöomorph zur Verklebung zweier Kreisscheiben längs ihrer Ränder.*

Die Kleinsche Flasche K ist homöomorph zur Verklebung zweier Möbiusbänder längs ihrer Ränder.

Die Verklebung einer Kreisscheibe mit einem Möbiusband ist homöomorph zur projektiven Ebene.

Beweisskizze: Für die Sphäre ist das offensichtlich: Man betrachte die Kreisscheiben als obere bzw. untere Hemisphäre. Für die Kleinsche Flasche betrachte man die Zerlegung gemäß Abbildung 3.2 in die beiden Teile K_1, K_2, die durch die Bedingungen $|\theta - \pi| \leq \pi/2$ bzw. $\pi/2 \leq |\theta - \pi|$ definiert sind, jeweils für $0 \leq \theta \leq 2\pi$. K_1 ist ein Möbiusband, K_2 ebenfalls. Für die projektive Ebene betrachte man das Komplement einer (kleinen) Kreisscheibe in dem Kreisscheibenmodell von S. 45. Dieses Komplement ist ein Kreisring (Zylinder), wobei der eine Rand mit sich selbst verklebt wird vermöge der Antipodenabbildung. Dies ist homöomorph zum Möbiusband. Der mit sich selbst verklebte Teil des Randes wird dabei zur "Seele" des Möbiusbandes.

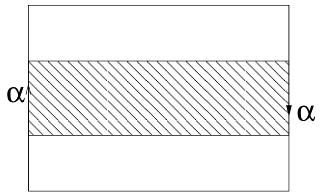


Abbildung 3.2: Die Kleinsche Flasche als Vereinigung zweier Möbiusbänder

3.3 Definition *(zusammenhängende Summe)*
Für zwei Flächen X_1, X_2 definieren wir die zusammenhängende Summe

$$X = X_1 \# X_2$$

wie folgt: Wähle zwei Punkte $x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2$ mit zugehörigen abgeschlossenen Umgebungen $\overline{U_1(x_1)}$ und $\overline{U_2(x_2)}$ (beide homöomorph zur abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{B^2}$) und einen Homöomorphismus $h : \partial U_1 \longrightarrow \partial U_2$. Dabei seien U_1, U_2 selbst homöomorph zur offenen Kreisscheibe. Dann definiere

$$X_1 \# X_2 := (X_1 \setminus U_1) \cup (X_2 \setminus U_2)/_\sim$$

mit der Quotiententopologie, wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ so erklärt ist, dass $x \sim y$ genau dann gilt, wenn entweder $x = y$ gilt oder $x \in \partial U_1,\ y \in \partial U_2$ und $y = h(x)$.
Schreibweise auch:

$$X_1 \# X_2 = (X_1 \setminus U_1) \cup_h (X_2 \setminus U_2)$$

Falls $X_0 = X_1 = X_2$ schreibt man auch $X_0 \# X_0$ oder sogar $2X_0$ statt $X_1 \# X_2$.

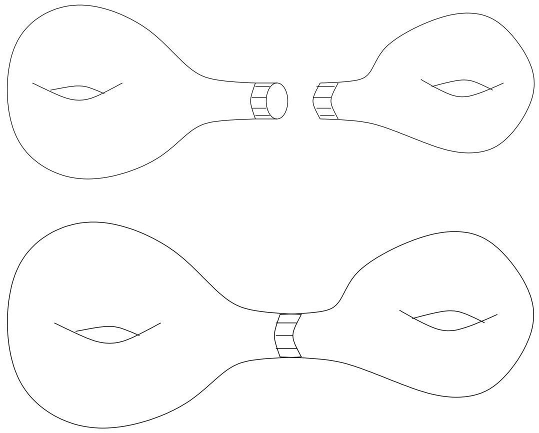


Abbildung 3.3: Die zusammenhängende Summe

<u>Zur Wohldefiniertheit:</u> Weil X_1 zusammenhängend ist, gilt für beliebige Umgebungen $U, V \subset X_1$ mit $U \cong B^2 \cong V$ stets $X_1 \setminus U \cong X_1 \setminus V$, entsprechend für X_2. Eine Beweisidee dazu ist folgende: Man kann stets eine Abstandmetrik einführen (z.B. durch Einbettungen in den euklidischen Raum). Dann wird $X_1 \setminus U \cong X_1 \setminus U_\epsilon(p)$ sowie $X_1 \setminus V \cong X_1 \setminus U_\epsilon(q)$ für zwei Punkte $p \in U, q \in V$. Wähle nun einen Weg zwischen p und q. In der (2ϵ)-Umgebung dieses Weges kann man offenbar $U_\epsilon(p)$ in $U_\epsilon(q)$ überführen durch einen Homöomorphismus. Für die Wohldefiniertheit der zusammenhängenden Summe benötigt man auch die Unabhängigkeit von der Wahl des Homöomorphismus h. Ein solcher Homöomorphismus von der einen Randkomponente $S^1 = \{e^{i\theta}\}$ in die andere Randkomponente $S^1 = \{e^{i\theta'}\}$ wird im wesentlichen gegeben durch eine streng monotone stetige Abbildung $\theta \mapsto \theta'$ mit $0 \leq \theta, \theta' \leq 2\pi$. Hier ist es auch wichtig, dass jede Fläche einen Homöomorphismus in sich zuläßt, der die Orientierung umkehrt und sozusagen den Durchlaufsinn dieser Randkomponente ∂U_1 bzw. ∂U_2 umkehrt. Dies impliziert nun die Wohldefiniertheit der zusammenhängenden Summe (das ist *auch* eine Folgerung aus dem Flächenklassifikationssatz 3.7): Der Homöomorphietyp von $X_1 \# X_2$ hängt dann nur von X_1 und X_2 ab, nicht aber von der Wahl von U_1 und U_2. Außerdem ist $X_1 \# X_2$ wieder zusammenhängend, daher der Name. Weiterhin ist $X_1 \# X_2$ kompakt, wenn X_1, X_2 beide kompakt sind. Falls eine Fläche mit Rand beteiligt ist, muss man die beteiligten Umgebungen U_1, U_2 in jedem Fall im Inneren wählen. Man kann aber auch Randkomponenten direkt verkleben, falls sie auftreten.

Bemerkung: $\#$ ist damit eine 2–stellige Operation auf die Menge aller Flächen (und aller kompakten Flächen), und sie ist kommutativ und assoziativ bis auf

Homöomorphie. Dies definiert eine gewisse algebraische Struktur.

3.4 Definition *(Modell–Flächen)*
Es bezeichne $\mathbb{T}$ einen (abstrakten) Torus und $\mathbb{P}$ eine (abstrakte) reelle projektive Ebene. Dann heißt für jede Wahl einer ganzen Zahl $g \geq 1$ die Fläche

$$\mathbb{F}_g = \underbrace{\mathbb{T}\#\mathbb{T}\#\cdots\#\mathbb{T}}_{g-mal}$$

orientierbare Fläche vom Geschlecht g, und

$$\mathbb{F}_g^* = \underbrace{\mathbb{P}\#\mathbb{P}\#\ldots\#\mathbb{P}}_{g-mal}$$

heißt nichtorientierbare Fläche vom Geschlecht $\frac{1}{2}g$.
Die Sphäre $\mathbb{F}_0 = \mathbb{S} = S^2$ heißt orientierbare Fläche vom Geschlecht null, sie fügt sich mit $g = 0$ auch formal in die obige Definition ein.

Man sagt auch oft *nichtorientierbare Fläche vom Geschlecht g* für das oben Definierte, sieht also g statt $\frac{g}{2}$ als das Geschlecht einer nichtorientierbaren Fläche an. Der Vorteil der obigen Definition liegt in Folgerung 3.6 sowie in der einheitlichen Formel für die Euler-Charakteristik in Abschnitt 3G. Als Sprechweise ist g die Anzahl der *Henkel* im orientierbaren Fall und die Anzahl der *Kreuzhauben* im nichtorientierbaren Fall.
Zusätzliche Fragen:
1. Was liefert die Anwendung von #, angewandt auf die Modellflächen, z.B. für $(T\#T)\#(\mathbb{P}\#\mathbb{P})$?
2. Welche algebraische Struktur wird durch # definiert, welche Gleichungen gelten dabei?

3.5 Lemma *Es gelten die folgenden Gleichungen (bis auf Homöomorphie):*

(i) $\mathbb{S}\#M = M$ *für alle Flächen* M

(ii) $\mathbb{T}\#\mathbb{P} = \mathbb{P}\#\mathbb{P}\#\mathbb{P}$

Beweisskizze:
(i) Für die zusammenhängende Summe mit S^2 muss man zeigen, dass sich nach Ausschneiden einer Kreisscheibe (z.B. der Hemisphäre S^2_+) und Einkleben des Komplements (z.B. der anderen Hemisphäre S^2_-) der topologische Typ der Fläche nicht ändert. Für die Wahl von S^2_+ und S^2_- ist das trivial, im allgemeinen

ist das die Frage nach der Wohldefiniertheit der zusammenhängenden Summe. Um das für den vorliegenden Fall zu präzisieren, muss man verwenden, daß das Komplement einer jeden Kreisscheibe in S^2 wieder homöomorph zu einer Kreisscheibe ist. Dies folgt z.B. auch aus dem Jordanschen Kurvensatz (Abschnitt 3C).

(ii) Für eine offene Kreisscheibe $U \subseteq \mathbb{P}$ ist $\mathbb{P} \setminus U$ homöomorph zum Möbiusband. Insbesondere enthält $\mathbb{P}$ sowie jede zusammenhängende Summe mit $\mathbb{P}$ ein Möbiusband. Die Operation $M \mapsto M\#\mathbb{T}$ ist dann topologisch äquivalent zum Aufsetzen eines sogenannten orientierbaren Henkels,

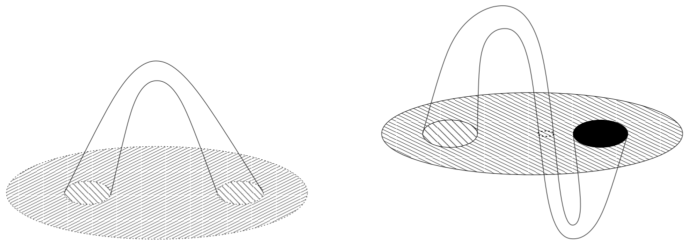


Abbildung 3.4: Orientierbarer und nichtorientierbarer Henkel

und die Operation $M \mapsto M\#(\mathbb{P}\#\mathbb{P})$ ist topologisch äquivalent zum Aufsetzen eines nicht orientierbaren Henkels. Beide können aber stetig ineinander überführt werden längs des Möbiusbandes in $\mathbb{P}$, s. Abb. 3.4.

3.6 Folgerung *Die Menge aller Modell-Flächen mit den Bausteinen $\mathbb{S}, \mathbb{P}$ und $\mathbb{T}$ aus 3.4. (und den Relationen aus 3.5.) steht in Bijektion zu der Menge*

$$\{0, 1, 2, \ldots, \} \cup \{-\tfrac{1}{2}, -1, -\tfrac{3}{2}, -2, -\tfrac{5}{2}, -3, \ldots\}$$

vermöge einer Abbildung Φ, wobei

$$\begin{aligned}
&\Phi(\mathbb{S}) = 0\\
&\Phi(\mathbb{T}) = 1\\
&\Phi(\mathbb{T}\#\mathbb{T}) = 2\\
&\Phi(\underbrace{\mathbb{T}\#\mathbb{T}\#\cdots\#\mathbb{T}}_{g-mal}) = g\\
&\Phi(\mathbb{P}) = -\tfrac{1}{2}\\
&\Phi(\mathbb{P}\#\mathbb{P}) = -1\\
&\Phi(\underbrace{\mathbb{P}\#\mathbb{P}\#\mathbb{P}\cdots\#\mathbb{P}}_{g-mal}) = -\tfrac{g}{2}.
\end{aligned}$$

Lemma 3.5 nimmt dann die Gestalt an:

$$\Phi(\mathbb{S}\#M) = \Phi(\mathbb{S}) + \Phi(M) = \Phi(M) \quad \text{für jedes } M$$

$$\Phi(\mathbb{T}\#\mathbb{P}) = \Phi(\mathbb{P}\#\mathbb{P}\#\mathbb{P}) = -\frac{3}{2} = \Phi(\mathbb{P}) + \Phi(\mathbb{P}) + \Phi(\mathbb{P}),$$

und es folgt

$$\Phi(X\#Y) = \begin{cases} \Phi(X) + \Phi(Y), & \text{falls } \Phi(X)\cdot\Phi(Y) > 0 \\ -\big(|\Phi(X)| + |\Phi(Y)|\big), & \text{falls } \Phi(X)\cdot\Phi(Y) < 0 \end{cases}$$

Somit haben die orientierbaren Flächen $\mathbb{F}_g$ unter Φ ein nichtnegatives Bild

$$\Phi(\mathbb{F}_g) = g \geq 0,$$

und die nichtorientierbaren Flächen $\mathbb{F}_g^*$ haben ein negatives Bild

$$\Phi(\mathbb{F}_g^*) = -\frac{g}{2} < 0.$$

Daraus folgt auch, dass Φ tatsächlich bijektiv ist. Für jede Fläche M stimmt $|\Phi(M)|$ überein mit dem Geschlecht von M. Die zusammenhängende Summe definiert aber keine Halbgruppenstruktur, weil die Kürzungsregel nicht gilt (nach 3.5.).

3.7 Satz *(Flächenklassifikationssatz)*
Jede kompakte Fläche (ohne Rand) ist zu einer der Modell–Flächen, die in 3.6. definiert sind, homöomorph. Je zwei verschiedene dieser Modell–Flächen sind nicht homöomorph. Die Abbildung Φ ist also für jede kompakte Fläche definiert, und die einzelnen Urbilder unter der Abbildung Φ definieren genau die Homöomorphieklassen kompakter Flächen.

Die Flächen F mit einem positiven Bild durch Φ heißen auch die *zweiseitigen Flächen*, die mit negativem Bild auch die *einseitigen Flächen*. Diese Bezeichnung wird klar bei der Betrachtung von Zylinder und Möbiusband. Die zweiseitigen Flächen haben eben zwei Seiten, die man (global) verschieden färben könnte, die einseitigen haben dies nicht. Statt *kompakte Fläche ohne Rand* sagt man auch oft *zusammenhängende geschlossene Fläche* und deutet damit an, dass sie sich schließt, ohne dass Randkomponenten auftreten.

Der *Beweis* dieses Satzes ist schwieriger als der Inhalt des Satzes das vermuten lässt. Viele Bücher geben daher den Beweis nur in Spezialfällen, z.B. wenn man zusätzlich die Differenzierbarkeit voraussetzt und dann eine Klassifikation bis auf Diffeomorphie beweist. Mit den Methoden der Differentialtopologie wird manches einfacher[1]. Eine andere praktikable Variante ist die, dass man den Satz nur für triangulierte Flächen beweist und den Beweis der Triangulierbarkeit übergeht (s. z.B. ARMSTRONG). Daher geben wir hier an dieser Stelle keinen Beweis, sondern verschieben den Beweis für den Fall triangulierter Flächen auf Abschnitt 3G am Ende des Kapitels, nach einigen grundlegenden kombinatorischen Betrachtungen.

Andere Standardflächen sind die folgenden:

Die orientierbare Fläche vom Geschlecht g:

$$\underbrace{\mathbb{T}\#\mathbb{T}\#\cdots\#\mathbb{T}}_{g-mal}$$

die nichtorientierbare Fläche vom Geschlecht $g+1$:

$$\underbrace{(\mathbb{P}\#\mathbb{P})}_{\text{K.F.}}\underbrace{\#\mathbb{T}\#\cdots\#\mathbb{T}}_{g-mal}$$

die nichtorientierbare Fläche vom Geschlecht $g+\frac{1}{2}$:

$$\mathbb{P}\#\underbrace{(\mathbb{T}\#\mathbb{T}\#\cdots\#\mathbb{T})}_{g-mal}$$

Bemerkung: Jede kompakte Fläche X mit Rand ist homöomorph zu

$$M\backslash(B_1^\circ\cup\cdots\cup B_k^\circ),$$

wobei M eine kompakte Fläche ohne Rand ist und $\overline{B}_1,\ldots,\overline{B}_k\subset M$ paarweise disjunkte abgeschlossene Kreisscheiben sind mit jeweiligem Inneren $B_1^\circ,\ldots,B_k^\circ$. X wird bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmt durch das Paar (M,k), wobei k die Zahl der verschiedenen Komponenten von ∂X ist. Umgekehrt wird M bis auf Homöomorphie eindeutig durch (X,k) bestimmt.

Der Beweis ergibt sich einfach durch Verkleben von X mit k Kopien einer Kreisscheibe längs der jeweiligen Ränder, wobei k die Zahl der Randkomponenten von X ist. Dass diese Zahl stets endlich ist, ergibt sich aus dem folgenden

[1] aber auch dies kann ein ganzes Büchlein von 120 Seiten füllen, s. A.GRAMAIN, Topologie des surfaces, Presses Universitaires de France, Paris 1971.

Lemma: X kompakt $\Longrightarrow \partial X$ kompakt.

$\partial X \subseteq X$ ist nämlich abgeschlossen in X und damit kompakt nach 1.35. ∂X ist aber die topologische Summe (disjunkte Vereinigung) aller Randkomponenten. Daher kann es nur endlich viele geben.

3B Die Fundamentalgruppen kompakter Flächen

Die Fundamentalgruppen der kompakten Flächen kann man am einfachsten in den folgenden Standardmodellen beschreiben. Dabei wird die Fläche aufgeschnitten und als ein Stück der Ebene dargestellt mit Identifikationen auf dem Rand. Für den Torus ist uns dies ja schon von Abb. 2.6 geläufig:

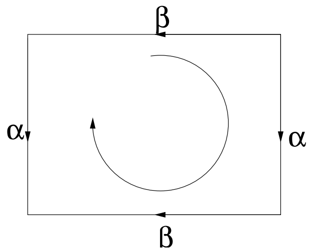


Abbildung 3.5: Torus

Die Fundamentalgruppe ist hierbei erzeugt von zwei Elementen a, b mit der Relation $aba^{-1}b^{-1} = 1$ (dabei bezeichnet 1 das neutrale Element), also

$$\pi(\mathbb{T}) = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^2,$$

vgl Abbildung 3.5.

Zusammenhängende Summe von zwei Tori (vgl. die Abbildungen 3.6 und 3.7):

$$\pi(\mathbb{T}\#\mathbb{T}) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2 \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} = 1 \rangle.$$

Nach 2.15 ist das die freie Gruppe, erzeugt von a_1, b_1, a_2, b_2, modulo dem kleinsten Normalteiler, der $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$ enthält.
Analog ist das für die zusammenhängende Summe $\mathbb{T}\# \cdots \#\mathbb{T}$ (g-mal). Man wird vermuten, dass die Fundamentalgruppe die folgende ist:
$\pi(\underbrace{\mathbb{T}\# \cdots \#\mathbb{T}}_{g}) = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle.$
Bewiesen wird das weiter unten in 3.11.

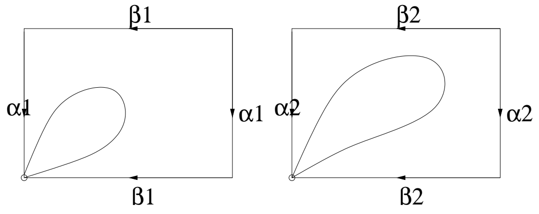


Abbildung 3.6: Zwei Tori, jeweils mit einem Loch

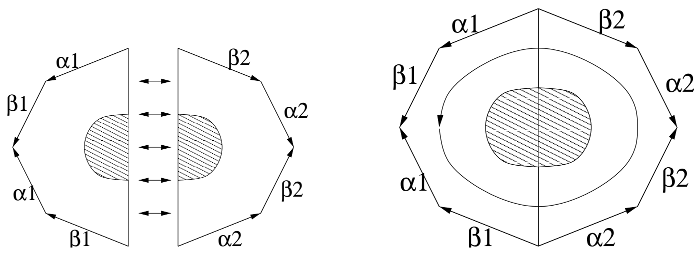


Abbildung 3.7: Verklebung zweier Tori mit Loch zu einer Fläche

Nichtorientierbare Flächen:

Die projektive Ebene kennen wir schon von S. 44-45: $\mathbb{P} = S^2/_\sim$, wobei $(x,y,z) \sim (-x,-y,-z)$. Die Fundamentalgruppe ist $\pi(\mathbb{P}) = \langle a \mid a^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Die Kleinsche Flasche können wir nach 3.2 auch als $\mathbb{P}\#\mathbb{P}$ schreiben.
Dann wird $\pi(\mathbb{P}\#\mathbb{P}) = \langle a, b \mid a^2b^2 = 1 \rangle$.

Analog wird man vermuten: $\pi(\underbrace{\mathbb{P}\# \cdots \#\mathbb{P}}_{g}) = \langle a_1, \ldots, a_g \mid a_1^2 \cdots a_g^2 = 1 \rangle$, was in 3.11 bewiesen wird.

Dabei muss die Frage geklärt werden: *Wie verhält sich die Fundamentalgruppe bei der Konstruktion der zusammenhängenden Summe als eine zweistellige Operation* $(X,Y) \longmapsto X\#Y$ *?*

Noch allgemeiner kann man fragen: *Wie verhält sich die Fundamentalgruppe bei der Vereinigung* $X = U \cup V$ *?* Auf welche Weise wird die Fundamentalgruppe der Vereinigung X durch die der einzelnen Teile U, V und ggfs. $U \cap V$ bestimmt?

Die algebraische Art und Weise, wie das genau geschieht, erfordert einen neuen Begriff, nämlich das *freie Produkt* von Gruppen.

3.8 Definition *(freies Produkt von Gruppen)*
G_1 und G_2 seien zwei Gruppen. Eine Gruppe G mit den Inklusionen $j_1 : G_1 \to G$ und $j_2 : G_2 \to G$ heißt freies Produkt von G_1 und G_2, wenn für jede Gruppe H und je zwei Homomorphismen $f_1 : G_1 \longrightarrow H$ und $f_2 : G_2 \longrightarrow H$ genau ein Homomorphismus $f : G \longrightarrow H$ existiert mit $f \circ j_i = f_i$, im Diagramm:

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "j_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & G \arrow[d, "\exists! f"] & G_2 \arrow[l, "j_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

Schreibweise: $G = G_1 * G_2$.

Diese Eigenschaft beschreibt das gleiche universelle Problem, das wir schon für die topologische Summe in Satz 1.15 kennengelernt haben. Entsprechendes gilt für die äußere Summe von Vektorräumen. Wenn man die Richtungen aller Homomorphismen umdreht, erhält man die universelle Eigenschaft des (kartesischen) Produkts. Das freie Produkt wird so zu dem "Koprodukt" in der Kategorie der Gruppen.

Konstruktion des freien Produkts: Wir definieren G als die Menge aller (reduzierten) Wörter $g_{i_1} \dots g_{i_k}$ aus $G_1 \cup G_2$, wobei je zwei aufeinanderfolgende Elemente $g_{i_j} \neq 1$, $g_{i_{j+1}} \neq 1$ stets zu verschiedenen Gruppen (G_1 bzw. G_2) gehören. Als Multiplikation haben wir wieder die Hintereinanderschreibung von Wörtern, gefolgt von der Kürzung, d.h. der Auswertung von Produkten in G_1 oder G_2 separat. Das leere Wort entspricht wieder dem Einselement. Die Einbettungen $j_1 : G_1 \to G$ und $j_2 : G_2 \to G$ sind offensichtlich: Man fasst jedes Element $g \in G_1$ oder $g \in G_2$ als Wort mit einem Buchstaben auf.

Bemerkung: Das freie Produkt freier Gruppen ist wieder eine freie Gruppe. Falls beide Gruppen mit Erzeugenden und Relationen beschrieben sind (Definition 2.15), dann gilt:

$$\Big\langle a_1, \dots, a_m \mid r_1 = r_2 = \dots = r_k = 1 \Big\rangle * \Big\langle b_1, \dots, b_n \mid s_1 = s_2 = \dots = s_l = 1 \Big\rangle$$

$$= \Big\langle a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \mid r_1 = r_2 = \dots = r_k = s_1 = s_2 = \dots = s_l = 1 \Big\rangle.$$

Als Beispiel ist die Fundamentalgruppe der Ein–Punkt–Vereinigung von X und Y das freie Produkt von $\pi(X)$ und $\pi(Y)$. Dies ist ein Spezialfall des folgenden Satzes von Seifert und van Kampen. Darin kommt ein Quotient des freien Produkts vor, das sogenannte *amalgamierte freie Produkt*.

3.9 Satz *(Seifert – van Kampen)*
Es seien $X, U, V, U \cap V$ wegzusammenhängende Räume, $U, V \subseteq X$ seien offen und $U \cup V = X$. Als Basispunkt für die Fundamentalgruppen wählen wir ein $x_0 \in U \cap V$. Dann induzieren die Inklusionen $j^U : U \to X, j^V : V \to X, i^U : U \cap V \to U, i^V : U \cap V \to V$ ein kommutatives Diagramm von Gruppen und Homomorphismen

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, "j^U"] & \\ U \cap V \arrow[ur, "i^U"] \arrow[dr, "i^V"'] & & X \\ & V \arrow[ur, "j^V"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \pi(U) \arrow[dr, "j^U_*"] & \\ \pi(U \cap V) \arrow[ur, "i^U_*"] \arrow[dr, "i^V_*"'] & & \pi(X) \\ & \pi(V) \arrow[ur, "j^V_*"'] & \end{tikzcd}$$

mit der universellen Eigenschaft, dass zu jeder Gruppe H und zu je zwei Gruppenhomomorphismen $f^U : \pi(U) \longrightarrow H$ und $f^V : \pi(V) \longrightarrow H$ mit $f^U \circ (i^U)_* = f^V \circ (i^V)_*$ genau ein Gruppenhomomorphismus $f : \pi(X) \longrightarrow H$ existiert mit $f \circ j^U_* = f^U$ und $f \circ j^V_* = f^V$, im Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & \pi(U) \arrow[d, "j^U_*"] \arrow[dr, "f^U"] & \\ \pi(U \cap V) \arrow[ur, "i^U_*"] \arrow[dr, "i^V_*"'] & \pi(X) \arrow[r, "\exists! f"] & H \\ & \pi(V) \arrow[u, "j^V_*"'] \arrow[ur, "f^V"'] & \end{tikzcd}$$

Diese Eigenschaft kennzeichnet $\pi(X)$ (rein algebraisch) als das amalgamierte freie Produkt von $\pi(U)$ und $\pi(V)$ modulo dem von $\{i^U_*(x)(i^V_*(x))^{-1} \mid x \in U \cap V\}$ erzeugten Normalteiler.

Die Bedingung der Offenheit von U und V in X kann abgeschwächt werden. Es genügt, dass die induzierten Homomorphismen j^U_*, j^V_* sich beim Übergang zu geeigneten offenen Umgebungen von U, V nicht ändern.

Beweis: Massey, Ch. IV.

In der Sprache der Kategorientheorie heißt diese universelle Eigenschaft von $\pi(X)$ ein *pushout* von $\pi(U)$ und $\pi(V)$. Der duale Begriff (durch Umdrehen der Richtungen aller Homomorphismen) heißt *pullback*. Für Gruppen ist das letztere einfach der Durchschnitt zweier Untergruppen.

3.10 Folgerung *Es sei X ein wegzusammenhängender Raum, der durch zwei offene Mengen U und V so überdeckt werden kann, dass gilt:*

(i) U und V sind wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend, d.h. $\pi(U) = \pi(V) = \{1\}$

(ii) $U \cap V$ ist wegzusammenhängend.

Dann ist auch $X = U \cup V$ einfach zusammenhängend.

Dies folgt direkt aus dem Satz von Seifert und van Kampen mit $\pi(U) = \{1\} = \pi(V)$.

Beispiele:

(1) $S^2 = S^2_+ \cup S^2_-$, $S^2_+ \cap S^2_- = S^1 \times (-\varepsilon, \varepsilon) \simeq S^1$ (Äquator)

$$\begin{tikzcd} & S^2_+ \arrow[dr] & \\ S^1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S^2 \\ & S^2_- \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \pi(S^2_+) \cong \{1\} \arrow[dr] & \\ \mathbb{Z} \cong \pi(S^1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \pi(S^2) \\ & \pi(S^2_-) \cong \{1\} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Analog geht das für jedes S^n, $n \geq 2$, aber nicht für $n = 1$. Für $n = 1$ ist der Satz von Seifert und van Kampen so nicht anwendbar, weil S^0 nicht zusammenhängend ist. Induktiv liefert dies einen Beweis für die Gleichung $\pi(S^n) = \{1\}$, wenn $n \geq 2$.

(2) Für die zusammenhängende Summe zweier Tori haben wir

$$\mathbb{T}\#\mathbb{T} = (T_1 \setminus B_1) \cup (T_2 \setminus B_2),$$

wobei $(T_1 \setminus B_1) \cap (T_2 \setminus B_2) \cong S^1$ mit $\pi(S^1) = \{x^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. $\pi(T_1 \setminus B_1)$ ist die freie Gruppe von zwei Erzeugenden, sagen wir a_1, b_1 mit der von der Inklusion $i^1 : S^1 \to T_1 \setminus B_1$ und dem Element $i^1_*(x) = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$ induzierten Untergruppe, entsprechend ist $\pi(T_2 \setminus B_2)$ als freie Gruppe von zwei Elementen a_2, b_2 erzeugt mit der Inklusion $i^2 : S^1 \to T_2 \setminus B_2$ und $i^2_*(x^{-1}) = a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$. Also ist $\pi(\mathbb{T}\#\mathbb{T})$ die freie von a_1, b_1, a_2, b_2 erzeugte Gruppe mit der Relation $1 = i^1_*(x) i^2_*(x^{-1}) = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$.

(3) Es sei U ein Möbiusband und V eine Kreisscheibe mit gemeinsamem Rand $U \cap V \cong S^1, X = U \cup V$. Dann folgt analog $\pi(X) \cong \pi(U) \Big/ j_*^U(\pi(U \cap V)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$, was uns schon für die Fundamentalgruppe der projektiven Ebene $\mathbb{P}$ bekannt war.

(4) Spezialfall: Falls $\pi(U \cap V) = \{1\}$, dann ist $\pi(U \cup V)$ das freie Produkt von $\pi(U)$ und $\pi(V)$, vgl. 3.8.

Satz 3.9 präzisiert die Berechnung der Fundamentalgruppen der kompakten Flächen wie folgt. Wenn die am Anfang von Abschnitt 3B hergeleitete Formel für die Fundamentalgruppe der orientierbaren Fläche vom Geschlecht g richtig ist, so folgt aus dem Satz von Seifert und van Kampen, dass sie auch für das Geschlecht $g+1$ gilt. Aus den beiden Relationen

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$$

in der Fläche vom Geschlecht g und

$$a_{g+1} b_{g+1} a_{g+1}^{-1} b_{g+1}^{-1} = 1$$

in dem Torus wird in der zusammenhängenden Summe die eine Relation

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_{g+1} b_{g+1} a_{g+1}^{-1} b_{g+1}^{-1} = 1.$$

Entsprechendes gilt für die nichtorientieraren Flächen: Hier wird aus den beiden Relationen

$$a_1^2 \cdots a_g^2 = 1 \ \text{ und } a_{g+1}^2 = 1$$

in der zusammenhängenden Summe die Relation

$$a_1^2 \cdots a_{g+1}^2 = 1.$$

Beachte: In den Flächen mit Rand gibt es keine Relation. Die linke Seite der jeweiligen resultierenden Gleichung entsteht gerade durch die Verklebung der beiden Randkomponenten gemäß 3.9. Dies liefert einen induktiven Beweis für den folgenden Satz.

3.11 Satz *(Fundamentalgruppen der kompakten Flächen)*
Die Fundamentalgruppe der orientierbaren Fläche vom Geschlecht g ist isomorph zu

$$\langle a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle.$$

Die Fundamentalgruppe der nichtorientierbaren Fläche vom Geschlecht $\frac{g}{2}$ ist isomorph zu

$$\langle a_1, \ldots, a_g \mid a_1^2 \cdots a_g^2 = 1 \rangle.$$

Alle diese Fundamentalgruppen sind unendlich mit Ausnahme von $\pi(\mathbb{S}) = \{1\}$ und $\pi(\mathbb{P}) \cong \mathbb{Z}_2$. Das hat zur Folge, dass in allen anderen Fällen die universelle Überlagerung unendlich viele Blätter hat und daher nicht kompakt ist. Die universelle Überlagerung von $\mathbb{P}$ ist natürlich die 2-Sphäre mit der Identifikation der Antipodenpaare. Im Falle des Torus und der Kleinschen Flasche ist uns die universelle Überlagerung schon bekannt aus den Beispielen nach 3.1. Man kann zeigen, dass für alle anderen kompakten Flächen die universelle Überlagerung ebenfalls homöomorph zum $\mathbb{R}^2$ ist. Aber die Decktransformationsgruppe operiert nicht durch euklidische Symmetrien, wohl aber (bei geeigneter Interpretation) durch hyperbolische Symmetrien. Im geometrischen Sinne ist also die universelle Überlagerung jeder kompakten Fläche (außer Sphäre, projektive Ebene, Torus, Kleinsche Flasche) die hyperbolische Ebene. Vgl. dazu J.Stillwell, *Geometry of Surfaces*, Springer 1992. Insbesondere kann man jeder kompakten Fläche eine der drei geometrischen Grundstukturen aufprägen: sphärisch (falls $\chi > 0$), euklidisch (falls $\chi = 0$), hyperbolisch (falls $\chi < 0$).

3C Der Jordansche Kurvensatz

3.12 Definition *(Jordan-Kurve)*
Eine Kurve (oder ein Weg) in X war definiert als eine stetige Abbildung $c : [0,1] \longrightarrow X$, vgl. 2.4.

c heißt eine Peano–Kurve in X, falls c surjektiv auf X ist.

c heißt eine Jordan–Kurve in X, falls c injektiv in X ist.

Für eine Jordan–Kurve ist die Einschränkung $c : [0,1] \longrightarrow c([0,1])$ ein Homöomorphismus, weil $c([0,1])$ kompakt ist. Daher definiert man auch eine Jordan–Kurve als eine Teilmenge, die homöomorph zu $[0,1]$ ist. Entsprechend ist eine geschlossene Jordan–Kurve eine injektive stetige Abbildung $c : S^1 \longrightarrow X$ (bzw. eine Teilmenge von X, die homöomorph zu S^1 ist). Der Unterschied wird deutlich an den klassischen Peano–Kurven mit surjektiver stetiger Abbildung $c : [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$. Man kann sie als Limes einer Folge von Kurven gewinnen, die ein immer feineres quadratisches Raster durchlaufen, wie in der folgenden Skizze angedeutet:

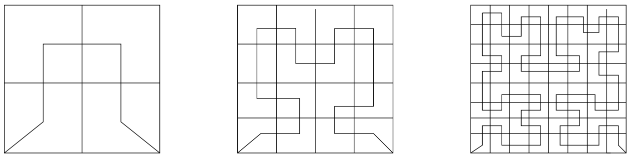


Abbildung 3.8: Drei Schritte zur Konstruktion einer Peano-Kurve

3.13 Satz *(Jordanscher Kurvensatz in 4 Versionen (a),(b),(c),(d))*

(a) *Jede geschlossene Jordan–Kurve in $\mathbb{R}^2$ zerlegt den $\mathbb{R}^2$ in mehrere Zusammenhangskomponenten.*

(b) *Jede geschlossene Jordan–Kurve in $\mathbb{R}^2$ zerlegt den $\mathbb{R}^2$ in genau zwei Komponenten, die eine beschränkt, die andere unbeschränkt, wobei die Kurve der Rand beider ist.*

(c) *Jede geschlossene Jordan–Kurve in $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{+\infty\}$ zerlegt S^2 in genau zwei Komponenten, jede homöomorph zur offenen Kreisscheibe, so dass die Kurve der Rand beider ist und so dass jede zusammen mit der Kurve homöomorph zur abgeschlossenen Kreisscheibe ist.*

(d) *Für jede Teilmenge $J \subseteq \mathbb{R}^2$, die homöomorph zu S^1 ist, gibt es einen Homöomorphismus $\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\alpha(J) = S^1 \subset \mathbb{R}^2$ (Einheitskreis $\{x^2 + y^2 = 1\}$).*

Beweis: Die Implikationen $(d) \Longrightarrow (c) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (a)$ sind offensichtlich. Die Version (d) ist die stärkste Version unter diesen.

Man vergleiche dazu den Satz von SCHOENFLIES :
Jede geschlossene Jordankurve $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ lässt sich zu einem Homöomorphismus $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fortsetzen.

Beweis: Hier beweisen wir nur die schwächste Version (a):
Es sei $J \subseteq \mathbb{R}^2$ eine geschlossene Jordankurve mit $J \cong S^1$. Zu zeigen: $\mathbb{R}^2 \setminus J$ ist nicht zusammenhängend. Wähle einen Punkt $p \in J$. Wir können ebenso J als Teilmenge von $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ auffassen. Durch stereographische Projektion von p aus kann man dann eine topologische Einbettung $h : J \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^2$ erhalten, so dass $\lim_{x \to \pm\infty} = \infty$. Setze $L := h(J \setminus \{p\})$. Weil $h(J \setminus \{p\})$ homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist, kann man h auch als Homöomorphismus zwischen $\mathbb{R}$ und L auffassen.

Dann gilt: $\mathbb{R}^2\backslash J$ ist zusammenhängend genau dann, wenn $\mathbb{R}^2\backslash L$ zusammenhängend ist.

Wir verwenden nun das folgende Lemma:

Lemma: Eine offene und zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist stets auch wegzusammenhängend.

Annahme: $\mathbb{R}^2\backslash L$ ist zusammenhängend.
Weil L auch abgeschlossen ist, ist nach dem Lemma $\mathbb{R}^2\backslash L$ dann auch wegzusammenhängend. Setze:

$$H_+ := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \bigm| z > 0\}$$

$$H_- := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \bigm| z < 0\}$$

$$U := H_+ \cup \{(x,y,z) \bigm| (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash L, \quad -1 < z \leq 0\}$$

$$V := H_- \cup \{(x,y,z) \bigm| (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash L, \quad 0 \leq z < 1\}$$

Daraus ergibt sich

$$U \cup V = \mathbb{R}^3\backslash(x,y,0) \bigm| (x,y) \in L\}$$

$$U \cap V = (\mathbb{R}^2\backslash L) \times (-1,+1),$$

also nach Annahme ein wegzusammenhängender Raum. Ferner sind U und V offen und wegzusammenhängend sowie einfach zusammenhängend, denn jeder geschlossene Weg in U ist homotop zu einem in H_+, entsprechend für V und H_-. Die beiden Teile H_+ und H_- sind offenbar einfach zusammenhängend. Nach dem Satz von Seifert und van Kampen ist folglich $\mathbb{R}^3\backslash L := \mathbb{R}^3\backslash(L\times\{0\})$ einfach zusammenhängend.

Klar ist ferner, dass

$$\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,z) \bigm| z \in \mathbb{R}\} = (\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}) \times \mathbb{R}$$

nicht einfach zusammenhängend ist, weil

$$\pi\big(\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,z) \bigm| z \in \mathbb{R}\}\big) \cong \pi\big((\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}) \times \mathbb{R}\big) \cong \pi\big(\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\big) \cong \mathbb{Z}.$$

Der Widerspruch folgt dann, wenn wir die Homöomorphie von $\mathbb{R}^3\backslash L$ einerseits und $\mathbb{R}^3\backslash(\{(0,0\} \times \mathbb{R})$ andererseits zeigen können.

Konstruktion eines solchen Homöomorphismus:
Wir verwenden den Homöomorphismus $h : \mathbb{R} \longrightarrow L$ und setzen

$$\widetilde{L} := \{(x,y), h^{-1}(x,y) \mid (x,y) \in L\}.$$

$\widetilde{L}$ ist homöomorph zu L und schneidet jede horizontale Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{z_0\}$ in genau einem Punkt $h(z_0) \times \{z_0\}$. Es verbleiben nur noch zwei Schritte:

$$\mathbb{R}^3 \backslash L \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^3 \backslash \widetilde{L} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^3 \backslash (\{(0,0)\} \times \mathbb{R})$$

Dabei gilt die erste Homöomorphie durch Hochschieben $(x,y,z) \longmapsto (x,y,z+\widetilde{h}(x,y))$, die zweite durch horizontales Verschieden der "Schichten" $\mathbb{R}^2 \times \{z_0\}$ $(x,y,z) \longmapsto (x,y,z) - (\underbrace{h(z)}_{\in \mathbb{R}^2}, 0)$ wobei $\widetilde{h}$ eine stetige Fortsetzung von $h^{-1} : L \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^2$ sei. □

3.14 Lemma *$S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ sei der Standardkreis. Dann gilt $\pi(\mathbb{R}^3 \backslash S^1) \cong \mathbb{Z}$.*

Beweis: Der Beweis folgt aus der Zerlegung der 3-Sphäre in Hopfkreise, vgl. S. 49. Zunächst gilt

$$\pi(\mathbb{R}^3 \backslash S^1) \cong \pi(S^3 \backslash S^1),$$

was man durch stereographische Projektion und Anwendung des Satzes von Seifert und van Kampen einsehen kann. Sodann ist $S^3 \backslash (\{e^{i\theta} \mid \theta \in [0,2\pi]\} \times \{0\})$ homotopieäquivalent zu $\{0\} \times (\{e^{i\phi} \mid \phi \in [0,2\pi]\})$, und die Fundamentalgruppe des letzteren Raumes ist $\mathbb{Z}$. □

Für höhere Dimensionen gilt die folgende Verallgemeinerung des Jordanschen Kurvensatzes:

3.15 Satz *(Jordan–Brouwerscher Trennungssatz:)*
$f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ sei eine injektive stetige Abbildung (also eine topologische Einbettung). Dann hat $\mathbb{R}^{n+1} \backslash f(S^n)$ genau zwei Zusammenhangskomponenten.

Zum Beweis braucht man prinzipiell andere Methoden als in 3.13. Es ist auch nicht mehr wahr, daß $\mathbb{R}^{n+1} \backslash f(S^n)$ immer durch einen Homöomorphismus in $\mathbb{R}^{n+1} \backslash S^n$ überführt werden kann. Es gilt also nur das Analogon der Version (b) im Jordanschen Kurvensatz, aber nicht (c) oder (d).

Gegenbeispiel dazu:
Alexanders "gehörnte Sphäre" $\Sigma^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $\Sigma^2 \cong S^2$. Hier hat $\mathbb{R}^3 \backslash \Sigma^2$ zwei Komponenten A_1 und A_2, wobei $A_1 \cong B^3$ (3–Ball), aber $\pi(A_2) \neq \{1\}$. Für eine Abbildung siehe T.B.Rushing, Topological Embeddings, Academic Press 1973, p.69/70 (Example 2.4.9) oder G.E.Bredon, Topology and Geometry, Springer 1993, Figure IV-9.

3D Knoten

Wenn man geschlossene Jordankurven J im 3-dimensionalen Raum betrachtet, also $J \subset \mathbb{R}^3, J \cong S^1$, dann ist die folgende Frage naheliegend: Sind J und S^1 ineinander überführbar durch eine stetige Schar von geschlossenen Jordankurven? Sind die Komplemente $\mathbb{R}^3 \setminus J, \mathbb{R}^3 \setminus S^1$ homöomorph zueinander oder (als schwächere Version):

$$\text{Gilt} \quad \pi(\mathbb{R}^3 \backslash J) \cong \pi(\mathbb{R}^3 \backslash S^1) \cong \mathbb{Z} \quad ?$$

Die Antwort ist sicher dann **ja**, wenn J und S^1 isotop sind, also wenn J durch eine stetige Deformation des ganzen $\mathbb{R}^3$ aus S^1 hervorgeht. Eine Isotopie zweier Jordankurven J_1 und J_2 ist definiert als ein Homöomorphismus von $\mathbb{R}^3$ in sich, der J_1 in J_2 und folglich $\mathbb{R}^3 \backslash J_1$ in $\mathbb{R}^3 \backslash J_2$ überführt und zudem homotop zur Identität ist, wobei die Homotopie H aus einer Schar von Homöomorphismen H_t besteht.

Die Antwort ist jedoch im allgemeinen **nein**. Der Grund ist die Existenz von Knoten.

Beispiele: Torusknoten

$$\begin{array}{llc} \text{Torus} & S^1 \times S^1 \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{C}^2 \\ & \qquad\quad \searrow \qquad \nearrow \\ \text{3–Sphäre} & \qquad S^3(\sqrt{2}) \end{array}$$

Die stereographische Projektion von $(\sqrt{2}, 0)$ bzw. $(0, \sqrt{2})$ liefert den Standardtorus in $\mathbb{R}^3$. So können wir die Punkte im Torus als Paare komplexer Zahlen $(e^{i\theta}, e^{i\varphi})$ beschreiben: $S^1 \times S^1 = \{(z, w) \mid z\overline{z} = w\overline{w} = 1\}$.
Die Kurven $\theta =$ const. oder $\varphi=$ const. sind Kreise in S^3. $\theta = \varphi$ beschreibt ebenfalls einen Kreis. Aber die Kurven $q\theta = p\varphi$ mit teilerfremden ganzen Zahlen p, q sind i.A. keine Kreise mehr. Sie heißen die *Torusknoten* $T_{p,q}$ vom Typ p, q.

3.16 Definition *(Knoten)*
Eine stetige Einbettung $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (oder $f : S^1 \longrightarrow S^3$) bzw. deren Bildmenge heißt ein Knoten. Die Kurve $e^{i\theta} \mapsto (e^{ip\theta}, e^{iq\theta})$ in S^3 oder auch ihre stereographische Projektion in $\mathbb{R}^3$ heißt Torusknoten $T_{p,q}$ vom Typ (p, q).

Die Standardeinbettung $S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ nennt man auch *unverknotet oder den trivialen Knoten.* Die Torusknoten $T_{1,0}$ und $T_{0,1}$ sind jedenfalls unverknotet.

Zwei Knoten f_1, f_2 heißen *äquivalent,* wenn ein Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (bzw. $h : S^3 \longrightarrow S^3$) existiert mit $h \circ f_1 = f_2$.

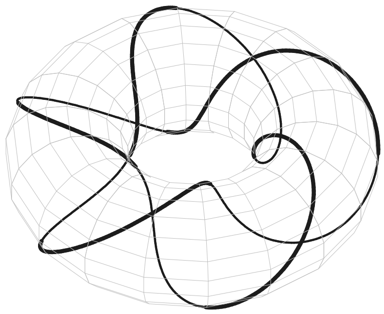


Abbildung 3.9: Torusknoten $T_{2,5}$

Bemerkung: Jede ebene Kurve $S^1 \cong J \subset \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ ist äquivalent zum trivialen Knoten nach dem Jordanschen Kurvensatz.

Falls $J_1, J_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ äquivalent sind, dann gilt jedenfalls auch $\pi(\mathbb{R}^3 \backslash J_1) \cong \pi(\mathbb{R}^3 \backslash J_2)$.

Umgekehrt: Falls für spezielle J_1, J_2 nachgewiesen werden kann, dass $\pi(\mathbb{R}^3 \backslash J_1) \not\cong \pi(\mathbb{R}^3 \backslash J_2)$, dann sind J_1, J_2 nicht äquivalent. Das Isotopieproblem kann also teilweise mit algebraischen Hilfsmitteln gelöst werden.

Als *Beispiel* zeigen wir die Berechnung der Fundamentalgruppe des Komplements für den Torusknoten $T_{2,3}$ (auch *Kleeblattschlinge* genannt, engl.: "trefoil knot"), s. Abb. 3.10. Dieser ist der einfachste nicht-triviale Knoten überhaupt. Diese Kurve ist symmetrisch unter einer Drehung um $2\pi/3$ mit vertikaler Drehachse. Wenn wir den Basispunkt x_0 auf der Drehachse wählen, dann haben wir die algebraische Symmetrie:

$$\alpha \longmapsto \beta \longmapsto \gamma \longmapsto \alpha$$

der Erzeugenden der Fundamentalgruppe sowie (ebenfalls symmetrisch) die Relationen $\alpha\beta = \gamma\alpha, \quad \beta\gamma = \alpha\beta, \quad \gamma\alpha = \beta\gamma$. Die erste dieser Relationen impliziert $\gamma = \alpha\beta\alpha^{-1}$, also können wir auf γ verzichten und die Gruppe mit α, β erzeugen. Dann werden die zweite Relation und die dritte Relation äquivalent zueinander, und zwar in der Gestalt $\alpha\beta = \beta\alpha\beta\alpha^{-1}$ oder (symmetrischer) $\beta\alpha\beta = \alpha\beta\alpha$. Die Fundamentalgruppe ist also

$$\pi(S^3 \setminus T_{2,3}) \cong \big\langle \alpha, \beta \;\big|\; \alpha\beta\alpha = \beta\alpha\beta \big\rangle,$$

d.h. die freie Gruppe erzeugt von α, β modulo der Gleichung $\alpha\beta\alpha = \beta\alpha\beta$.

3.17 Lemma *Die Gruppe $G = \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha = \beta\alpha\beta \rangle$ ist nicht kommutativ.*

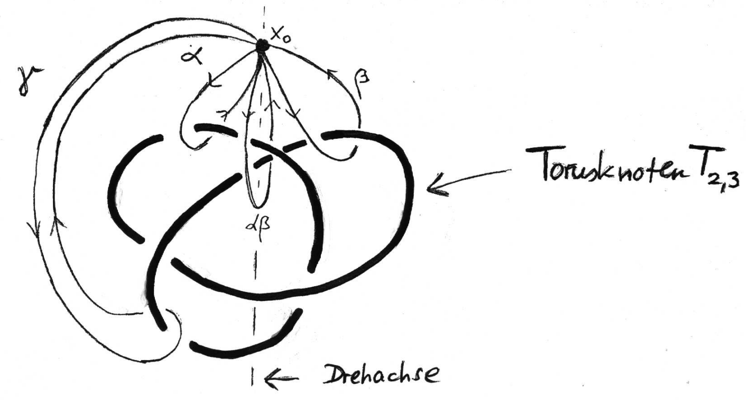


Abbildung 3.10: Torusknoten $T_{2,3}$ mit Erzeugenden α, β, γ im Komplement

Beweis: Wir suchen einen nicht kommutativen Quotienten und definieren einen Homomorphismus $f : G \longrightarrow \mathcal{S}_3 = \{\sigma : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\} \mid \sigma \text{ bijektiv } \}$ durch

$$f(\alpha) := (12)(3), \quad f(\beta) := (1)(23).$$

Es gilt dann $f(\alpha) \circ f(\beta) = (1\ 2\ 3)$ und $f(\alpha)f(\beta)f(\alpha) = f(\beta)f(\alpha)f(\beta)$ wegen

$$f(\alpha)f(\beta)f(\alpha) = (123) \circ (12)(3) = (13)(2),$$

$$f(\beta)f(\alpha)f(\beta) = (1)(23) \circ (123) = (13)(2).$$

Die Relation ist damit erfüllt, und nach dem Homomorphiesatz für Gruppen ist f folglich ein Homomorphismus von der freien Gruppe modulo dieser Relation nach $\mathcal{S}_3$. Also ist $\mathcal{S}_3$ der Quotient von G nach dem Kern von f, und G ist nicht kommutativ, weil $\mathcal{S}_3$ nicht kommutativ ist.

Alternativ kann man die zusätzliche Relation $\alpha^2 = \beta^2$ einführen und erhält einen surjektiven Homomorphismus auf die nicht-abelsche Quaternionengruppe $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ der Ordnung 8. Dabei entspricht α der Zahl i und β der Zahl j. $\square$

3.18 Folgerung *$T_{2,3}$ ist nicht äquivalent zum trivialen Knoten.*

Beweis: Die Fundamentalgruppen $\pi(\mathbb{R}^3 \backslash T_{2,3}) \cong G$ und $\pi(\mathbb{R}^3 \backslash S^1) \cong \mathbb{Z}$ sind offensichtlich nicht isomorph zueinander, weil die eine kommutativ ist und die andere nicht. $\square$

Bemerkung: Der Quotient von G nach dem Kommutator $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ ist die freie Gruppe erzeugt von α und β mit den Relationen $\alpha\beta\alpha = \beta\alpha\beta$ und $\alpha\beta = \beta\alpha$. Dies impliziert $(\beta\alpha)\alpha = (\beta\alpha)\beta$ und damit $\alpha = \beta$.
Die Gleichungen werden dann trivial und der Quotient (also die Kommutator-Faktorgruppe von G) ist isomorph zu $\mathbb{Z}$. Dies ist kein Zufall, sondern es ist bei jedem Knoten so nach dem Alexanderschen Dualitätssatz der Homologietheorie.

3.19 Lemma *(ein algebraisches Lemma)*
Die Gruppen $\langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha = \beta\alpha\beta \rangle$ und $\langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle$ sind isomorph.

Beweis: Setze $y = \alpha\beta$ und $x = \alpha\beta\alpha$. Dies ist dann äquivalent zu $\alpha = y^{-1}x$, $\beta = x^{-1}y^2$. Folglich ist $\beta\alpha\beta = x^{-1}y^2yxx^{-1}y^2 = x^{-1}y^3$, und damit ist die Relation $\alpha\beta\alpha = \beta\alpha\beta$ äquivalent zu der Relation $x = x^{-1}y^3$ oder $x^2 = y^3$.

□

Allgemeiner gilt der folgende Satz (ohne Beweis):

3.20 Satz *Die Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}^3 \setminus T_{p,q}$ mit teilerfremden Zahlen p, q ist isomorph zu $G_{p,q} = \langle x, y \mid x^p = y^q \rangle$.*

Alle diese Gruppen $G_{p,q}$ sind nicht kommutativ für $p \geq 2$, $q \geq 2$.

3.21 Definition *Ein Link (Verschlingung) in $\mathbb{R}^3$ (oder S^3) ist eine topologische Einbettung*

$$f : \underbrace{S^1 \cup S^1 \cup \cdots \cup S^1}_{m} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ (oder\ S^3)$$

Mit anderen Worten: ein Link ist eine Vereinigung von mehreren disjunkten Knoten.

Als trivialen Link (unverschlungen) bezeichnet man die Einbettung, bei der jeder einzelne Knoten trivial ist, und jeder im Außenraum jedes anderen liegt. Präziser soll das heißen, dass jede Komponente $f(S^1)$ als Rand einer eingebetteten Kreisscheibe $f(B^2)$ aufgefasst werden kann und keine der Kurven irgendeine dieser Kreisscheiben trifft. Ein Beispiel ist die Vereinigung von ebenen Kreisen mit Radius $\varepsilon = \frac{1}{4}$ um die Punkte $(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 2, 0), \ldots (0, m, 0)$. Die Fundamentalgruppe des Komplements ist dann die freie Gruppe mit m Erzeugenden.

Beispiele: Der *Hopf–Link* ist erklärt durch das folgende Paar von geschlossenen Kurven:

$$f_1 : S^1 \longrightarrow S^3 \subseteq \mathbb{C}^2 : e^{i\theta} \longmapsto (e^{i\theta}, 0)$$
$$f_2 : S^1 \longrightarrow S^3 \subseteq \mathbb{C}^2 : e^{i\varphi} \longmapsto (0, e^{i\varphi}).$$

Der Hopf–Link ist nicht trivial, weil die Fundamentalgruppe des Komplements isomorph zu $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ ist. Dies liegt daran, dass jeder geschlossene Weg im Komplement der beiden sich homotop hineindeformieren läßt in den Torus $\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\theta},\ e^{i\varphi})$. Dabei liefern f_1 und f_2 die beiden erzeugenden Elemente der Fundamentalgruppe dieses Torus. Wir können f_1 und f_2 auch als die Seelen zweier Volltori auffassen. In der 3-Sphäre $S^3 = I\!R^3 \cup \{\infty\}$ entsteht dann das folgende Bild:

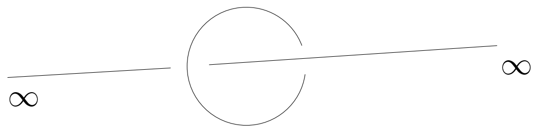


Abbildung 3.11: Hopf-Link

Der *Whitehead-Link* sowie die *Borromäischen Ringe* sind durch die folgende Skizze erklärt:

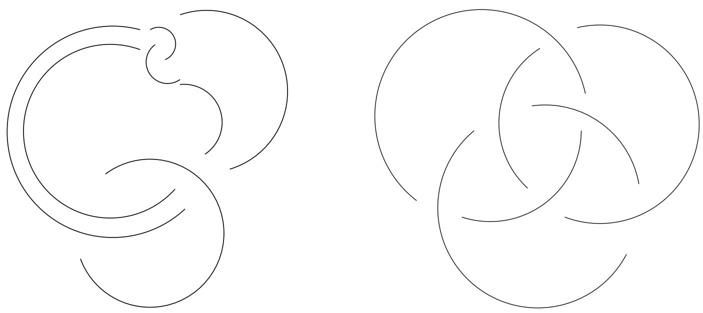


Abbildung 3.12: Whitehead-Link und Borromäische Ringe

Je zwei der drei Borromäischen Ringe sind unverschlungen, d.h. je zwei sind der triviale Link, aber alle drei zusammen sind in nicht trivialer Weise verschlungen. Jeder der drei Ringe repräsentiert den Kommutator in der Fundamentalgruppe des Komplements der beiden anderen.

3E Simpliziale Komplexe

Es ist eine schon im 19. Jahrhundert verwendete Methode, topologische Räume aus Simplizes aufzubauen. Die wichtigsten Vorteile dabei sind die folgenden:

- Zerlegung von topologischen Räumen in sehr einfache Bestandteile
- endlich viele Teile im kompakten Fall
- eine geometrische Struktur und eine übersichtliche Art der Einbettung in euklidische Räume
- Diskretisierung der topologisch relevanten Daten
- Berechnung topologischer Invarianten durch kombinatorische Algorithmen (auch für die Fundamentalgruppe)

3.22 Satz *(Eulerscher Polyedersatz)*
Für ein konvexes Polyeder in $\mathbb{R}^3$ (= ein kompakter Durchschnitt endlich vieler abgeschlossener Halbräume) gilt die Formel:

$$v - e + f = 2,$$

wobei v = die Zahl der Ecken („vertices“), e = Zahl der Kanten („edges“) und f = Zahl der Seiten („faces“) sei.

Im Spezialfall des Würfels haben wir

$$v = 8, \quad e = 12, \quad f = 6, \quad v - e + f = 2,$$

beim dazu dualen Oktaeder

$$v = 6, \quad e = 12, \quad f = 8, \quad v - e + f = 2.$$

Dagegen hat der in 9 Quadrate zerlegte Torus (geometrisch: Rand einer Vereinigung von drei prismenförmigen Zylindern) die Zahlen

$$v = 9, \quad e = 18, \quad f = 9, \quad v - e + f = 0,$$

was dem Eulerschen Polyedersatz nicht entspricht. Der Grund ist darin zu suchen, dass der Torus eben topologisch verschieden ist von dem Rand eines konvexen Polyeders.

3.23 Definition *(Simplex)*
Ein n–dimensionales Simplex (kurz: n–Simplex) $\triangle^n$ ist definiert als die konvexe Hülle von $n+1$ Punkten $v_0, \dots, v_n$ in $\mathbb{R}^n$ in allgemeiner Lage. Jede Teilmenge von diesen Punkten spannt durch ihre konvexe Hülle ein Untersimplex $\triangle^k$ (auch Seite genannt) auf. $\triangle^n$ zusammen mit allen Seiten definiert eine durch die Inklusion halbgeordnete Menge, die zu dem Simplex als Struktur dazugehört. Formal ist also ein Simplex nicht nur eine Menge, sondern es trägt diese Zusatzstruktur einer Hierarchie von Seiten verschiedener Dimensionen zwischen 0 und $n-1$.

In Koordinaten kann man wie folgt rechnen:

$$\triangle^n := \Big\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \;\Big|\; \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \;\text{ und }\; \lambda_i \geq 0 \text{ für } i = 0, \dots, n \Big\}.$$

Diese Größen $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ heißen die *baryzentrischen Koordinaten* und sind für jeden Punkt eindeutig bestimmt. Der *Schwerpunkt* (Baryzentrum) ist durch $\lambda_i = \frac{1}{n+1}$ gegeben. Das *Innere* $(\triangle^n)^\circ$ von $\triangle^n$ ist durch $\lambda_i > 0$ für alle i definiert, der *Rand* entsprechend als Komplement des Inneren.
Im Spezialfall $n = 0$ ist $\triangle^0$ einfach ein Punkt (eine Ecke), für $n = 1$ ist $\triangle^1$ ein Intervall (eine Kante), für $n = 2$ ist $\triangle^2$ ein Dreieck, $\triangle^3$ ist ein Tetraeder.

Beachte: Man kann (abstrakt) ein n–Simplex mit der Menge $\{v_0, \dots, v_n\}$ der Eckpunkte identifizieren (als ungeordnetes $(n+1)$–Tupel.) Dies erleichtert kombinatorische Betrachtungen und ermöglicht eine Behandlung mit Hilfe des Computers ("kombinatorische Topologie").

3.24 Definition *(simplizialer Komplex)*
Ein simplizialer Komplex K im $\mathbb{R}^n$ ist eine endliche Vereinigung von Simplizes $\triangle^m \subset \mathbb{R}^n$ (verschiedener Dimensionen $m = 0, 1, 2, \dots, n$) derart, dass der Durchschnitt je zweier Simplizes entweder leer ist oder genau eine k-dimensionale gemeinsame Seite $\triangle^k$ (für $k < n$).

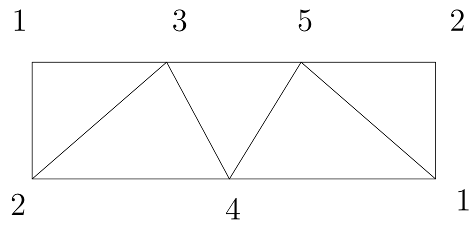
Bemerkung: Die gleiche Definition gibt es auch in einer abstrakten Version (nicht als Teilmenge der $\mathbb{R}^n$). Dann muß man K als Vereinigung abstrakter Simplizes mit Identifikation auffassen (mit der Quotiententopologie). Jeder abstrakte simpliziale Komplex mit $(m+1)$ Ecken kann aber in den $\mathbb{R}^n$ eingebettet werden zumindest für $n \geq m$.

K als Komplex ist zu unterscheiden von den Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Die induzierte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ (mit der Unterraumtopologie) ist ein topologischer Raum, der mit $|K|$ bezeichnet wird. $|K|$ nennt man auch den Träger von K.

Beispiel: Ein Möbiusband als abstrakter simplizialer Komplex ist zum Beispiel gegeben durch die Liste der folgenden Tripel:

$$\{1,2,3,\},\{2,3,4\},\{3,4,5\},\{4,5,1\},\{5,1,2\}.$$

Man beachte die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}_5$, die vermöge der Permutation $(1,2,3,4,5)$ auf diesem Komplex operiert. Wir sagen dazu auch: Dies ist eine Triangulierung des Möbiusbandes (mit einer abstrakten $\mathbb{Z}_5$-Symmetrie).



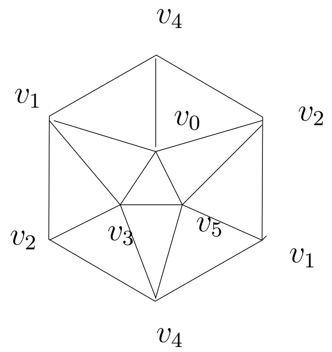
3.25 Definition *(Triangulierung)*
Eine Triangulierung eines gegebenen topologischen Raums X ist ein simplizialer Komplex K zusammen mit einem Homöomorphismus

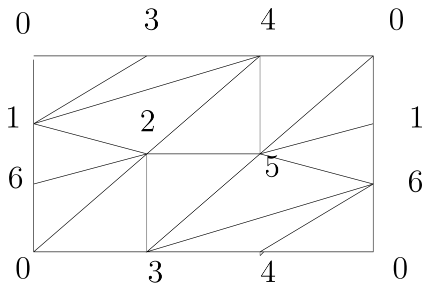
$$h : |K| \longrightarrow X.$$

Man kann dann jedes Simplex $\triangle^k$ von K als Teilmenge $h(\triangle^k) \subseteq X$ wiederfinden. In diesem Sinne wird X zerlegt in (abstrakte) Simplizes.
Sprechweise: K hat eine bestimmte topologische Eigenschaft (z.B. Zusammenhang), wenn X diese Eigenschaft hat. Wegen der Endlichkeit von K muss X in jedem Fall kompakt sein.

Eine *Triangulierung* einer Fläche (mit oder ohne Rand) ist also eine Zerlegung in Dreiecke mit der Zusatzbedingung, dass der Durchschnitt zweier Kanten entweder leer ist oder eine Ecke und der Durchschnitt zweier Dreiecke entweder leer ist oder eine gemeinsame Ecke oder eine gemeinsame Kante beider. Es muss natürlich auch jeder Punkt der Fläche in wenigstens einem Dreieck enthalten sein. Ein innerer Punkt eines Dreiecks ist niemals in einem weiteren Dreieck enthalten.

Beispiel: Das folgende Bild zeigt eine Triangulierung der projektiven Ebene mit 6 Ecken sowie eine Triangulierung des Torus mit 7 Ecken. Beide sind (mit dieser minimalen Eckenzahl) eindeutig bestimmt.





3.26 Definition *Ein Isomorphismus zwischen zwei simplizialen Komplexen ist eine Bijektion φ zwischen den beiden Eckenmengen, so dass $\{v_0, \ldots, v_k\}$ ein k–Simplex des einen Komplexes aufspannt genau dann, wenn $\{\varphi(v_0), \ldots, \varphi(v_k)\}$ ein k–Simplex des anderen aufspannt.*

Analog heißt φ eine simpliziale Abbildung, wenn für jedes k-Simplex, das von $\{v_0, \ldots, v_k\}$ aufgespannt wird, das Bild $\{\varphi(v_0), \ldots, \varphi(v_k)\}$ ebenfalls ein Simplex aufspannt (möglicherweise mit kleinerer Dimension als k). In jedem Fall müssen dabei Ecken in Ecken übergehen.

Falls K und L isomorph, dann sind $|K|$ und $|L|$ homöomorph (umgekehrt gilt das im Allgemeinen nicht). So sind je zwei 7–Ecken–Triangulierungen des Torus isomorph zueinander aber das gilt nicht für mehr als 7 Ecken.

Simpliziale Komplexe erlauben eine kombinatorische Berechnung der Fundamentalgruppe als sogenannte „Kantengruppe“ („edge group“).

3.27 Definition *K sei ein simplizialer Komplex. Ein Kantenzug in K ist eine Folge $v_0, \ldots, v_k$ von Ecken in K mit beliebigem k, so daß je zwei aufeinanderfolgende v_i, v_{i+1} entweder gleich sind oder durch eine Kante in K verbunden sind.*
Ein geschlossener Kantenzug erfüllt zusätzlich $v_k = v_0$. Zwei geschlossene Kantenzüge heißen äquivalent, wenn sie durch eine endliche Zahl von Operationen der folgenden Typen (oder deren Inversen) auseinander hervorgehen.

1. *ein Teil vv wird durch v ersetzt,*
2. *ein Teil vwv wird durch v ersetzt,*
3. *ein Teil uvw wird durch uw ersetzt, falls $\{u, v, w\}$ ein Dreieck in K aufspannen.*

Für jede feste Ecke v in K bilden die Äquivalenzklassen $[vv_1 \dots v_k v]$ von geschlossenen Kantenzügen eine Gruppe mit der Multiplikation

$$[vv_1 \dots v_k v] \cdot [vw_1 \dots w_l v] := [vv_1 \dots v_k v w_1 \dots w_l v]$$

mit dem neutralen Element $[v]$ sowie dem inversen Element

$$[vv_1 \dots v_k v]^{-1} := [vv_k \dots v_1 v].$$

Diese Gruppe heißt die Kantengruppe $E(K, v)$ von K bzgl. v (Basispunkt).

3.28 Lemma *1. Jeder geschlossene Weg in $(|K|, v)$ mit Basispunkt v ist (geschlossen) homotop zu einem geschlossenen Kantenzug mit Basispunkt v.*

2. Zwei geschlossene Wege in $(|K|, v)$ sind homotop genau dann, wenn die dazu homotopen Kantenzüge in K äquivalent sind.

3.29 Satz *(Kantengruppe als Fundamentalgruppe)*
Die Kantengruppe $E(K, v)$ ist isomorph zur Fundamentalgruppe $\pi(|K|, v)$.

Dieser Satz ist eine Folgerung aus dem vorangehenden Lemma. Man beachte, dass jeder geschlossene Kantenzug sich direkt als geschlossener Weg interpretieren läßt. Dies definiert einen Homomorphismus

$$E(K, v) \longrightarrow \pi(|K|, v).$$

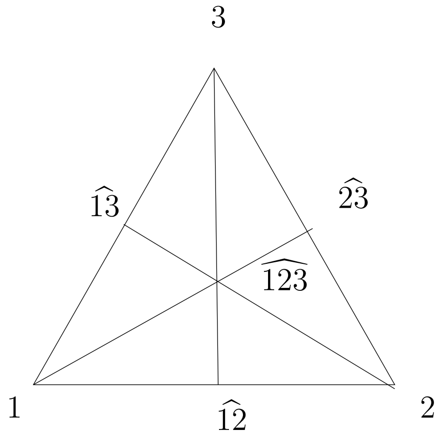
Die Injektivität und Surjektivität dieses Homomorphismus folgen aus dem Lemma. Den Beweis des Lemmas führt man mittels „simplizialer Approximation“, d.h. mit geeigneter Unterteilung. Für die technische Details siehe Armstrong, Ch. 6. Die dazu nötige Unterteilung ist erklärt wie folgt.

3.30 Definition *(Baryzentrische Unterteilung)*
Die erste baryzentrische Unterteilung K' oder K^1 von einem gegebenen simplizialen Komplex K ist definiert wie folgt:

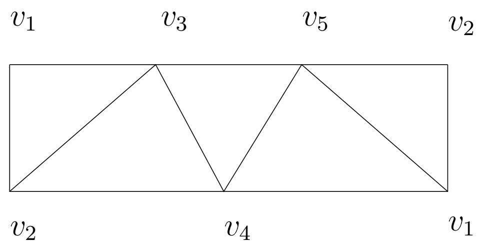
Jedes einzelne k–Simplex $\triangle^k = \langle v_0, \dots, v_k \rangle$ von K wird einzeln unterteilt, wobei die Ecken von $(\triangle^k)'$ alle Schwerpunkte $\widehat{v_{j_0} \dots v_{j_i}}$ aller i–dimensionalen Seiten von $\triangle^k$ sind, $(i = 0, 1, \dots, k)$.
Ein i–dimensionales Simplex in der Unterteilung $(\triangle^k)'$ ist bestimmt durch die Ecken $\left\{v_{j_0},\ \widehat{v_{j_0} v_{j_1}},\ \widehat{v_{j_0} v_{j_1} v_{j_2}},\ \dots,\ \widehat{v_{j_0}\ \dots v_{j_i}}\right\}$, und zwar für jedes geordnete Tupel $(v_{j_0}, \dots v_{j_i})$ in $\{v_0, \dots, v_k\}$. Ein $\triangle^k$ wird dabei in $(k+1)!$ k–Simplizes zerlegt.

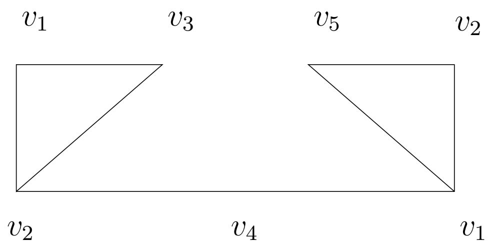
Die zweite baryzentrische Unterteilung K'' oder K^2 ist die Unterteilung der ersten u.s.w.

Beispiel $(\triangle^2)'$ für $k=2$:



Beispiel: Explizite Berechnung von $E(K,v)$ für die 6–Ecken–Triangulierung von $\mathbb{P}$: Als Basispunkt wählen wir die Ecke v_1. Jeder geschlossene Kantenzug, von v_1 nach v_1 kann durch Anwendung der Regel 3 so äquivalent umgeformt werden, dass die Ecke v_0 vermieden wird. Danach verläuft er in dem 5–Ecken–Möbiusband, das von v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 aufgespannt wird (Abbildung links). Die



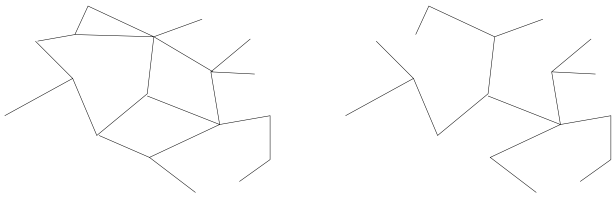


Kante v_3v_5 kann dann durch den Kantenzug $v_3v_4v_5$ ersetzt werden, entsprechend v_3v_4 durch $v_3v_2v_4$ und v_4v_5 durch $v_4v_1v_5$. Es verbleibt nur noch der Unterkomplex in der Abbildung rechts. Hier kann man $v_1v_3v_2$ durch v_1v_2 sowie $v_1v_5v_2$ durch v_1v_2 ersetzen. Damit werden die Ecken v_3 und v_5 entbehrlich, und jeder geschlossene Kantenzug ist äquivalent zu einem in $v_1v_2v_4v_1$, d.h. in der Vereinigung der 3 Kanten v_1v_2, v_2v_4, v_4v_1. Jedes nichttriviale Element ist also eine Potenz von $v_1v_2v_4v_1$ als Zyklus. Damit wird $E(K,v_1)$ von diesem einen Element erzeugt, ist also zyklisch. Um die Ordnung dieses Elementes zu bestimmen, betrachtet man wieder die ganze Triangulierung von $\mathbb{P}$ und sieht dort, dass das "Quadrat" $(v_1v_2v_4v_1)^2 = v_1v_2v_4v_1v_2v_4v_1$ zum konstanten Kantenzug äquivalent ist. Damit ist die Kantengruppe isomorph zu $\mathbb{Z}_2$.

3.31 Definition *(Unterkomplex)*
K sei ein simplizialer Komplex (im $\mathbb{R}^n$ oder abstrakt). Ein Unterkomplex K_0 von K ist eine Teilmenge von K derart, daß auch K_0 ein simplizialer Komplex ist und jedes Simplex von K_0 auch ein Simplex von K ist.
Ein Unterkomplex heißt voll, wenn jedes Simplex in K, das von Ecken in K_0 aufgespannt wird, schon in K_0 liegt.

3.32 Definition *(Graph, Baum)*
Ein 1–dimensionaler simplizialer Komplex heißt ein Graph (genauer heißt das in der Graphentheorie ein „Graph ohne Schleifen und Doppelkanten").

Ein Baum ist ein zusammenhängender und einfach zusammenhängender Graph (in der Graphentheorie auch „Graph ohne Zyklen" genannt).



Graph Baum

3.33 Lemma *(maximaler Baum)*
Jeder zusammenhängende simpliziale Komplex K enthält einen maximalen Baum als Unterkomplex. Dieser enthält alle Ecken von K.

Beweis: Diejenigen Unterkomplexe von K, die Bäume sind, sind halbgeordnet durch Inklusion. Dann ist ein maximaler Baum L ein solcher, dass kein anderer simplizialer Unterkomplex K' mit $L \subsetneq K'$ ein Baum ist. Ein maximaler Baum L existiert wegen der Endlichkeit von K.

Annahme: L enthält nicht alle Ecken, es sei etwa $v \in K \backslash L$.
Weil K zusammenhängend ist, existiert ein stetiger Weg von jeder Ecke $u \in L$ nach v, d.h. es gibt einen Kantenzug $uv_1 \dots v_{k-1}v_k$ mit $v_k = v$. Es sei v_i die letzte Ecke dieses Kantenzugs, die in L liegt. Dann gilt $i < k$. Wir bilden nun den Komplex

$$\widetilde{L} := L \cup \langle v_i v_{i+1} \rangle.$$

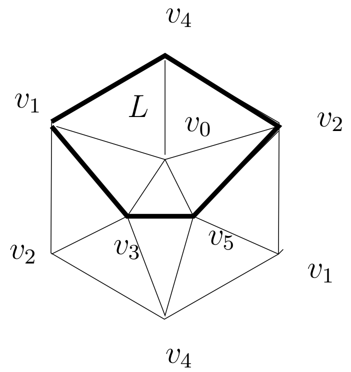
Dieses $\widetilde{L}$ enthält L und $\widetilde{L} \neq L$. Die Fundamentalgruppe von $\widetilde{L}$ ist isomorph zur Fundamentalgruppe von L (z.B. nach dem Satz von Seifert und van Kampen), und diese ist trivial. Also ist auch $\widetilde{L}$ ein Baum, also war L nicht maximal. $\square$

3.34 Definition *(Gruppe $G(K, L)$)*
$L \subseteq K$ sei ein einfach zusammenhängender Unterkomplex von K, der alle Ecken von K enthält (z.B. ein maximaler Baum). $v = v_0$ sowie $v_1 \dots v_n$ seien die Ecken.
Die Gruppe $G(K, L)$ ist dann definiert als diejenige Gruppe mit einem erzeugenden Element α_{ij} für jedes Paar v_i, v_j $(i < j)$, das eine Kante in $K \backslash L$ aufspannt und Relationen $\alpha_{ij} \cdot \alpha_{jk} = \alpha_{ik}$, falls $\{v_i, v_j, v_k\}$ ein Dreieck in K aufspannt. Setze dazu formal $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}^{-1}$, $\alpha_{ii} = 1$ sowie $\alpha_{ij} = 1$ für jedes Paar i, j, das eine Kante von L aufspannt.

3.35 Satz *$G(K, L)$ ist isomorph zu $E(K, v)$, also auch isomorph zu $\pi(|K|, v)$.*

Für einen Beweis siehe Armstrong, Ch.6. Hier wollen wir diese Aussage an einem Beispiel verifizieren, nämlich der obigen 6-Ecken-Triangulierung von $\mathbb{P}$.

Beispiel: K sei die 6–Ecken–Triangulierung von $\mathbb{R}P^2$ mit Ecken $v_0, \dots, v_5$,



L sei die Menge der fünf Dreiecke, die v_0 enthalten, im Bild fett umrandet. Dann ist $K \backslash L$ ein 5–Ecken–Möbiusband ohne die fünf Kanten des Randes. Erzeugende von $G(K, L)$ sind dabei die fünf folgenden α_{ij}:

$$\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{34}, \alpha_{45}, \alpha_{51}$$

Relationen sind

$$\alpha_{12}\alpha_{23} = \alpha_{13} = 1, \quad \underbrace{\alpha_{42}}_{=1} \alpha_{23} = \alpha_{43} = \alpha_{34}^{-1}$$

$$\alpha_{43} \underbrace{\alpha_{35}}_{=1} = \alpha_{45}, \quad \underbrace{\alpha_{14}}_{=1} \alpha_{45} = \alpha_{15} = \alpha_{51}^{-1}, \quad \alpha_{15} \underbrace{\alpha_{52}}_{=1} = \alpha_{12}.$$

Durch Elimination der Erzeugenden sieht man, dass

$$G(K, L) \cong \langle \alpha_{12} \mid \alpha_{12}\alpha_{12} = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2.$$

3F Die Eulersche Charakteristik

Die Eulersche Charakteristik ist durch den Eulerschen Polyedersatz 3.22 motiviert. Hier gilt, dass $v - e + f = 2$ stets die gleiche Zahl ist und somit eine Invariante darstellt. Allgemeiner führt das zu der folgenden Definition.

3.36 Definition *(Euler–Charakteristik)*
K sei ein simplizialer Komplex. Die Zahl aller (verschiedenen) i–Simplizes in K sei $f_i(K)$ Dann heißt die folgende Zahl die Euler–Charakteristik von K

$$\chi(K) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i f_i(K),$$

was in jedem Fall eine endliche Summe ist, weil K endlich ist. Nach Definition ist χ immer eine ganze Zahl.

3.37 Lemma *Für einen zusammenhängenden Graphen (1–dimensionaler simplizialer Komplex) gilt $\chi \leq 1$ mit Gleichheit genau dann, wenn der Graph ein Baum ist (d.h. einfach zusammenhängend ist).*

Beweis: Falls K ein Baum ist, dann gilt $\chi(K) = 1$. Dies folgt induktiv, wenn man mit einer Kante startet und bei jedem Schritt eine weitere Kante hinzufügt. Falls nicht, so enthält K einen maximalen Baum T, und es gilt

$$f_0(T) = f_0(K), \quad f_1(T) \leq f_1(K).$$

Dies impliziert

$$\chi(K) = f_0(K) - f_1(K) = f_0(T) - f_1(K) \leq f_0(T) - f_1(T) = 1$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $f_1(K) = f_1(T)$, also $T = K$. □

3.38 Lemma *(Grundlegende Eigenschaften der Euler-Charakteristik χ)*

(1) $\chi(\triangle^k) = 1$ *für jedes k–Simplex $\triangle^k$*

(2) χ *ist invariant unter baryzentrischer Unterteilung*

(3) χ *ist additiv, d.h. für je zwei simpliziale Komplexe K, L, so dass $K \cap L$ auch ein simplizialer Komplex ist, gilt die Gleichung:*

$$\chi(K \cup L) + \chi(K \cap L) = \chi(K) + \chi(L).$$

Beweis: (1) $\triangle^k$ sei ein k–Simplex, dann gilt $f_0 = k+1$, $\quad f_i = \binom{k+1}{i+1}$ für jedes $i = 1, \ldots, k$.
Wir zeigen nun die Gleichung $\chi(\triangle^k) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k+1}{i+1} = 1$ mit vollständiger Induktion nach k. Für $k=1$ ist das trivial. Diese Formel gelte nun für ein beliebiges, aber festes k. Dann folgt

$$\chi(\triangle^{k+1}) = \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\binom{k+2}{i+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\left(\binom{k+1}{i} + \binom{k+1}{i+1}\right) = \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\binom{k+1}{i} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k+1}{i+1}}_{=1}$$

$$= \binom{k+1}{0} + \sum_{i=0}^{k}(-1)^{i+1}\binom{k+1}{i+1} + 1 = 1 - 1 + 1 = 1.$$

Für den Rand $\partial\triangle^k$ eines k–Simplex gilt

$$\chi(\partial\triangle^k) = \chi(\triangle^k) - (-1)^k = 1 - (-1)^k.$$

(2) *Baryzentrische Unterteilung*:
Hier folgt die Behauptung $\chi\big((\triangle^k)'\big) = 1$ analog mit vollständiger Induktion nach der Dimension k. Der Induktionsanfang ist wieder trivial.

Für den Schritt von $k-1$ auf k verwenden wir, dass die erste baryzentrische Unterteilung von $\triangle^k$ nach Konstruktion ein Kegel über dem Rand $(\partial\triangle^k)'$ mit einer zusätzlichen Ecke (als Spitze des Kegels) im Zentrum ist. Also haben wir

$$f_0\big((\triangle^k)'\big) = f_0\big((\partial\triangle^k)'\big) + 1$$
$$f_i\big((\triangle^k)'\big) = f_i\big((\partial\triangle^k)'\big) + f_{i-1}\big((\partial\triangle^k)'\big) \quad \text{für} \quad i \geq 1.$$

Dies impliziert

$$\sum_{i\geq 0}(-1)^i f_i((\triangle^k)') = \sum_{i\geq 0}(-1)^i f_i(\partial\triangle^k)' + 1 + \sum_{i\geq 1}(-1)^i f_{i-1}((\partial\triangle^k)') = 1.$$

(3) *Additivität*:
Offenbar gilt für jedes i die Gleichung $f_i(K \cup L) + f_i(K \cap L) = f_i(K) + f_i(L)$. Die Behauptung $\chi(K \cup L) + \chi(K \cap L) = \chi(K) + \chi(L)$ folgt somit durch einfache Summation. $\square$

Bemerkung: Man kann χ als additives Funktional auf dem von allen konvexen Mengen erzeugten Ring mit $\cup$ als Addition (geschrieben $+$) und $\cap$ als Multiplikation (dem sog. *Konvexring*) erklären durch

$$\chi(A+B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(AB),$$

$$\chi(A) = 1 \text{ für jede konvexe und kompakte Menge } A.$$

Dabei gilt auch die Distributivität $A(B+C) = AB + AC$.

Durch die Eigenschaften (1) und (3) ist das Funktional χ eindeutig festgelegt.

3.39 Folgerung *Die Euler-Charakteristik verhält sich multiplikativ bei simplizialen Überlagerungen, d.h. für jede k-blättrige Überlagerung mit einer simplizialen Abbildung $p : Y \to X$ zwischen zwei triangulierten Räumen Y, X gilt*

$$\chi(Y) = \chi(X) \cdot k.$$

Beweis: Eine Triangulierung von X induziert (ggfs. nach Unterteilung) eine Triangulierung von Y durch Liftung. Das Urbild jedes i-Simplex besteht dann aus k Kopien davon. Also multipliziert sich die Euler-Charakteristik mit dem Faktor k. □

3.40 Satz *(topologische Invarianz; ohne Beweis)*
Die Euler–Charakteristik ist eine topologische Invariante, d.h. es gilt

$$\chi(K) = \chi(L),$$

falls $|K|$ und $|L|$ homöomorph sind.

Insbesondere folgt nach dem Beweis von 3.38 (i), dass $\chi(\partial\triangle^k) = 1 + (-1)^{k-1}$ und folglich $\chi(S^{k-1}) = 1 + (-1)^{k-1}$ gilt, weil die $(k-1)$-Sphäre S^{k-1} durch $\partial\triangle^{k-1}$ trianguliert wird. Aus den obigen Beispielen folgt ferner:

$$\chi(\mathbb{P}) = 1,\ \chi(\mathbb{T}) = 0.$$

3G Der Flächenklassifikationssatz für triangulierte Flächen

Ziel dieses Abschnitts ist ein Beweis des Flächenklassifikationssatzes 3.7 für triangulierte Flächen. Unter Benutzung des folgenden Satzes folgt dann 3.7 sogar allgemein.

3.41 Satz *(Triangulierbarkeit; ohne Beweis)*
Jede kompakte Fläche ist triangulierbar.

3.42 Satz *(Euler-Charakteristik für die Modell-Flächen)*
M sei eine kompakte Fläche, $\mathbb{S} = S^2$ sei die Sphäre, $\mathbb{T}$ sei der Torus und $\mathbb{P}$ sei die projektive Ebene. Dann gilt:

$$\chi(M\#\mathbb{T}) = \chi(M) - 2$$

$$\chi(M\#\mathbb{P}) = \chi(M) - 1$$

$$\chi(\mathbb{S}) = \chi(S^2) = 2.$$

Also folgt die Gleichung

$$\chi = 2 - 2g$$

für jede orientierbare oder nichtorientierbaren Modell–Fläche vom Geschlecht g (wobei das Geschlecht von $\mathbb{P}$ als $\frac{1}{2}$ definiert ist). Allgemein gilt für je zwei Flächen M_1, M_2

$$\chi(M_1\#M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2.$$

Beweis: Die Gleichung $\chi(S^2) = 2$ folgt ja schon aus dem Eulerschen Polyedersatz. Es sei nun K eine Triangulierung von M, d.h. ein simplizialer Komplex K, so daß $|K|$ homöomorph ist zu der gegebenen kompakten Fläche M (ohne Rand). Speziell sei P eine triangulierte projektive Ebene und T sei ein triangulierter Torus. Alle drei seien mit paarweise disjunkten Eckenmengen gewählt. Dann wählen wir ein Dreieck $\triangle_K$ in K, ein Dreieck $\triangle_P$ in P und ein Dreieck $\triangle_T$ in T und bilden:

$$K_P := (K\backslash\triangle_K^\circ) \cup (P\backslash\triangle_P^\circ)$$
$$K_T := (K\backslash\triangle_K^\circ) \cup (T\backslash\triangle_T^\circ),$$

jeweils mit Identifikationen entlang des Ränder von $\triangle_K, \triangle_P$ bzw. $\triangle_K, \triangle_T$. Dann gilt
K_P ist eine Triangulierung von $|K|\#|P|$
K_T ist eine Triangulierung von $|K|\#|T|$,
und es folgt aus der Additivität

$$\chi(K_P) = \chi(K\backslash\triangle_K^\circ) + \chi(P\backslash\triangle_P^\circ) - 0 = \chi(K) + \chi(P) - 2 = \chi(K) - 1,$$

$$\chi(K_T) = \chi(K\backslash\triangle_K^\circ) + \chi(T\backslash\triangle_T^\circ) - 0 = \chi(K) + \chi(T) - 2 = \chi(K) - 2.$$

Also folgt

$$\chi(M\#\mathbb{P}) = \chi(M) - 1 \quad \text{und} \quad \chi(M\#\mathbb{T}) = \chi(M) - 2.$$

□

3.43 Folgerung *Eine k-blättrige Überlagerung $p : Y \to X$ zwischen zwei kompakten Flächen X, Y kann es nur dann geben, wenn $\chi(Y) = k \cdot \chi(X)$ oder $(2 - 2g_Y) = k(2 - 2g_X)$, wobei g_X, g_Y das Geschlecht von X, Y bezeichnet.*

Diese Ganzzahligkeitsbedingung schränkt die Möglichkeiten erheblich ein. Zum Beispiel gibt es mit $Y = S^2$ nur eine 2-blättrige Überlagerung (nämlich die projektive Ebene), aber keine für $k \geq 3$. Mit $Y = \mathbb{F}_{16}$ haben wir $\chi = -30$ und daher die Teiler $30, 15, 10, 6, 5, 3, 2$. so kann es nur Überlagerungen auf $X = \mathbb{F}_6, \mathbb{F}_4, \mathbb{F}_2$ geben sowie auf $X = \mathbb{F}^*_{17}, \mathbb{F}^*_{12}, \mathbb{F}^*_8, \mathbb{F}^*_7, \mathbb{F}^*_5, \mathbb{F}^*_4, \mathbb{F}^*_3$. Die Fläche $Y = \mathbb{F}^*_9$ überlagert nur $X = \mathbb{F}^*_3$ und keine andere Fläche, weil $\chi(\mathbb{F}^*_9) = 2 - 9 = -7$ keine Teiler $k \neq 1, 7$ zulässt. Man erhält diese 7-blättrige Überlagerung wie folgt: Der Torus $\mathbb{T}$ läßt eine 7-blättrige Überlagerung auf sich selbst zu, vgl. die Bemerkung nach 2.20 auf S. 51. Durch symmetrisches Aufsetzen von 7 "Kreuzhauben" $\mathbb{P}$ erhält man eine Überlagerung von $\mathbb{T}\#(7\mathbb{P})$ auf $\mathbb{T}\#\mathbb{P}$. Ein anderes Beispiel ist explizit beschrieben in L.C.Kinsey, Topology of Surfaces, Ch. 7.4 (S.168).

Die Ganzzahligkeitsbedingung in 3.43 ist im wesentlichen auch hinreichend:

3.44 Satz *X, Y seien zwei kompakte Flächen (ohne Rand). Dann existiert eine k-blättrige Überlagerung $p\colon Y \to X$ genau dann, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\chi(Y) = k \cdot \chi(X)$
2. *Falls X orientierbar ist, dann auch Y.*
3. *Falls X nichtorientierbar, aber Y orientierbar ist, dann ist k eine gerade Zahl.*

Wir wollen nun den Flächenklassifikationssatz 3.7 für triangulierte Flächen in der folgenden Version beweisen:

3.45 Satz (Flächenklassifikationssatz)
Jede kompakte triangulierte Fläche M (ohne Rand) ist zu einer der Modell–Flächen $\mathbb{S}$, $\mathbb{T}\# \cdots \#\mathbb{T}$, $\mathbb{P}\# \cdots \#\mathbb{P}$ in 3.4 homöomorph, und zwar ist $\chi(M) = 2 - 2g$, wenn g das Geschlecht bezeichnet. Je zwei verschiedene dieser Modell–Flächen sind nicht homöomorph zueinander.

Folgerung: *Je zwei triangulierte Flächen M_1, M_2 sind homöomorph zueinander genau dann, wenn $\chi(M_1) = \chi(M_2)$ gilt und wenn entweder beide orientierbar oder beide nichtorientierbar sind.*

Zunächst sollten wir klären, was die Begriffe "orientierbar" und "nichtorientierbar" eigentlich genauer bedeuten.

3.46 Definition *(Orientierung)*
Eine Orientierung eines Dreiecks $\triangle^2$ ist ein Drehsinn (= Durchlaufsinn des Randes von $\triangle^2$), d.h. eine zyklische Reihenfolge (abc) oder (acb), falls a, b, c die drei Ecken sind. Eine Orientierung einer triangulierten Fläche (mit oder ohne Rand) ist die Festlegung einer Orientierung für jedes einzelne Dreieck derart, dass benachbarte Dreiecke stets kohärent (oder verträglich) orientiert sind, d.h. die gemeinsame Randkante wird in den beiden Dreiecken in verschiedenen Richtungen durchlaufen. M heißt orientierbar, falls eine Orientierung auf M existiert, andernfalls eben nichtorientierbar.

Dieser Begriff von Orientierbarkeit stimmt überein mit der Terminologie aus 3.4. Das heißt: Die orientierbaren Flächen $\mathbb{T}\#\cdots\#\mathbb{T}$ sind orientierbar auch im obigen Sinne, und die nichtorientierbaren Flächen $\mathbb{P}\#\cdots\#\mathbb{P}$ sind nichtorientierbar im obigen Sinne. Eine orientierbare Fläche kann niemals homöomorph zu einer nichtorientierbaren sein. Das folgt z.B. aus dem folgenden Lemma:

3.47 Lemma *Eine triangulierte Fläche ist genau dann nichtorientierbar, wenn sie ein trianguliertes Möbiusband (als Unterkomplex) enthält.*

Dieses Möbiusband kann z.B. als nach Zahl der Dreiecke kleinste nichtorientierbare Fläche mit Rand gewonnen werden, die als Unterkomplex enthalten ist.

3.48 Definition *(Verdickung)*
Es sei L ein eindimensionaler Unterkomplex einer triangulierten Fläche K. Dann ist die Verdickung von L definiert als die Menge aller Simplizes der zweifachen baryzentrischen Unterteilung K'', die L treffen (bzw. L'').

Diese Verdickung stellt ein trianguliertes Analogon von dem dar, was man in metrischer Hinsicht als *Tubenumgebung* bezeichnet. Im $\mathbb{R}^n$ ist die volle ε-Tube von A als die Menge derjenigen Punkte definiert, deren Abstand von A kleiner oder gleich ε ist. Entsprechendes gilt für Kurven innerhalb einer Fläche.

3.49 Lemma
1. Die Verdickung eines Baumes L ist stets homöomorph zu einer Kreisscheibe.

2. Die Verdickung eines geschlossenen, eingebetteten Kantenzuges L (mit $L \cong S^1$) ist homöomorph entweder zum Zylinder oder zum Möbiusband.

Beweisskizze: Den Beweis von Teil 1 führt man durch Induktion nach den Ecken. Die Verdickung einer einzelnen Kante ist offensichtlich homöomorph zur Kreisscheibe. Die Verdickung von $L \cong S^1$ kann man dann als Vereinigung der Verdickungen zweier Teile A, B erhalten mit $A \cup B = L$, wobei A, B jeweils homöomorph zu einem Intervall sind, insbesondere auch Bäume. Daher erhält man Teil 2 als Folgerung von Teil 1.

3.50 Lemma *Für jede kompakte triangulierte Fläche M (ohne Rand) gilt $\chi(M) \leq 2$ mit Gleichheit genau dann, wenn M homöomorph zu S^2 ist.*

Beweis: Sei $B \subset M$ ein maximaler Baum (B enthält demnach alle Ecken von M). Wir definieren den dualen Graphen B^* wie folgt:

Die *Ecken* von B^* sind die Baryzentren von Dreiecken in M.

Zwei Ecken in B^* sind durch eine *Kante* in B^* verbunden, wenn die zugehörigen Dreiecke in $M \setminus B$ benachbart sind, also eine gemeinsame Kante haben.

Es gilt nun offenbar:

$$\chi(M) = \chi(B) + \chi(B^*),$$

weil B alle Ecken von M enthält, B^* genau so viele Ecken enthält wie M Dreiecke und weil $B \cup B^*$ genau so viele Kanten hat wie M.
Es folgt:

$$\chi(M) = \chi(B) + \chi(B^*) \leq 2$$

nach Lemma 3.37 über die Euler-Charakteristik eines Graphen bzw. Baumes.

Dabei impliziert (ebenfalls nach 3.37) die Gleichheit $\chi(M) = 2$, dass B^* auch ein Baum ist. Man kann M also überdecken durch zwei triangulierte Kreisscheiben, nämlich Verdickungen von B und B^* (als "Einflussbereiche" von B bzw. B^*). M ist also die Vereinigung zweier Kreisscheiben, die längs ihres Randes verheftet werden, also homöomorph zur Sphäre S^2. $\square$

Diese Vorbereitungen ermöglichen nun einen relativ einfachen
Beweis von 3.45:

Wir betrachten einen einfach geschlossenen Kantenzug L in M ($L \cong S^1$). Es können jetzt zwei Fälle eintreten:

1. Fall: *Jeder solche einfach geschlossene Kantenzug zerlegt M in zwei oder mehr Komponenten.*
Wähle B und B^* wie in Lemma 3.50 (B maximaler Baum und B^* dualer Graph). Wenn B^* auch ein Baum ist, dann ist $M \cong S^2$ nach dem Beweis von 3.50. Anderenfalls enthält B^* einen Zyklus, also einen einfach geschlossenen Kantenzug

$L \cong S^1$. Nach Annahme zerlegt dieser M in mindestens zwei Komponenten. Jede davon muss auch mindestens eine Ecke der Triangulierung enthalten. Andererseits enthält B alle Ecken von M und ist zusammenhängend. Widerspruch! Damit ist M in diesem ersten Fall stets homöomorph zu $\mathbb{S} = S^2$.

2. Fall: *Es gibt einen einfach geschlossenen Kantenzug L, der M nicht zerlegt.*

Fall 2.1: M ist orientierbar. Dann ist die Verdickung von L ein Zylinder, denn das Möbiusband ist wegen der Orientierbarkeit von M ausgeschlossen, vgl. Lemma 3.47. Definiere dann $\widetilde{M}$ als M ohne diesen Zylinder und mit eingeklebten triangulierten Kreisscheiben entlang der zwei Ränder. Die Euler-Charakteristik eines Zylinders $S^1 \times [0,1]$ ist $\chi = 0$, wie man z.B. an speziellen Triangulierungen sehen kann und was auch aus der Additivität der Euler-Charakteristik folgt. Damit erhalten wir $M \cong \widetilde{M} \# \mathbb{T}$ sowie

$$\chi(\widetilde{M}) = \chi(M) - 0 + 2 = \chi(M) + 2.$$

Fall 2.2: M ist nichtorientierbar. Dann gibt es geschlossene Wege (und Kantenzüge) in M, längs derer eine gewählte Orientierung umgekehrt wird. Damit gibt es (z.B. nach 3.28) ein solches L derart, dass die Verdickung von L ein Möbiusband ist. Wir definieren nun $\widetilde{M}$ als M ohne dieses Möbiusband mit eingeklebter triangulierter Kreisscheibe in den Rand. Die Euler-Charakteristik vom Möbiusband ist gleich null, und es folgt $M \cong \widetilde{M} \# \mathbb{P}$ sowie

$$\chi(\tilde{M}) = \chi(M) - 0 + 1 = \chi(M) + 1.$$

Dieses Verfahren ist dann für $\widetilde{M}$ statt für M zu iterieren. Es bricht nach endlich vielen Schritten ab, weil $\chi(N) \leq 2$ für jede kompakte Fläche N ohne Rand gilt nach Lemma 3.50.

Für orientierbares M tritt immer Fall 2.1 ein, also

$$M \cong \widetilde{M} \# \mathbb{T} \# \ldots \# \mathbb{T}$$

mit orientierbarem $\widetilde{M}$. Wenn das Verfahren hier abbricht, haben wir $M \cong \mathbb{T} \# \mathbb{T} \ \cdots \# \mathbb{T}$ und $\chi(M) = 2 - 2g$, wenn g die Anzahl der Kopien von $\mathbb{T}$ ist. χ unterscheidet dann die verschiedenen Flächen als topologische Invariante (3.40).

Für nichtorientierbares M tritt immer Fall 2.2 ein, also

$$M \cong \widetilde{M} \# \mathbb{P} \# \ldots \# \mathbb{P},$$

wobei allerdings $\widetilde{M}$ orientierbar werden kann. Wenn das Verfahren hier abbricht, haben wir unter Verwendung von 3.5 $M \cong \mathbb{T} \# \cdots \# \mathbb{T} \# \mathbb{P} \# \cdots \# \mathbb{P} \cong \mathbb{P} \# \cdots \# \mathbb{P}$ und $\chi(M) = 2 - g$, wenn g die Gesamtzahl der Kopien von $\mathbb{P}$ ist. $\square$

Anhang 1

Satz von Tychonoff
Es sei $(X_i)_{i \in I}$ *eine Familie topologischer Räume mit topologischem Produkt* $X = \Pi_i X_i$.
Dann ist X *(quasi-)-kompakt genau dann, wenn alle* X_i *(quasi–)kompakt sind.*

Beweis: Zunächst zum Hausdorff-Axiom:
Wenn alle X_i das T_2-Axiom erfüllen, dann ist X ebenfalls ein T_2-Raum. Das liegt an der Konstruktion der Produkttopologie: Zwei verschiedene Punkte unterscheiden sich in mindestens einer Komponente X_j und können dann dort durch disjunkte Umgebungen U_j, V_j getrennt werden. Deren Urbilder in X unter der j-ten Projektion p_i sind dann dann ebenfalls disjunkt und trennen die beiden gegebenen Punkte.

Umgekehrt sei X ein T_2-Raum und $x_j \neq y_j$ zwei Punkte in X_j, die *nicht* durch disjunkte Umgebungen getrennt werden können. Es sei x ein Punkt in X mit $p_j(x) = x_j$, dann können wir einen Punkt y so definieren, dass $p_i(x) = p_i(y)$ gilt für alle $i \neq j$ und $p_j(y) = y_j$. Die Punkte x und y können dann in X nicht getrennt werden. Widerspruch. Also ist jedes X_j ein T_2-Raum.

Vorsicht: Dass wir solchen Punkt x wählen können, folgt für überabzählbares I aus dem Auswahlaxiom, kann aber sonst nicht streng bewiesen werden. Dass ein nichtleeres Produkt nichtleerer Räume X_i nicht leer ist, folgt für eine überabzählbare Indexmenge ebenfalls nur aus dem Auswahlaxiom.

Zur Quasikompaktheit: Wenn X quasikompakt ist, dann sind nach Lemma 1.38 alle $X_i = p_i(X)$ ebenfalls quasikompakt.

Der schwierige Teil ist die Umkehrung: *Wenn alle* X_i *quasikompakt sind, dann ist* X *quasikompakt.* Zur Vorbereitung des Beweises dieser Aussage benötigen wir den Begriff des Ultrafilters:

Definition (Ultrafilter)
Ein *Ultrafilter* $\mathcal{F}$ auf einer Menge ist ein nicht verfeinerbarer Filter, d.h. falls $\mathcal{F}'$ ein weiterer Filter auf derselben Menge ist mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$, dann gilt $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$.

Das ZORNsche Lemma impliziert: *Jeder Filter ist in einem Ultrafilter enthalten.*

Ultrafilter haben die folgende merkwürdige Eigenschaft:

Lemma 1
Es sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf Y, und $A \subset Y$ sei eine beliebige Teilmenge mit $A \neq \emptyset, A \neq Y$. Dann gilt entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $Y \setminus A \in \mathcal{F}$ (niemals beides!).

Beweis von Lemma 1: Wir zeigen die folgende Aussage:
Es trifft entweder A alle $F \in \mathcal{F}$ oder $Y \setminus A$ trifft alle $F \in \mathcal{F}$.

Im Widerspruch dazu nehmen wir an:
Es gibt $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ mit $A \cap F_1 = \emptyset$ und $(Y \setminus A) \cap F_2 = \emptyset$.
Dies impliziert $\emptyset = (A \cap F_1 \cap F_2) \cup (Y \setminus A) \cap F_1 \cap F_2 = Y \cap (F_1 \cap F_2) = F_1 \cap F_2$ im Widerspruch dazu, dass $\mathcal{F}$ ein Filter ist, vgl. Def. 1.10.

Wenn nun weder A noch das Komplement $Y \setminus A$ im Filter wäre, gäbe es die Möglichkeit, eins von beiden dem Filter hinzuzufügen und damit einen Filter $\mathcal{F}'$ zu erhalten, der $\mathcal{F}$ echt umfasst. Dies widerspricht aber der Eigenschaft von $\mathcal{F}$, ein Ultrafilter zu sein. $\square$

Die Ultrafilter hängen mit der Quasikompaktheit auf die folgende einfache Weise zusammen:

Lemma 2
Ein topologischer Raum Y ist quasikompakt genau dann, wenn jeder Ultrafilter auf Y konvergiert.

Beweis von Lemma 2:

" $\Longleftarrow$": Wir nehmen an, dass jeder Ultrafilter auf Y konvergiert und dass dennoch Y nicht quasikompakt ist. Dann gibt es eine offene Überdeckung $(O_\alpha)_{\alpha \in I}$ von Y, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Wir betrachten dann alle möglichen

$$Y \setminus \bigcup_{\alpha \in J} O_\alpha \neq \emptyset \text{ mit einer endlichen Teilmenge } J \text{ von } I.$$

Dies ist eine Filterbasis, weil der Durchschnitt je zweier dieser Mengen nicht leer ist:

$$\Big(Y \setminus \bigcup_{\alpha \in J_1} O_\alpha\Big) \cap \Big(Y \setminus \bigcup_{\alpha \in J_2} O_\alpha\Big) = Y \setminus \bigcup_{\alpha \in J_1 \cup J_2} O_\alpha \neq \emptyset.$$

Es sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter, der den davon erzeugten Filter umfasst (Dieser existiert mittels des ZORNschen Lemmas). Nach Voraussetzung konvergiert $\mathcal{F}$ gegen ein $y \in Y$. Andererseits gilt $y \in O_\alpha$ für ein $\alpha \in I$ wegen der Überdeckungseigenschaft. Wegen der Konvergenz muss nun O_α in $\mathcal{F}$ liegen, andererseits muss nach Konstruktion von $\mathcal{F}$ auch das Komplement $Y \setminus O_\alpha$ in $\mathcal{F}$ liegen, ein Widerspruch.

" $\Longrightarrow$": Y sei quasikompakt, und $\mathcal{F}$ sei ein nicht konvergenter Ultrafilter auf Y. Für jedes $y \in Y$ existiert dann eine offene Umgebung U_y mit $U_y \notin \mathcal{F}$. Die Familie aller dieser U_y bildet dann eine offene Überdeckung von Y. Folglich existiert eine endliche Teilüberdeckung $U_1 \cup \cdots \cup U_n = Y$. Weil $U_j \notin \mathcal{F}$ gilt für jedes $i = 1, \ldots, n$, muss nach Lemma 1 $Y \setminus U_j \in \mathcal{F}$ gelten für jedes $i = 1, \ldots, n$. Damit gilt aber auch

$$\emptyset = Y \setminus Y = Y \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^{n} U_j \Big) = \bigcap_{j=1}^{n} \big(Y \setminus U_j \big) \in \mathcal{F}$$

im Widerspruch dazu, dass $\mathcal{F}$ ein Filter ist. □

Der Zusammenhang mit dem topologischen Produkt (und damit mit dem Satz von Tychonoff) ergibt sich aus dem folgenden Lemma:

Lemma 3
Ein Filter $\mathcal{F}$ konvergiert in einem topologischen Produkt $X = \Pi_i X_i$ genau dann, wenn für jedes i der Filter $p_i(\mathcal{F})$ in X_i konvergiert.
Dabei bezeichnet $p_i(\mathcal{F})$ den von allen $p_i(F), F \in \mathcal{F}$ erzeugten Filter auf X_i.

Beweis von Lemma 3:

" $\Longrightarrow$": Wenn $\mathcal{F}$ feiner ist als der Umgebungsfilter $\mathcal{U}$ des Punktes $x = (x_i)_{i \in I}$, dann ist für jedes $i \in I$ $p_i(\mathcal{F})$ feiner ist als der Umgebungsfilter $\mathcal{U}_i$ von x_i, weil p_i stetig und offen ist. Wir merken außerdem an, dass $p_i(\mathcal{F})$ wieder ein Ultrafilter ist, wenn $\mathcal{F}$ einer ist.

" $\Longleftarrow$": Wir nehmen an, jedes $p_i(\mathcal{F})$ konvergiere gegen ein $x_i \in X_i$ und setzen $x := (x_i)_{i \in I}$. Es ist dann $p_i(\mathcal{F})$ feiner als der Umgebungsfilter $\mathcal{U}_i$ von x_i für jedes $i \in I$. Ferner ist nach Konstruktion der Produkttopologie das Mengensystem

$$\Big\{ \bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(U_j) \;\Big|\; J \subset I \text{ endlich und } U_j \in \mathcal{U}_j \Big\}$$

eine Basis des Umgebungsfilters von x. Wegen der Konvergenz ist jedes $U_j \in \mathcal{U}_j$ in $p_i(\mathcal{F})$ enthalten, also ist jedes $p_j^{-1}(U_j)$ in $\mathcal{F}$ enthalten. Damit ist aber auch für jede endliche Indexmenge J jedes $\bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(U_j)$ in $\mathcal{F}$ enthalten, weil $\mathcal{F}$ ein Filter ist. Nach Konstruktion der Produkttopologie ist damit $\mathcal{F}$ feiner als der Umgebungsfilter von x, konvergiert also gegen x. □

Beweis des Satzes von Tychonoff:

Wir müssen nur noch zeigen:

Wenn alle X_i quasikompakt sind, dann ist auch X quasikompakt.

Es seien also alle X_i quasikompakt, und $\mathcal{F}$ sei ein Ultrafilter auf X. Wie in Lemma 3 bezeichne $p_i(\mathcal{F})$ den von allen $p_i(F), F \in \mathcal{F}$ erzeugten Filter. Es ist dann jedes $p_i(\mathcal{F})$ ein Ultrafilter auf X_i. Nach Lemma 2 konvergiert er in X_i gegen einen Punkt x_i. Nach Lemma 3 konvergiert folglich $\mathcal{F}$ gegen den Punkt $x := (x_i)_{i \in I} \in X$. Da $\mathcal{F}$ beliebig war, folgt wiederum aus Lemma 2, dass X quasikompakt ist.

$\square$