Skript zur Vorlesung
Dreidimensionale Topologie

Simon A. King
Sommersemester 2004, TU Darmstadt

19. September 2005

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundbegriffe der Topologie

1.1 Metrische Räume

Es sei $\mathbb{R}_{\geq} = [0, \infty[$.

Definition 1.1.1 *Ein* ***metrischer Raum*** *ist eine Menge X zusammen mit einer Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq}$ (die* ***Metrik****), wenn für alle $x, y, z \in X$ folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *$d(x, y) = d(y, x)$ (**Symmetrie**),*
2. *$d(x, y) = 0$ genau dann wenn $x = y$,*
3. *$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (**Dreiecksungleichung**)*

Beispiel 1.1.2

1. $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik ist ein metrischer Raum.
2. Jede Teilmenge Y eines metrischen Raumes X mit Metrik d trägt die **induzierte Metrik**, nämlich die Einschränkung von d auf $Y \times Y$. Weil in den Axiomen der Metrik kein Existenzquantor vorkommt, sind auch für die Einschränkung von d alle nötigen Eigenschaften erfüllt.
3. Jede Menge X lässt sich durch die Metrik
$$d_0(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$
zu einem metrischen Raum machen. Die Symmetrie ist offensichtlich, das zweite Metrik-Axiom ist per definitionem erfüllt, und der Nachweis der Dreiecksgleichung ist eine sehr leichte Übungsaufgabe.
4. Jeder endliche Graph lässt sich als metrischer Raum auffassen, indem man seine Kanten als Strecken der Länge 1 modelliert. Der Abstand zweier Punkte im Graphen ist dann einfach die Länge der kürzesten Verbindung.

Wie man es für den $\mathbb{R}^n$ aus den Grundvorlesungen kennt, definiert man in einem metrischen Raum (X, d) „kugelförmige" Umgebungen,

$$U_\epsilon(x) := \{y \in X : \ d(x, y) < \epsilon\}$$

für $x \in X$, $\epsilon > 0$, die **ϵ-Umgebung** von x. Man muss sich jedoch darüber im Klaren sein, dass diese Umgebungen im Allgemeinen nicht der üblichen Anschauung eines offenen Balles entspricht. Im Beispiel 1.1.2.3. etwa ist $U_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\}$ und $U_2(x) = X$. Die ϵ-Umgebungen dienen wie gewohnt zur Definition offener Mengen:

Definition 1.1.3 *Eine Teilmenge $O \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) heißt **offen bezüglich** d, wenn jeder Punkt aus O eine in O enthaltene ϵ-Umgebung besitzt, also für alle $x \in O$ ein $\epsilon_x > 0$ existiert mit $U_{\epsilon_x}(x) \subset O$.*

*Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen bezüglich** d, wenn ihr Komplement $X \setminus A$ eine offene Menge ist.*

1.2 Topologische Räume

Wir begannen diese Einleitung mit dem Begriff der metrischen Räume, weil dadurch erstens ein direkter Bezug zu den schon aus den Grundvorlesungen bekannten Begriffen geschaffen wird und weil zweitens die für diese Vorlesung relevanten Räume (*Mannigfaltigkeiten*) alle metrisierbar sind. Dennoch ist es für die saubere Definition einiger Grundtechniken sinnvoll, auch den allgemeineren Begriff des topologischen Raumes einzuführen.

Definition 1.2.1 *Eine Menge $\mathcal{T}$ von Teilmengen einer Menge X heißt **Topologie** auf X, und $(X, \mathcal{T})$ heißt **topologischer Raum**, wenn gilt*

1. *$\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$,*
2. *für alle $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ ist auch $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$, und*
3. *für eine beliebige Menge $\{O_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ gilt $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.*

*Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen **offene Mengen** von X. Eine Teilmenge von X heißt **abgeschlossen**, wenn ihr Komplement offen ist. Eine **offene Umgebung** einer Teilmenge $A \subset X$ ist eine offene Menge, die A enthält. Eine **Umgebung** von A ist eine Menge, die eine offene Umgebung von A enthält. Der **Abschluss** $\overline{Y}$ einer Menge $Y \subset X$ ist der Durchschnitt aller in X abgeschlossener Mengen, die Y enthalten.*

Anders ausgedrückt: In einem topologischen Raum sind sowohl die leere Menge als auch der gesamte Raum offen, der Durchschnitt zweier offener Mengen ist offen, und die beliebige Vereinigung offener Mengen ist offen.

Wenn X eine beliebige Menge ist, dann ist $\{\emptyset, X\}$ eine Topologie auf X. Ebenso ist die Menge aller Teilmengen von X eine Topologie auf X (die *diskrete* Topologie). Interessantere Beispiele liefern metrische Räume:

Lemma 1.2.2 *Wenn (X, d) ein metrischer Raum ist, dann bilden die bezüglich der Metrik offenen Mengen eine Topologie auf X.*

Beweis Nach Definition sind $\emptyset$ und X offen bzgl. d. Wenn $\{O_i\}_{i\in I}$ eine Menge offener Mengen bzgl. d ist, dann gibt es zu jedem Element von O_i eine in O_i enthaltene ϵ-Umgebung. Diese ist natürlich auch in $\bigcup_{i\in I} O_i$ enthalten, also ist $\bigcup_{i\in I} O_i$ offen. Es seien $O_1, O_2 \subset X$ offen bzgl. d. Zu jedem $x \in O_1 \cap O_2$ gibt es $\epsilon_{x,1}, \epsilon_{x,2} > 0$, so dass $U_{\epsilon_{x,1}}(x) \subset O_1$ und $U_{\epsilon_{x,2}}(x) \subset O_2$. Wir setzen $\epsilon_x := \min\{\epsilon_{x,1}, \epsilon_{x,2})$, und damit gilt $U_{\epsilon_x}(x) \subset O_1 \cap O_2$. □

Wie man am Beispiel des $\mathbb{R}^n$ mit seiner üblichen Metrik sieht, ist der Durchschnitt unendlich vieler offener Mengen nicht notwendig offen. Als Übung kann man zeigen, dass der Durchschnitt *endlich vieler* offener Mengen in einem topologischen Raum stets offen ist.

Jede Teilmenge $Y \subset X$ eines topologischen Raumes X erbt in der folgenden Weise eine Topologie: Eine Teilmenge $O \subset Y$ heißt offen in Y, wenn es eine in X offene Menge $\tilde{O} \subset X$ gibt mit $O = \tilde{O} \cap Y$. Man beachte, dass eine offene Menge in Y nicht notwendig offen in X ist: Das halboffene Intervall $]0, 1]$ ist offen im abgeschlossenen Intervall $[-1, 1]$, aber es ist *nicht* offen in $\mathbb{R}$.

1.3 „Schöne“ Räume

Wer schon mal eine Vorlesung über allgemeine Topologie gehört hat, wird bestätigen, dass es topologische Räume gibt, deren Eigenschaften fast beliebig weit von denen unseres Anschauungsraumes entfernt sind und die man mit gewissem Recht als pathologisch ansehen kann. Wir werden in den folgenden Abschnitten einige spezielle Typen von topologischen Räumen kennen lernen, bei denen manche dieser Pathologien vermieden werden.

1.3.1 Zusammenhängende Räume

Wenn ein Raum in mehrere Teile zerfällt, die miteinander nichts zu tun haben, kann man jeden Teil des Raumes für sich betrachten. Doch was heißt *Teil* eines Raumes? Hier spielt der Begriff des *Zusammenhangs* eine Rolle.

Definition 1.3.1 *Ein topologischer Raum X heißt* ***zusammenhängend,*** *wenn es keine zwei offenen Mengen $Y_1, Y_2 \subset X$ gibt mit $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ und $X = Y_1 \cup Y_2$.*

Ein topologischer Raum X heißt ***wegzusammenhängend,*** *wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\phi\colon [0, 1] \to X$ gibt mit $\phi(0) = x$ und $\phi(1) = y$.*

Man kann relativ leicht zeigen, dass wegzusammenhängende Räume zusammenhängend sind. Die Umkehrung gilt nicht. Eine **(Weg-)Zusammenhangskomponente** X ist ein bezüglich Inklusion maximaler (weg-)zusammenhängender Teilraum von X.

1.3.2 Separierte Räume

Zwar ist jeder metrische Raum auch ein topologischer Raum, es gibt jedoch Topologien, die nicht von einer Metrik induziert sind. Es sei nämlich (X, d) ein metrischer Raum und $x, y \in X$ zwei verschiedene Punkte. Mit $\epsilon := \frac{1}{3}d(x, y) > 0$ erhalten wir $U_\epsilon(x) \cap U_\epsilon(y) = \emptyset$, die Punkte x und y besitzen also disjunkte offene Umgebungen.

Diese Eigenschaft ist nicht selbstverständlich. Es sei zum Beispiel $X := \{1, 2\}$ und $\mathcal{T} := \{\emptyset, \{1, 2\}\}$. Man verifiziert leicht, dass dadurch eine Topologie definiert ist. Jedoch ist $\{1, 2\}$ die einzige offene Umgebung von 1 und von 2. Die beiden Punkte besitzen also keine disjunkten offenen Umgebungen, und damit kann die Topologie auf X nicht durch eine Metrik induziert sein. Eine interessanteres Beispiel findet man in Übung 1.6.3.7. Diese Schwierigkeiten geben Anlass zu folgender Definition.

Definition 1.3.2 *Ein topologischer Raum heißt **separiert** (oder auch **hausdorffsch**), wenn je zwei verschiedene Punkte disjunkte offene Umgebungen besitzen.*

Wie oben gezeigt, sind alle metrischen Räume separiert. Jede Teilmenge $Y \subset X$ eines separierten Raumes X ist (mit der induzierten Topologie) separiert, denn wenn zwei Punkte $x, y \in Y$ in X disjunkte offene Umgebungen $U_x, U_y \subset X$ besitzen, so sind $U_x \cap Y$ und $U_y \cap Y$ offene Umgebungen von x, y in Y, und sie sind natürlich immer noch disjunkt.

1.3.3 Räume mit abzählbarer Basis

In einem metrischen Raum (X, d) haben wir eine Menge $O \subset X$ als offen bezeichnet, wenn jeder Punkt aus O eine in O enthaltene ϵ-Umgebung besitzt. Das heißt aber, dass O die Vereinigung all dieser ϵ-Umgebungen ist. Mit anderen Worten, eine Teilmenge von X ist genau dann offen, wenn sie Vereinigung von Mengen der Form $U_\epsilon(x)$ ist ($x \in X$, $\epsilon > 0$ von x abhängig). Diese Beobachtung führt zu folgender Definition.

Definition 1.3.3 *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ von offenen Mengen heißt **Basis** von $(X, \mathcal{T})$, wenn jede offene Menge in X eine Vereinigung von Elementen von $\mathcal{B}$ ist.*

Trivialerweise ist $\mathcal{T}$ selbst eine Basis, doch natürlich interessiert man sich für besonders kleine Basen. Besonders interessant sind solche Räume, die eine *abzählbare* Basis besitzen. Diese Räume besitzen im Allgemeinen überabzählbar viele offene Mengen, aber sie lassen sich als Vereinigung von abzählbar vielen offenen Mengen darstellen.

Lemma 1.3.4 *$\mathbb{R}^n$ mit der durch die euklidische Metrik induzierten Topologie besitzt eine abzählbare Basis.*

Beweis Wir nutzen aus, dass sich jeder Punkt aus $\mathbb{R}^n$ beliebig nahe durch Punkte aus $\mathbb{Q}^n$ approximieren lässt, und dass $\mathbb{R}$ ein archimedisch angeordneter Körper ist. Es sei $\mathcal{B} := \{U_{\frac{1}{n}}(x) \colon\ x \in \mathbb{Q}^n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Offenbar hat $\mathcal{B}$ abzählbar viele Elemente. Wir zeigen: Wenn $O \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge ist, dann gibt es zu jedem $x \in O$ eine Element von $\mathcal{B}$, welches eine in O enthaltene offene Umgebung in O ist.

Zu $x \in O$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $U_\epsilon(x) \subset O$. Wir wählen nun $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$ (hier nutzen wir die archimedische Anordnung von $\mathbb{R}$). Des weiteren wählen wir einen Punkt $\tilde{x} \in \mathbb{Q}^n$ mit $d(x, \tilde{x}) < \frac{1}{n}$. Dann ist $x \in U_{\frac{1}{n}}(\tilde{x})$. Ferner ist $U_{\frac{1}{n}}(\tilde{x}) \subset U_\epsilon(x)$, denn für $y \in U_{\frac{1}{n}}(\tilde{x})$ gilt $d(x,y) \leq d(x,\tilde{x}) + d(\tilde{x},y)$ (wegen der Dreiecksungleichung!), also $d(x,y) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \epsilon$.

Es folgt, dass $\mathcal{B}$ eine Basis des topologischen Raumes $\mathbb{R}^n$ ist, denn wir können O ganz durch die im vorigen Absatz gefundenen Umgebungen ihrer Elemente überdecken. □

Eine Teilmenge $Y \subset X$ mit abzählbarer Basis besitzt ebenfalls eine abzählbare Basis; wenn nämlich $\mathcal{B}$ eine Basis von X ist, dann ist $\{O \cap Y\colon\ O \in \mathcal{B}\}$ offenbar eine Basis der von X auf Y induzierten Topologie.

Mittels Basen kann man auch leicht eine Topologie auf dem Produkt $X \times Y$ zweier topologischer Räume X, Y definieren. Als Menge ist $X \times Y = \{(x,y)\colon\ x \in X,\ y \in Y\}$. Wenn $\mathcal{B}_X$ und $\mathcal{B}_Y$ Basen von X bzw. Y sind, dann ist die **Produkttopologie** auf $X \times Y$ dadurch definiert, dass

$$\mathcal{B}_{X \times Y} := \{O_X \times O_Y\colon\ O_X \in \mathcal{B}_X,\ O_Y \in \mathcal{B}_Y\}$$

eine Basis von $X \times Y$ ist.

Übung 1.3.5 Man beweise $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^{m+n}$.

1.3.4 Kompakte Räume

Wahrscheinlich wurden in den Grundvorlesungen kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ über die „Existenz endlicher Teilüberdeckungen" definiert. Dieser Begriff lässt sich direkt auf topologische Räume übertragen.

Definition 1.3.6 *Eine **offene Überdeckung** eines topologischen Raumes X ist eine Menge $\{O_i\}_{i \in I}$ offener Teilmengen von X, so dass $\bigcup_{i \in I} O_i = X$. Der Raum X heißt **kompakt**, wenn jede offenen Überdeckung $\{O_i\}_{i \in I}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt, also endlich viele $i_1, \ldots, i_m \in I$ mit $O_{i_1} \cup \cdots \cup O_{i_m} = X$.*

Eine Teilmenge $Y \subset X$ eines topologischen Raumes X heißt kompakt, wenn Y mit der von X induzierten Topologie kompakt ist. Bekanntlich gibt es nur eine kompakte offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$: die leere Menge. In einer Vorlesung über Allgemeine Topologie würde man an dieser Stelle noch eine Vielzahl von Begriffen definieren (parakompakt, lokalkompakt, etc.) definieren, aber das liegt nicht im Blickpunkt unserer Vorlesung.

Übung 1.3.7 Zeige, dass abgeschlossene Teilmengen kompakter Räume kompakt sind.

1.4 Homöomorphismen

Zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) kann man stetige Abbildungen analog zu den aus den Grundvorlesungen bekannten Begriffen definieren: Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt stetig, wenn es zu jedem $x \in X$ und jedem $\epsilon > 0$ ein (möglicherweise von x abhängendes) $\delta > 0$ findet, so dass $f(U_\delta(x)) \subset U_\epsilon(f(x))$. Um diese Definition von metrischen auf topologische Räume zu erweitern, betrachten wir eine offene Menge $O \subset Y$. Weil O offen ist, gibt es zu jedem $y \in O$ ein $\epsilon > 0$, so dass $U_\epsilon(y) \subset O$. Es sei nun $x \in f^{-1}(\{y\})$.

Weil f stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $f(U_\delta(x)) \subset U_\epsilon(y) \subset O$. Mit anderen Worten, $U_\delta(x) \subset f^{-1}(O)$. Diese Argumentation gilt für alle $x \in f^{-1}(O)$, und daher ist mit O auch $f^{-1}(O)$ offen. Dies gibt Anlass zu folgender Definition von Stetigkeit.

Definition 1.4.1 *Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen X, Y heißt* ***stetig****, wenn das Urbild $f^{-1}(O)$ jeder in Y offenen Menge $O \subset Y$ offen in X ist.*

Beispiel 1.4.2 Es sei $d(x,y) := |x-y|$ die gewöhnlich Metrik auf $\mathbb{R}$, und es sei d_0 die triviale Metrik auf $\mathbb{R}$, also $d_0(x,x) = 0$ und $d_0(x,y) = 1$ für $x \neq y$.

1. Es sei $f\colon (\mathbb{R}, d_0) \to (\mathbb{R}, d)$ gegeben durch $f(x) = x$. Bezüglich der Metrik d_0 ist *jede* Teilmenge von $\mathbb{R}$ offen. Wenn also $O \subset \mathbb{R}$ offen bzgl. d ist, dann ist $f^{-1}(O)$ (wie jede andere Menge auch) offen bzgl. d_0. Daher ist f stetig.

2. Es sei $g\colon (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d_0)$ gegeben durch $g(x) = x$. In der Metrik d_0 ist $\{x\} = U_{\frac{1}{2}}(x)$ eine offene Menge. Ihr Urbild $g^{-1}(\{x\}) = \{x\}$ ist aber nicht offen bzgl. d.

Diese Beispiele zeigen, dass Topologien auf einer Menge sehr unterschiedlich sein können. Es lassen sich auch leicht verschiedene Metriken konstruieren, die *dieselben* offenen Mengen und mithin dieselbe Topologie induzieren. Wir interessieren uns nur für Eigenschaften, die ausschließlich von der Topologie und nicht von einer speziell gewählten Metrik abhängen.

Definition 1.4.3 *Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt* ***Homöomorphismus*** *zwischen X und Y (wir schreiben dafür $f\colon X \approx Y$), wenn f bijektiv ist und sowohl f als auch die Umkehrabbildung f^{-1} stetig sind.*

Mit anderen Worten, eine Menge $O \subset X$ ist genau dann offen in X, wenn $f(O)$ offen in Y ist. Es folgt leicht, dass ein separierter Raum nicht zu einem nicht-separierten Raum homöomorph ist, ebensowenig wie ein Raum mit abzählbarer Basis zu einem mit überabzählbarer Basis homöomorph ist (siehe Übung 1.4.5). Im obigen Beispiel ist zwar $f\colon (\mathbb{R}, d_0) \to (\mathbb{R}, d)$ stetig und bijektiv, aber die Umkehrabbildung g ist nicht stetig. Die Stetigkeit der Umkehrabbildung ist also nicht selbstverständlich! Man kann jedoch zeigen, dass jede stetige bijektive Abbildung zwischen kompakten separierten Räumen ein Homöomorphismus ist.

Eines der zentralen Themen der Topologie ist es, algebraische oder algorithmische Kriterien dafür zu entwickeln, ob zwei Räume zueinander homöomorph sind oder nicht. Es ist bereits ziemlich schwer zu beweisen, dass $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ mit der gewöhnlichen Topologie genau dann homöomorph sind, wenn $m = n$ (Invarianz der Dimension). Eine Beweismöglichkeit ist, (1) jedem Raum so genannte Homologiegruppen zuzuordnen, (2) nachzuweisen, dass die Homologiegruppen unter Homöomorphismen in isomorphe Gruppen übergehen, und (3) aus der fehlenden Isomorphie der Homologiegruppen von $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ auf die fehlende Homöomorphie von $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ zu schließen. Doch manchmal ist es auch nicht leicht zu zeigen, dass zwei Räume homöomorph sind. Beispielsweise ist die so genannte Whitehead-Mannigfaltigkeit W nicht zu $\mathbb{R}^3$ homöomorph, aber

$W \times \mathbb{R}$ ist zu $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^4$ homöormoph. *Einbettungen* sind vereinfacht gesagt Homöomorphismen auf Teilräume. Dieser Begriff wird sehr häufig in der Vorlesung verwendet werden.

Definition 1.4.4 *Es seien X und Y separierte Räume. Eine injektive stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ ist eine* ***Einbettung****, wenn sie ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist, also $f\colon X \approx f(X) \subset Y$.*

Die Einbettung eines Intervalls nennen wir **Bogen**, die eines Kreises manchmal auch eine einfach geschlossene Kurve. Die folgenden Übungsaufgaben betrachten Räume, denen wir in dieser Vorlesung immer wieder begegnen werden. Wenn nichts anderes gesagt wird, trägt der $\mathbb{R}^n$ ab jetzt immer die gewöhnliche, durch die euklidische Metrik induzierte Topologie.

Übung 1.4.5

1. Zwei topologische Räume X und Y seien zueinander homöomorph. Man beweise, dass X separiert ist / kompakt ist / eine abzählbare Basis besitzt, genau dann wenn auch Y die betreffende Eigenschaft besitzt.

2. Man beweise, dass das offene Intervall $]0,1[$ zu $\mathbb{R}$ homöomorph ist. Man beweise, dass das abgeschlossene Intervall $[0,1]$ nicht zu $]0,1[$ homöomorph ist. Allgemeiner beweise man, dass der offene n-Ball
$$B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$$
zu $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist, wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm bezeichnet.

3. Es sei $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$. Man nennt S^n die n-dimensionale **Sphäre** (oder kurz n-Sphäre). Sphären verschiedener Dimension sind nicht-homöomorph, was wir hier nicht beweisen können. Man beweise, dass $S^n \setminus \{(1,0,0,\dots,0)\}$ zu $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist. Mögliche Beweisidee siehe Abbildung 1.1.

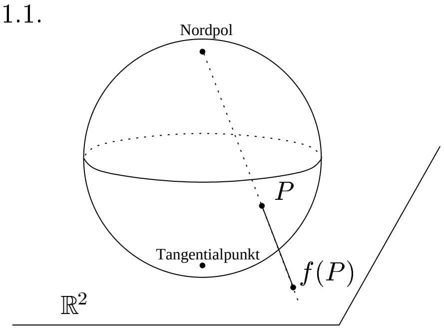
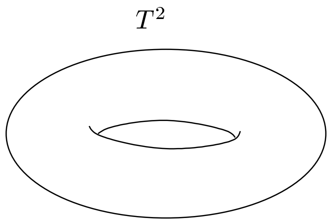


Abbildung 1.1: Stereographische Projektion

4. Der n-dimensionale **Torus** T^n ist das n-fache Produkt von S^1 mit sich selbst. Man überlege sich, warum T^2 und S^2 nicht zueinander homöomorph sind.



5. Durch $f(x) := (\sin x, \cos x)$ wird eine bijektive stetige Abbildung

$$f\colon\ [0, 2\pi[\ \to S^1$$

definiert. Warum ist f kein Homöomorphismus? Man beweise $[0, 2\pi[\ \not\approx S^1$.

1.5 Die Fundamentalgruppe

Eine wichtige Homöomorphieinvariante eines topologischen Raumes X ist seine **Fundamentalgruppe** $\pi_1(X)$. Die Fundamentalgruppe wurde zuerst von Poincaré definiert [50].

Es sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum und $x_0 \in X$ ein fest gewählter Basispunkt. Eine **Schleife** an x_0 ist eine stetige Abbildung $\alpha\colon\ [0,1] \to X$ mit $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. Auf der Menge der Schleifen an x_0 lässt sich eine Multiplikation erklären: Für zwei Schleifen α, β an x_0 ist $\alpha \cdot \beta\colon\ [0,1] \to X$ definiert durch

$$\alpha \cdot \beta(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Zwar ist diese Multiplikation nicht assoziativ, jedoch gehen für drei Schleifen α, β, γ die beiden Schleifen $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ und $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ durch einen Wechsel der Parametrisierung auseinander hervor.

Definition 1.5.1 *Es seien X, Y topologische Räume und $h_0, h_1\colon\ Y \to X$ zwei stetige Abbildungen. Die Abbildungen h_0 und h_1 heißen zueinander* ***homotop****, $h_0 \simeq h_1$, wenn es eine stetige Abbildung $H\colon\ Y \times [0,1] \to X$ (eine* ***Homotopie****) gibt mit $H(y,0) = h_0(y)$ und $H(y,1) = h_1(y)$ für alle $y \in Y$. Wenn $H(\cdot, \xi)\colon\ Y \to X$ eine Einbettung ist für alle $\xi \in [0,1]$, so heißt H* ***Isotopie****, und die Einbettungen h_0, h_1 heißen zueinander* ***isotop****.*

Der Begriff der Homotopie führt auf eine Abschwächung des Begriffs des Homöomorphismus. Eine stetige Abbildung $f\colon\ X \to Y$ heißt **Homotopieäquivalenz**, wenn es eine stetige Abbildung $g\colon\ Y \to X$ gibt, so dass $f \circ g\colon\ Y \to Y$ homotop zur Identität auf Y und $g \circ f\colon\ X \to X$ homotop zur Identität auf X ist. Wir schreiben dann $X \simeq Y$. Offenbar sind homöomorphe Räume auch zueinander **homotopieäquivalent**. Viele Invarianten aus der algebraischen Topologie, so auch die Fundamentalgruppe, sind invariant nicht nur gegen Homöomorphismen, sondern auch gegen Homotopieäquivalenzen.

Definition 1.5.2 *Es seien X, Y topologische Räume, $A \subset X$, $B \subset Y$. Eine stetige Abbildung von* ***Raumpaaren*** *$h\colon\ (X, A) \to (Y, B)$ ist eine stetige Abbildung $h\colon\ X \to Y$ mit $h(A) \subset B$.*

Es seien $h_0, h_1\colon\ (Y, B) \to (X, A)$ zwei stetige Abbildungen von Raumpaaren. Die Abbildungen h_0 und h_1 heißen zueinander ***relativ homotop*** *(bzw.* ***relativ Isotop****) wenn es eine Homotopie (bzw. Isotopie) $H\colon\ Y \times [0,1] \to X$ gibt mit $H(B, \xi) \subset A$ für alle $\xi \in [0,1]$.*

Es sei X ein topologischer Raum mit Basispunkt $x_0 \in X$. In Anlehnung an den eben definierten Begriff heißen zwei Schleifen α, β in X an x_0 zueinander homotop relativ zu x_0, wenn sie als stetige Abbildungen $\alpha, \beta\colon ([0,1], \{0,1\}) \to (X, \{x_0\})$ von Raumpaaren zueinander relativ homotop sind. Eine relative Homotopie von Schleifen bewegt also den Basispunkt nicht. Die Homotopieklassen relativ zu x_0 bezeichnen wir mit $[\alpha]$.

Satz 1.5.3 (und Definition) *Es sei* $\pi_1(X, x_0) = \{[\alpha]\colon \alpha$ *Schleife an* $x_0\}$. *Homotopie relativ zu* x_0 *ist eine Kongruenzrelation bzgl. der Multiplikation von Schleifen, und* $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ *ist eine Gruppe. Sie heißt* ***Fundamentalgruppe*** *von* X *zum Basispunkt* x_0.

Für einen Beweis dieser und der folgenden Aussagen über die Fundamentalgruppe verweisen wir auf Lehrbücher zur algebraischen Topologie, z.B. [64]. Wenn Y ein wegzusammenhängender topologischer Raum ist, $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\alpha\colon [0,1] \to X$ eine Schleife an x_0, dann ist $f \circ \alpha\colon [0,1] \to Y$ eine Schleife an $f(x_0)$. Diese Abbildung ist mit Homotopie relativ zu x_0 bzw. $f(x_0)$ sowie mit der Multiplikation von Schleifen verträglich. Wir erhalten also einen **induzierten Homomorphismus** $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ durch $f_*([\alpha]) := [f \circ \alpha]$. Wenn f ein Homöomorphismus ist, dann ist $(f^{-1})_*$ invers zu f_* und daher f_* ein Gruppenisomorphismus. Die Fundamentalgruppe ist also bis auf Isomorphie invariant unter Homöomorphismen. Man kann relativ leicht zeigen, dass f_* auch dann ein Gruppenisomorphismus ist, wenn f eine Homotopieäquivalenz ist. Wir setzten voraus, dass X wegzusammenhängend ist, und man kann unter dieser Voraussetzung zeigen, dass $\pi_1(X, x_0)$ nur bis auf Isomorphie von der Wahl des Basispunktes abhängt, weshalb man oft auch die Angabe des Basispunktes weglässt und einfach $\pi_1(X)$ schreibt.

1.6 Quotiententopologie

Mit etwas Klebstoff kann man leicht aus einem Blatt Papier (eine Annäherung an $[0,1] \times [0,1]$) eine Röhre basteln ($S^1 \times [0,1]$), und wenn man statt Papier eine dehnbare Gummimembran verwendete, könnte man sich durch Verkleben der Röhrenenden einen Torus basteln ($T^2 = S^1 \times S^1$); siehe dazu Abbildung 1.2. Bei

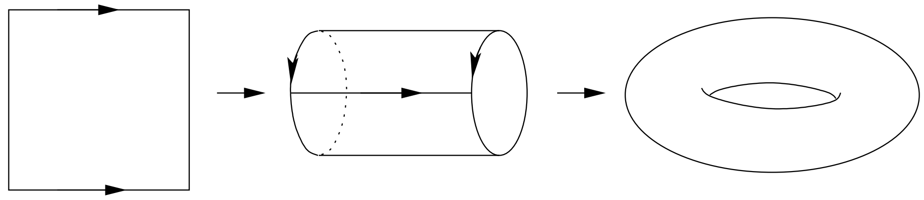


Abbildung 1.2: Wir basteln uns einen Torus

diesen Klebe-Operationen werden manche Punkte des Papiers, die vorher verschieden waren, miteinander vereint; dies entspricht einer Äquivalenzrelation, so dass jeweils die Elemente einer Äquivalenzklasse miteinander verklebt werden. Die Umgebung eines Punktes nach dem Verkleben setzt sich aus den Umgebungen der einzelnen miteinander verklebten Punkte zusammen. Dies führt auf folgende Definition.

Definition 1.6.1 *Es sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Mit $X/\sim$ wird die Menge aller Äquivalenzklassen von $\sim$ bezeichnet, und es sei $p\colon\ X \twoheadrightarrow X/\sim$ die (surjektive) Abbildung, die jedem Element x von X seine Äquivalenzklasse $[x]$ zuordnet. Eine Teilmenge $O \subset X/\sim$ heißt offen in $X/\sim$ genau dann wenn $p^{-1}(O)$ offen in X ist. Dadurch wird eine Topologie auf $X/\sim$ definiert, die* ***Quotiententopologie****. Die Abbildung p heißt* ***Quotientenabbildung****.*

Diese Definition beinhaltet die Aussage, dass die Quotiententopologie eine Topologie ist, was wir nun beweisen möchten. Wenn das gezeigt ist, folgt per definitionem, dass die Quotientenabbildung stetig ist. Offenbar sind $\emptyset$ und $X/\sim$ offen in $X/\sim$, da ihre Urbilder $\emptyset$ und X offen in X sind. Wenn $O_1, O_2 \subset X/\sim$ offen in $X/\sim$ sind, dann ist $p^{-1}(O_1 \cap O_2) = p^{-1}(O_1) \cap p^{-1}(O_2)$ offen in X, da ja $p^{-1}(O_1)$ und $p^{-1}(O_2)$ offen in X sind; also ist $O_1 \cap O_2$ offen in $X/\sim$. Und wenn $\{O_i\}_{i\in I}$ aus offenen Teilmengen von $X/\sim$ besteht, dann ist

$$p^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} O_i\right) = \bigcup_{i\in I} p^{-1}(O_i)$$

offen in X; also ist $\bigcup_{i\in I} O_i$ offen in $X/\sim$. □

Natürlich kann man nicht nur Teile eines Raumes miteinander verkleben, sondern man kann auch zwei verschiedene Räume miteinander verkleben. Dazu müssen wir jedoch zunächst aus zwei Räumen einen einzigen machen, *ohne* zu verkleben:

Definition 1.6.2 *Es seien X, Y topologische Räume. Die* ***topologische Summe*** *von X und Y ist die disjunkte Vereinigung $X \amalg Y$, wobei eine Teilmenge $O \subset X \amalg Y$ genau dann offen in $X \amalg Y$ ist, wenn sowohl $O \cap X$ offen in X als auch $O \cap Y$ offen in Y ist.*

Dass dadurch tatsächlich eine Topologie definiert ist, ist eine sehr leichte Übungsaufgabe. Wenn man nun eine Teilmenge $A \subset X$ mit einer Teilmenge $B \subset Y$ verkleben (man sagt auch: identifizieren) möchte, so wird meist durch Angabe eines Homöomorphismus $\phi\colon\ A \approx B$ festgelegt, wie A und B aufeinandergeklebt werden sollen. Es sei $\sim_\phi$ die durch $x \sim_\phi \phi(x)$ für $x \in A$ erzeugte Äquivalenzrelation auf $X \amalg Y$. Wir definieren $X \cup_\phi Y := (X \amalg Y)/\sim_\phi$, gesprochen „Vereinigung von X und Y entlang ϕ“. Die Abbildung ϕ heißt **Klebeabbildung**.

Übung 1.6.3

1. Es sei $\overline{B^n} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \|x\| \leq 1\}$ der abgeschlossene n-Ball. Auf $\overline{B^n}$ sei eine Äquivalenzrelation erzeugt durch $x \sim y$ für alle $x, y \in S^{n-1}$. Erinnerung: $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \|x\| = 1\} \subset \overline{B^n}$. Man beweise $\overline{B^n}/\sim\ \approx S^n$.

2. Auf $S^n \times [0,1]$ definieren wir eine Äquivalenzrelation: $(x,s) \sim (y,t)$ genau dann wenn $s = t = 1$. Man beweise $(S^n \times [0,1])/\sim\ \approx \overline{B^{n+1}}$.

3. Wir möchten zwei abgeschlossene n-Bälle entlang ihres Randes miteinander verkleben: $X = Y := \overline{B^n}$, $A = B := S^{n-1} \subset \overline{B^n}$, und $\phi\colon\ A \to B$ mit $\phi(x) = x$. Man beweise $X \cup_\phi Y \approx S^n$.

4. Auf $\mathbb{R}^n$ definieren wir eine Äquivalenzrelation $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}^n$. Man beweise $\mathbb{R}^n/{\sim} \approx T^n$ und visualisiere diesen Sachverhalt für $n = 2$.

5. Auf $[-1,1] \times [-1,1]$ sei eine Äquivalenzrelation erzeugt durch $(x,-1) \sim (x,1)$ und $(-1,y) \sim (1,-y)$ (man beachte die Vorzeichen). Visualisiere die **Kleinsche Flasche** $([-1,1] \times [-1,1])/{\sim}$. Dieser Raum wird bisweilen als $S^1 \tilde{\times} S^1$ (getwistetes S^1-Bündel über S^1) bezeichnet.

6. Der projektive n-dimensionale Raum P_K^2 über einem Körper K ist definiert als die Menge aller Ursprungsgeraden im K-Vektorraum K^{n+1}.

   (a) Beweise $P_{\mathbb{R}}^2 \approx S^2/{\sim}$, wobei $\sim$ erzeugt wird durch $x \sim -x$ für alle $x \in S^2$.

   (b) Beweise $P_{\mathbb{R}}^2 \approx \overline{B^2}/{\sim}$, wobei $\sim$ erzeugt wird durch $x \sim -x$ für alle $x \in S^1$.

   (c) Visualisiere $P_{\mathbb{R}}^2$.

7. Es sei $X = \mathbb{R} \times \{-1,1\}$, und es sei eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X erzeugt durch $(x,-1) \sim (x,1)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Beschreibe die offenen Umgebungen von $[(0,-1)]$ und $[(0,1)]$ in $X/{\sim}$. Ist $X/{\sim}$ separiert?

1.7 Triangulationen

1.7.1 Definition

Besonders im Hinblick auf algorithmische Methoden ist es wünschenswert, topologische Räume durch endliche Strukturen darzustellen. Eine Möglichkeit dazu besteht in Simplizialkomplexen.

Das (abgeschlossene) **Standardsimplex** der Dimension k ist

$$\sigma^k := \{(x_0,\ldots,x_k) \in \mathbb{R}^{k+1} : \ x_i \geq 0 \text{ für alle } i, \text{ und } \sum x_i = 1\}.$$

Der **Rand** $\partial\sigma^k$ von σ^k ist definiert als die Vereinigung der Simplexe

$$\partial_i \sigma^k := \{(x_0,\ldots,x_k) \in \sigma^k : \ x_i = 0\}$$

für $i = 0,\ldots,k$; dies sind $k+1$ isometrischen Kopien von σ^{k-1}. Offenbar ist $\partial_0\sigma^0$ die leere Menge. Das **offene Standardsimplex** ist $\mathrm{int}(\sigma^k) := \sigma^k \setminus \partial\sigma^k$.

Beispielsweise ist $\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2$ bzw. σ^3 ein Punkt, eine Strecke, ein Dreieck bzw. ein Tetraeder; siehe Abbildung 1.3.

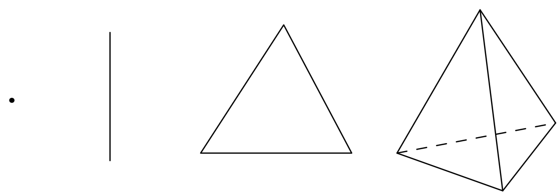


Abbildung 1.3: Standardsimplexe

Ein (abgeschlossenes) k-**Simplex** in einem separierten topologischen Raum X ist eine Einbettung $\phi\colon \sigma^k \hookrightarrow X$. Der Rand von $\phi(\sigma^k)$ besteht aus den Simplexen $\phi(\partial_i \sigma^k)$ für $i = 0, \ldots, k$, den $(k-1)$-dimensionalen Randsimplexen von $\phi(\sigma^k)$. Induktiv definieren wir die j-dimensionalen Randsimplexe von $\phi(\sigma^k)$ als die j-dimensionalen Randsimplexe der $(j+1)$-dimensionalen Randsimplexe von $\phi(\sigma^k)$, für $i = 0, \ldots, k-2$. Die 0- bzw. 1-dimensionalen Randsimplexe bezeichnen wir als Ecken bzw. Kanten von $\phi(\sigma^k)$. Ein offenes k-Simplex ist die Einbettung eines offenen k-dimensionalen Standardsimplexes.

Definition 1.7.1 *Es sei X ein separierter topologischer Raum. Eine **Triangulation** von X ist eine Menge $\mathcal{T} = \{\phi_i\colon \sigma^{k_i} \hookrightarrow X\}_{i \in I}$ von Simplexen in X (für eine Indexmenge I), so dass für jedes Simplex aus $\mathcal{T}$ auch alle Randsimplexe zu $\mathcal{T}$ gehören, und so dass $\phi_i(\sigma^{k_i}) \cap \phi_j(\sigma^{k_j})$ ein Randsimplex sowohl von $\phi_i(\sigma^{k_i})$ als auch von $\phi_j(\sigma^{k_j})$ ist, für alle $i \neq j \in I$. Das offene Simplex $\phi_j(\mathrm{int}(\sigma^{k_j}))$ heißt **Inneres** von $\phi_j(\sigma^{k_j})$.*

Bemerkung 1.7.2 Heutzutage trägt der Begriff der Triangulation auch noch andere Bedeutungen. Manche Topologen schwächen den Begriff der Triangulation so ab, dass nur noch die offenen Simplexe eingebettet sind (ϕ_j ist dann auf $\partial \sigma^{k_j}$ nicht notwendig eine Einbettung, und ein abgeschlossenes Simples ist nicht notwendig homöomorph zum abgeschlossenen Ball), und dass der Schnitt zweier Simplexe auch aus der Vereinigung *mehrerer* abgeschlossener Simplexe bestehen darf. Die Simplexe einer *idealen Triangulation* einer hyperbolischen Mannigfaltigkeit wiederum sind isometrische Einbettungen offener Simplexe des hyperbolischen Raumes, deren Ecken sogar „im Unendlichen" liegen dürfen.

Als Übung mache man sich klar, warum die in Abbildung 1.4 dargestellten Situationen in einer Triangulation nicht auftreten. Wir werden häufig nicht auf

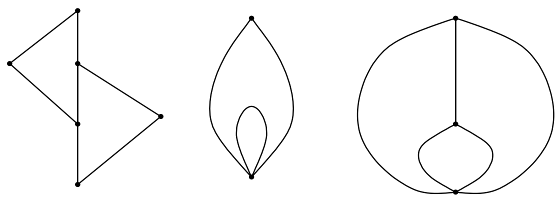


Abbildung 1.4: Was in Triangulationen nicht erlaubt ist

die *Einbettung* $\phi\colon \sigma^k \hookrightarrow X$ referieren, sondern bereits die *Teilmenge* $\phi(\sigma^k) \subset X$ als Simplex in X bezeichnen. Die Vereinigung aller Simplexe der Dimension $\leq k$ von $\mathcal{T}$ heißt k-**Gerüst** und wird mit $\mathcal{T}^k$ notiert. Nicht jeder separierte Raum lässt sich triangulieren, doch mit solchen Pathologien werden wir uns nicht beschäftigen.

Ein **Teilkomplex** von $\mathcal{T}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von X, die ganz aus (abgeschlossenen) Simplexen von $\mathcal{T}$ besteht und durch diese trianguliert wird. Der (offene) **Stern** $\mathrm{st}(\sigma, \mathcal{T})$ eines Simplexes σ von $\mathcal{T}$ ist die Vereinigung des Inneren aller abgeschlossenen Simplexe von $\mathcal{T}$, die σ enthalten; der Stern ist im Allgemeinen kein Teilkomplex, da es sich hier um die Vereinigung *offener* Simplexe handelt. Ein häufig verwendeter Teilkomplex ist der **Link** (deutsch auch *Verkettungskomplex* oder *Sternaußenrand*) $\mathrm{lk}(\sigma, \mathcal{T})$. Er besteht aus allen Simplexen von $\mathcal{T}$, deren Eckenmenge enthalten ist in der Eckenmenge eines Simplexes aus $\mathrm{st}(\sigma, \mathcal{T})$ und zu der Eckenmenge von σ disjunkt ist; vgl. die beiden Beispiele in Abbildung 1.5, wobei der Stern schattiert und der Link fett gezeichnet ist.

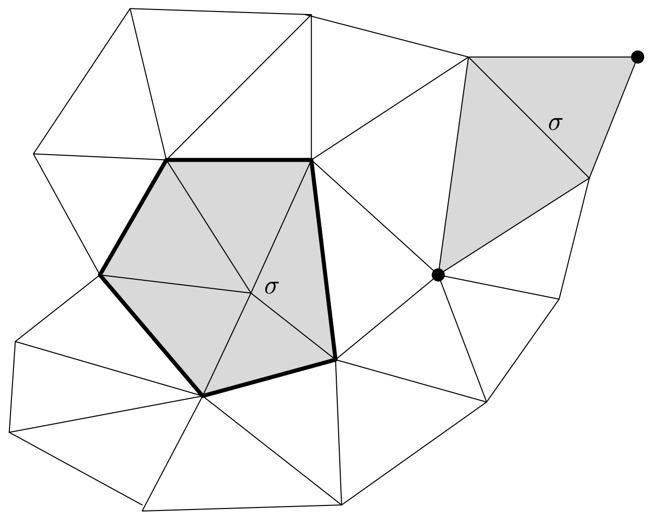


Abbildung 1.5: Stern und Link

1.7.2 Kombinatorische Beschreibung

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Kombinatorik einer Triangulation $\mathcal{T}$ eines separierten Raumes X zu beschreiben. Beispielsweise ist jedes Simplex von $\mathcal{T}$ durch die Menge seiner Ecken eindeutig bezeichnet. Man kann also $\mathcal{T}$ als eine Menge von *endlichen* Teilmengen von $\mathcal{T}^0$ auffassen. Wenn $s \subset \mathcal{T}^0$ ein Simplex σ von $\mathcal{T}$ definiert, so definiert auch jede Teilmenge von s ein Simplex von $\mathcal{T}$, nämlich ein Randsimplex von σ, und jede einelementige Teilmenge von $\mathcal{T}^0$ definiert ein Simplex von $\mathcal{T}$. Dies sind die definierenden Eigenschaften von **Simplizialkomplexen**. Man kann jedem abstrakten Simplizialkomplex K, gegeben als System endlicher Teilmengen einer Menge K^0, einen bis auf Homöomorphismen eindeutigen separierten topologischen Raum $|K|$ zuordnen, die **Realisierung** von K, so dass K einer Triangulation von $|K|$ entspricht.

Ein Simplex der Triangulation $\mathcal{T}$ heißt **maximal**, wenn es kein Randsimplex eines anderen Simplex von $\mathcal{T}$ ist. Wir können $\mathcal{T}$ auch dadurch beschreiben, dass wir für je zwei maximale Simplexe von $\mathcal{T}$ notieren, welche Ecken sie gemeinsam haben. Wir betrachten nun die disjunkte Vereinigung

$$S := \coprod_{\tau \text{ maximales Simplex}} \sigma^{\dim \tau},$$

d.h. S enthält für jedes maximale Simplexes von $\mathcal{T}$ die Kopie eines Standardsimplexes derselben Dimension. Wir haben ferner eine Abbildung $\psi\colon\ S^0 \to \mathcal{T}^0$, die die Ecken eines Simplexes $\sigma^{\dim \tau}$ von S bijektiv abbildet auf die Ecken von τ in $\mathcal{T}$. Wenn nun τ_1 und τ_2 maximale Simplexe von $\mathcal{T}$ sind, die die Menge V von

Ecken gemeinsam haben, so definieren die Ecken $\psi^{-1}(V)$ jeweils ein Randsimplex der Dimension $|V|-1$ in den Simplexen $\sigma^{\dim \tau_1}$ und $\sigma^{\dim \tau_2}$. Diese Randsimplexe sind zueinander homöomorph, und die Homöomorphismen (für alle Paare maximaler Simplexe von $\mathcal{T}$) definieren eine Äquivalenzrelation auf S. Man kann zeigen, dass der Quotientenraum von S nach dieser Äquivalenzrelation homöomorph zu X ist; auf diese Weise wird übrigens die Realisierung eines Simplizialkomplexes konstruiert. Es genügt also, die maximalen Simplexe von $\mathcal{T}$ aufzulisten und festzulegen, wie diese paarweise entlang von Randsimplexen miteinander verklebt werden. Diese Beschreibung von Triangulationen ist algorithmisch besonders praktikabel, wenn alle maximalen Simplexe dieselbe Dimension n haben und jedes $(n-1)$-Simplex von $\mathcal{T}$ im Rand von höchstens zwei maximalen Simplexen auftritt.

1.7.3 Orientierbare triangulierte Räume

Das Standardsimplex σ^n der Dimension n hatten wir bezüglich einer fest gewählten Basis von $\mathbb{R}^{n+1}$ definiert. Wir betrachten diese fest gewählte Basis als *positiv orientiert* (der Begriff der orientierten Basen eines Vektorraums sollte aus den Anfängervorlesungen bekannt sein). Es sei $V = \{v_0, \ldots, v_n\}$ die Menge der Ecken von σ^n. Man kann zeigen, dass ein Vektorraumisomorphismus $\phi\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\phi(\sigma^n) = \sigma^n$ genau dann orientierungserhaltend ist (im Sinne der Linearen Algebra), wenn $\phi|_V : V \to V$ eine gerade Permutation ist. Insofern ist es sinnvoll, auch für σ^n positive und negative Orientierungen zu definieren. Insbesondere definiert jede Anordnung $[v_{i_0}, \ldots, v_{i_n}]$ der Ecken von σ^n eine Orientierung von σ^n, mit der Konvention, dass $[v_0, \ldots, v_n]$ die positive Orientierung definiert.

Im Fall $n = 1$ entsprechen die beiden Orientierungen einfach den beiden Durchlaufrichtungen $[v_0, v_1]$ und $[v_1, v_0]$ einer Strecke. Im Fall $n = 2$ gibt es bis auf gerade Permutationen genau zwei Möglichkeiten, die drei Ecken v_0, v_1, v_2 anzuordnen, nämlich $[v_0, v_1, v_2]$ und $[v_0, v_2, v_1]$. Diese beiden zyklischen Anordnungen der drei Ecken entsprechen den beiden Orientierungen von σ^2. In Zeichnungen werden wir diese beiden Orientierungen wie in Abbildung 1.6 darstellen. In

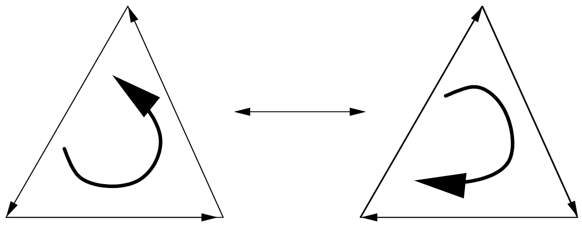


Abbildung 1.6: Orientierungen von 2-dimensionalen Simplexen

der Abbildung ist auch die **induzierte Orientierung** der Randsimplexe eingetragen. Diese kann man formal wie folgt definieren. Es sei $\partial_j \sigma^n$ das Randsimplex mit den Ecken $v_0, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n$. Die auf $\partial_j \sigma^n$ induzierte Orientierung ist durch $[v_{i_0}, \ldots, v_{i_{n-1}}]$ definiert, falls $[v_{i_0}, \ldots, v_{i_{n-1}}, v_j]$ der Orientierung von σ^n entspricht. Als Übung mache man sich klar, dass diese Orientierung wohldefiniert ist, und dass die Definition mit Abbildung 1.6 kompatibel ist.

Wir betrachten nun einen Raum X mit einer Triangulation $\mathcal{T}$, so dass alle maximalen Simplexe dieselbe Dimension n haben und jedes $(n-1)$-Simplex von $\mathcal{T}$ im Rand von höchstens zwei maximalen Simplexen auftritt. Wir erinnern uns daran, dass ein Simplex von $\mathcal{T}$ eine Einbettung von σ^k in X ist. Insbesondere „erbt“ jedes maximale Simplex eine Orientierung, und sie induziert eine Orientierung auf ihren $(n-1)$-dimensionalen Randsimplexen. Die Triangulation $\mathcal{T}$ heißt **orientiert**, falls für jedes $(n-1)$-Simplex σ im Rand zweier verschiedener n-Simplexe τ_1, τ_2 die durch τ_1 induzierte Orientierung von σ verschieden ist von der durch τ_2 induzierten Orientierung von σ. Wenn X eine orientierte Triangulation besitzt, heißt X **orientierbar**. Eine **Orientierung** von X besteht in der Wahl einer orientierten Triangulation. Abbildung 1.7 zeigt einen Raum mit einer orientierten Triangulation sowie einen Raum mit einer nicht-orientierten Triangulation — an der fett gezeichneten Kante stimmen die von den beiden angrenzenden Dreiecken induzierten Orientierung überein. Man kann zeigen, dass

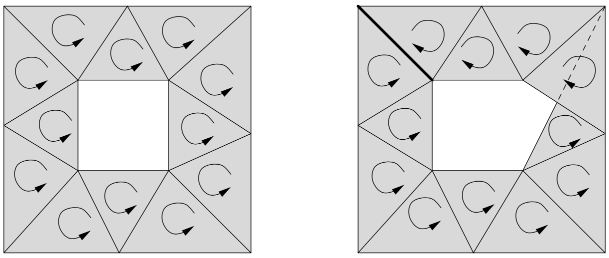


Abbildung 1.7: Orientierte und nicht-orientierte Triangulationen

sich aus *jeder* Triangulation eines orientierbaren Raumes durch geeignete Wahl der Orientierung jedes maximalen Simplexes eine *orientierte* Triangulation machen lässt. Die Situation rechts in der Abbildung lässt sich also nicht retten, der dargestellte Raum (das Möbiusband) ist nicht orientierbar.

1.7.4 Euler-Charakteristik

Wir stellen hier nach der Fundamentalgruppe eine weitere topologische Invariante vor, also eine algebraische Größe, die (einer Klasse von) topologischen Räumen zugeordnet ist und sich unter Homöomorphismen nicht ändert. Diese Invariante heißt **Euler-Charakteristik** $\chi(\cdot)$. Der folgende Satz erlaubt die Berechnung der Euler-Charakteristik von endlichen Simplizialkomplexen. Da wir uns in dieser Vorlesung im Wesentlichen auf kompakte triangulierbare Räume beschränken, können wir diesen Satz daher als Definition verwenden.

Satz 1.7.3 (Definition) *Es gibt eine Abbildung χ, genannt **Euler-Charakteristik**, von der Menge der topologischen Räume in die ganzen Zahlen, so dass Folgendes gilt:*

1. $X \approx Y \Longrightarrow \chi(X) = \chi(Y)$,
2. $\chi(X \cup Y) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(X \cap Y)$,
3. $\chi(\emptyset) = 0$ *und* $\chi(B^n) = (-1)^n$.

Wir werden diesen Satz hier nicht beweisen, sondern verweisen auf die Literatur (z.B. [64]). Gemäß dieses Satzes ist die Berechnung der Euler-Charakteristik eines Raumes X mit einer Triangulation $\mathcal{T}$ in endlich vielen Simplexen leicht: Wenn $b_n(\mathcal{T})$ die Anzahl der n-dimensionalen Simplexe von $\mathcal{T}$ bezeichnet, so ist X eine disjunkte Vereinigung von jeweils $b_n(\mathcal{T})$ Kopien von B^n, nämlich offenen Simplexen. Also gilt $\chi(X) = \sum_n b_n(\mathcal{T}) = \sum_n (-1)^n b_n(\mathcal{T})$. Allerdings ist es in konkreten Beispielen meist leichter, die Euler-Charakteristik eines Raumes mit Hilfe anderer Zellzerlegungen zu berechnen.

Beispiel 1.7.4

1. $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$, denn die n-dimensionale Sphäre ist die disjunkte Vereinigung eines Punktes (er hat Euler-Charakteristik 1) und eines n-dimensionalen offenen Balles (Euler-Charakteristik $(-1)^n$).
2. $\chi(\overline{B^n}) = 1$ für alle n, denn
$$\chi(\overline{B^n}) = \chi(B^n) + \chi(\partial\overline{B^n}) = (-1)^n + (1 + (-1)^{n-1})$$
für $n \geq 1$, und $\overline{B^0} = B^0$.

Wir schließen diesen Unterabschnitt mit einem Exkurs über die Geschichte der Euler-Charakteristik ab. Ausnahmsweise ist die Namensgebung gut begründet, denn die Untersuchung der Euler-Charakteristik nahm tatsächlich mit einer Arbeit von Leonhard Euler [15] ihren Anfang. Er untersuchte die konvexe Hülle von endlichen Punktmengen im $\mathbb{R}^3$, also konvexe 3-dimensionale Polytope. Der Rand eines solchen konvexen 3-dimensionalen Polytops ist in natürlicher Weise in Ecken, Kanten und 2-dimensionale Facetten zerlegt. Euler entdeckte, dass stets die Zahl 2 herauskommt, wenn man die Anzahl der Ecken zur Anzahl der Facetten addiert und die Anzahl der Kanten subtrahiert. Dies verallgemeinerte Schläfli [58] 1850 auf konvexe Polytope in höheren Dimensionen, was im Wesentlichen auf die Aussage $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$ hinausläuft. Doch waren die Arbeiten von Euler und Schläfli in zweierlei Hinsicht unbefriedigend: Sie beziehen sich nur auf die Randkomplexe von konvexen Polytopen, und ihre Beweise sind an entscheidenden Stellen unvollständig. 1899 gelang Poincaré [49] eine Definition der Euler-Charakteristik, die auf alle topologischen Räume anwendbar ist, und er führte einen korrekten Invarianzbeweis. Dabei entwickelte er den Begriff der *Homologie* und legte die Fundamente der algebraischen Topologie.

Erst 1970 gelang es Bruggesser und Mani [8], die Beweislücke von Euler und Schläfli zu schließen. Die Lücke bestand in der ungeprüften Verwendung folgender Aussage: Wenn eine Triangulation $\mathcal{T}$ der n-Sphäre durch den Rand eines $(n+1)$-dimensionalen konvexen Polytops gegeben ist, so kann man von $\mathcal{T}$ sukzessive alle offenen n-Simplexe entfernen, so dass in jedem Zwischenschritt eine Triangulation von $\overline{B^n}$ entsteht. Triangulationen von Sphären, die diese Eigenschaft besitzen, heißen **schälbar**. Erst Bruggesser und Mani bewiesen, dass tatsächlich alle Randkomplexe von konvexen Polytopen schälbar sind. Schälbarkeit ist die Grundlage vieler Beweise in der Theorie der konvexen Polytope (siehe [73] für eine moderne Einführung in die Theorie). Allerdings sind konvexe Polytope und Schälbarkeit keine geeigneten Hilfsmittel, um allgemeine Triangulationen von Sphären zu untersuchen. Während nämlich alle Triangulationen von S^2 als Randkomplexe von konvexen Polytopen darstellbar sind [63], ist dies für die „meisten“ (in einem präzisen Sinne) Triangulationen von S^n für $n \geq 3$ nicht der Fall [24, 33, 47]. Vermutlich sind die meisten Triangulationen der S^3 nicht schälbar [33].

Kapitel 2

Mannigfaltigkeiten

2.1 Definitionen

Bekanntlich ist die Erde eine Scheibe — zumindest der Teil, den wir von ihr sehen. Auch die Landkarten, mit denen wir uns auf der Erde orientieren, sind im Wesentlichen Scheiben — häufig keine runden Scheiben, sondern rechteckige, aber Rechteck und Kreisscheibe B^2 sind zueinander homöomorph. Eine einzelne Karte kann keine Auskunft über die Gestalt der Erde als Ganzes geben. Eine solche Gesamtbeschreibung liefern Atlanten, die aus mehreren Karten bestehen, welche die ganze Erde überdecken. Manche dieser Karten werden sich überlappen, und natürlich müssen zwei Karten dort, wo sie sich überlappen, im Wesentlichen dieselben geographischen Gegebenheiten zeigen. Man kann im Prinzip bloß anhand eines Atlas erkennen, ob die Erdoberfläche homöomorph zu S^2 ist.

Die Grundidee, Teile eines topologischen Raumes durch die Karten eines Atlas zu beschreiben und zu versuchen, globale Eigenschaften des Raumes anhand des Verhältnisses der Karten untereinander zu erkennen, führt auf den Begriff der Mannigfaltigkeit. Es sei $\mathbb{R}^n_\geq$ der abgeschlossene Halbraum $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_1 \geq 0\}$.

Definition 2.1.1 *Ein separierter Raum M mit abzählbarer Basis heißt* ***n-dimensionale Mannigfaltigkeit*** *(kurz n-Mannigfaltigkeit), wenn es eine offene Überdeckung $\{K_i\}_{i \in I}$ von M und für jedes $i \in I$ einen Homöomorphismus $\phi_i \colon K_i \approx \mathbb{R}^n$ oder $\phi_i \colon K_i \approx \mathbb{R}^n_\geq$ gibt. Für $i \in I$ heißt (K_i, ϕ_i) eine* ***Karte*** *von M, und die Menge $\{(K_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ der Karten heißt* ***Atlas*** *von M.*

Nach dieser Definition ist die leere Menge eine n-Mannigfaltigkeit, was uns aber nicht stört. Natürlich kann man eine Mannigfaltigkeit im Allgemeinen durch verschiedene Atlanten beschreiben. Der **Rand** einer n-Mannigfaltigkeit M ist definiert als

$$\partial M := \{x \in M \colon x \text{ hat keine zu } \mathbb{R}^n \text{ homöomorphe Umgebung}\}.$$

Eine Mannigfaltigkeit heißt **geschlossen**, wenn sie kompakt ist und ihr Rand leer ist. Der englische Begriff für Mannigfaltigkeit ist *manifold*, der französische *variété*. Letzteres führt bisweilen zu Verwirrung, weil dasselbe Wort auch eine *Varietät*, also ein Nullstellengebilde von Polynomen bezeichnet.

Bemerkung 2.1.2 Der Begriff *Rand einer Mannigfaltigkeit* darf nicht mit dem Begriff *Rand einer Teilmenge eines topologischen Raumes* verwechselt werden. Beispielsweise ist S^2 der Rand sowohl von $B^3 \subset \mathbb{R}^3$ als auch von $\overline{B^3} \subset \mathbb{R}^3$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$. Im Sinne der Definition ist aber $\partial B^3 = \emptyset$ und $\partial \overline{B^3} = S^2$. Der Rand einer Mannigfaltigkeit ist intrinsisch definiert, hängt also nicht von einer Einbettung in einen $\mathbb{R}^m$ ab.

Es sei $\{(K_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ ein Atlas und $U := K_i \cap K_j$, für beliebige $i, j \in I$. Dann ist die Einschränkung von $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ auf $\phi_i(U)$ (der **Kartenwechsel** von K_i nach K_j) ein Homöomorphismus zu $\phi_j(U)$, also

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{\phi_i(U)} \colon \ \phi_i(U) \approx \phi_j(U).$$

Häufig ist es von Vorteil, wenn die Kartenwechsel nicht nur Homöomorphismen, sondern sogar Diffeomorphismen sind (also differenzierbar mit differenzierbarer Umkehrabbildung). Das ist deshalb eine sinnvolle Definition, weil $\phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{\phi_i(U)}$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ auf eine andere offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ abbildet, und für solche Abbildungen ist der Begriff „differenzierbar“ schon aus den Grundvorlesungen bekannt. Ein solcher Atlas heißt *differenzierbar*, und auch die Mannigfaltigkeit heißt dann differenzierbar. Man kann auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten Analysis treiben, indem man die relevanten Begriffe (Beispielsweise den einer differenzierbaren Abbildung zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten) mithilfe der Karten auf die entsprechenden Begriffe im $\mathbb{R}^n$ zurückführt. Die differenzierbaren Kartenwechsel sorgen dafür, dass es dabei nicht von Belang ist, mit welcher Karte man gerade arbeitet.

Man kann beweisen (das ist allerdings ein ziemlich schwieriger Satz), dass jede 3-dimensionale Mannigfaltigkeit einen differenzierbaren Atlas besitzt, und die so definierte „differenzierbare Struktur“ ist im Wesentlichen eindeutig. Ebenso gut kann man in Dimension 3 voraussetzen, dass die Kartenwechsel *stückweise linear* (p.l. für *piecewise linear*) sind, und auch hier sind die entsprechenden p.l.-Strukturen eindeutig; das ist die so genannte „Hauptvermutung“, die 1952 von Moise bewiesen wurde (vgl. [45]). In höheren Dimensionen ist die Situation anders: Nicht jede Mannigfaltigkeit besitzt einen differenzierbaren Atlas, und so manche harmlose Mannigfaltigkeit (zum Beispiel S^7) besitzt wesentlich verschiedene differenzierbare Atlanten. Es ist für viele Beweistechniken von Vorteil, auf eine differenzierbare oder p.l.-Struktur zurückgreifen zu können. Dies ist einer der Gründe dafür, warum die Schwerpunkte der Niederdimensionalen Topologie andere sind als die der Höherdimensionalen Topologie.

Es wäre kein Verlust, sich in der Definition von Mannigfaltigkeiten auf Teilmengen von $\mathbb{R}^m$ für hinreichend großes $m > n$ zu beschränken. Tatsächlich lässt sich jede n-Mannigfaltigkeit in den $\mathbb{R}^{2n+1}$ einbetten (siehe [23], Kapitel V). Wenn man Mannigfaltigkeiten als Teilmengen eines geeigneten $\mathbb{R}^m$ definiert, sind die Eigenschaften *separiert* und *abzählbare Basis* stets erfüllt. Wenn man eine Mannigfaltigkeit wie in Definition 2.1.1 abstrakt definiert, so muss man die Separiertheit und die Existenz einer abzählbaren Basis jedoch ausdrücklich verlangen. In Übung 1.6.3.7 haben wir schon einen topologischen Raum mit abzählbarer Basis kennengelernt, bei dem jeder Punkt eine zu $\mathbb{R}$ homöomorphe Umgebung besitzt, der aber nicht separiert und damit keine 1-Mannigfaltigkeit ist. Es gibt auch separierte Räume (z.B. die „long line“), bei denen jeder Punkt eine zu $\mathbb{R}$ homöomorphe offene Umgebung hat, die aber keine abzählbare Basis besitzen und daher keine 1-Mannigfaltigkeiten sind. Siehe dazu [62]. Es folgt aus dem Satz von Uryson, dass es zu jeder Mannigfaltigkeit eine Metrik gibt, die ihre Topologie induziert. Einen Beweis findet man in [60].

Bemerkung 2.1.3 Es gibt Autoren, die auf Separiertheit und abzählbare Basen verzichten und demnach auch die *long line* und das Beispiel aus Übung 1.6.3.7 als Mannigfaltigkeit bezeichnen. Für manche Begriffsbildungen ist das praktisch, aber diese kommen in der Vorlesung nicht vor.

2.1.1 Rand einer Mannigfaltigkeit

Lemma 2.1.4 *Der Rand ∂M einer $(n+1)$-Mannigfaltigkeit M ist eine n-Mannigfaltigkeit, und $\partial(\partial M) = \emptyset$.*

Beweis Als Teilmenge eines separierten Raumes mit abzählbarer Basis ist auch ∂M separiert und besitzt eine abzählbare Basis. Wir zeigen: Wenn $\{(K_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ ein Atlas von M ist, dann bilden die nicht-leeren Elemente von

$$\{(K_i \cap \partial M, \phi_i|_{K_i\cap\partial M})\}_{i\in I}$$

einen Atlas von ∂M.

Es sei (K_i, ϕ_i) eine Karte von M. Wenn $\phi_i\colon\ K_i \approx \mathbb{R}^{n+1}$, dann ist offenbar $K_i \cap \partial M = \emptyset$. Wenn $\phi\colon\ K_i \approx \mathbb{R}^{n+1}_{\geq}$, dann erhalten wir

$$\phi_i|_{K_i\cap\partial M}\colon\ K_i \cap \partial M \approx \{(x_1, \ldots, x_{n+1})\colon\ x_1 = 0\} \approx \mathbb{R}^n.$$

Ferner ist $\{K_i \cap \partial M\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von ∂M. Weil $K_i \cap \partial M$ zu $\mathbb{R}^n$ und nicht zu $\mathbb{R}^n_{\geq}$ homöomorph ist, hat ∂M keinen Rand. □

Falls M eine differenzierbare bzw. p.l.-Mannigfaltigkeit ist, so ist der Kartenwechsel von $K_i \cap \partial M$ nach $K_j \cap \partial M$ differenzierbar bzw. p.l., weil es sich hier um eine Einschränkung des Kartenwechsels von K_i nach K_j handelt. Also ist auch ∂M differenzierbar bzw. p.l.

Es ist eine hochinteressante Frage, welche geschlossenen n-Mannigfaltigkeiten sich als Rand einer $(n+1)$-Mannigfaltigkeit darstellen lassen; solche Mannigfaltigkeiten heißen *null-bordant*. Man kann zeigen, dass *alle* geschlossenen orientierbaren 3–Mannigfaltigkeiten null-bordant sind (vgl. Unterabschnitt 5.3.2). In höheren Dimensionen gibt es jedoch auch nicht-null-bordante Mannigfaltigkeiten. Dies wird jedoch nicht Thema der Vorlesung sein.

Übung 2.1.5 Beweise, dass $M \times N$ eine $(m+n)$-Mannigfaltigkeit ist, wenn M eine m-Mannigfaltigkeit und N eine n-Mannigfaltigkeit ist. Zeige $\partial(M \times N) = ((\partial M) \times N) \cup (M \times (\partial N))$.

2.1.2 Einbettungen und Untermannigfaltigkeiten

Wir werden oft mit Teilmengen von Mannigfaltigkeiten arbeiten, die selbst Mannigfaltigkeiten (i.A. von niedrigerer Dimension) sind. Dieser Abschnitt enthält die dafür nötigen Begriffe.

Definition 2.1.6 *Eine Teilmenge $N \subset M$ in einer n-Mannigfaltigkeit M heißt **k-Untermannigfaltigkeit**, wenn N eine k-Mannigfaltigkeit ist und die Inklusionsabbildung $\iota_N\colon\ N \hookrightarrow M$, $\iota(x) = x$, eine Einbettung ist.*

Eine Untermannigfaltigkeit $N \subset M$ heißt **eigentlich eingebettet**, wenn $\partial N = N \cap \partial M$. Ähnlich wie es in der Gruppentheorie einen Unterschied zwischen einer Untergruppe und einer *normalen* Untergruppe gibt und man mit letzteren meistens mehr anfangen kann, werden wir hauptsächlich *abgeschlossene* Untermannigfaltigkeiten betrachten.

Beispiel 2.1.7 Die Abbildung $f\colon\,]0, 2\pi[\to S^1$, $f(x) = (\sin x, \cos x)$, ist eine Einbettung und mithin $S^1 \setminus \{(0,1)\} = f(]0, 2\pi[)$ eine Untermannigfaltigkeit von S^1. Jedoch ist es keine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit.

Einbettungen können überraschend kompliziert sein. Zum Beispiel ist das Komplement einer in S^3 eingebetteten 2-Sphäre im Allgemeinen *nicht* homöomorph zur disjunkten Vereinigung zweier offener 3-Bälle. Ein Beispiel ist die berühmte *gehörnte Sphäre* von J.W. Alexander (siehe [2], [54]).

Definition 2.1.8 *Es sei $N \subset M$ eine k-Untermannigfaltigkeit einer n-Mannigfaltigkeit M. Eine offene Umgebung R von N heißt* ***reguläre Umgebung*** *von N, falls eine Projektion*[1] *$p\colon R \twoheadrightarrow N$ existiert, so dass es für jeden Punkt $x \in N$ eine in N offene Umgebung $U(x) \subset N$ und einen Homöomorphismus $h\colon U(x) \times B^{n-k} \approx p^{-1}(U(x))$ gibt, so dass $p^{-1}(y) = h\left(\{y\} \times B^{n-k}\right)$ und $h((y, 0)) = y$ für alle $y \in U(x)$.*

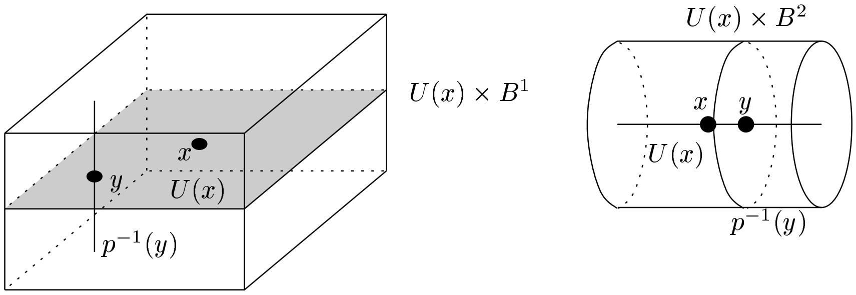


Abbildung 2.1: Reguläre Umgebungen

Der Begriff der regulären Umgebung ist in Abbildung 2.1 erläutert. Meist werden wir eine reguläre Umgebung mit $U(N) \subset M$ bezeichnen. Man kann zeigen, dass eine reguläre Umgebung (wenn sie existiert) bis auf Isotopie eindeutig bestimmt ist. Wenn wir auf eine reguläre Umgebung referieren, so wählen wir stets eine „hinreichend kleine" Umgebung – was das ist, sollte aus dem Kontext klar werden. Wir meinen bei mehrfacher Referenz auf $U(N)$ stets dieselbe und nicht etwa eine andere reguläre Umgebung von N. In leichter Vereinfachung der Notation bezeichnen wir mit $\partial U(N)$ den Rand des *Abschlusses* von $U(N)$ in M. Eine Untermannigfaltigkeit heißt **zahm**, wenn sie eine reguläre Umgebung besitzt; andernfalls heißt sie **wild**. Die gehörnte Sphäre ist ein Beispiel einer wilden Untermannigfaltigkeit. Ein weiteres werden wir zu Beginn des folgenden Kapitels über Knotentheorie kennen lernen.

Es seien N und M wie in der vorigen Definition. Obwohl jeder Punkt von N eine Umgebung in Form eines Produktes $(U(x) \times B^{n-k})$ besitzt, ist R im Allgemeinen kein Produkt, wie das folgende Beispiel zeigt.

[1] Das heißt hier, dass die Einschränkung von p auf N die Identität ist.

Beispiel 2.1.9 Es sei $M = [-1,1]\times[-1,1]$ und $N = [-1,1]\times\{0\}$. Offensichtlich ist $R := [-1,1] \times \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ eine reguläre Umgebung von N mit $p\colon R \to N$, $p(x,y) := x$, denn R ist ja ein Produkt. Es sei nun $\sim$ die Äquivalenzrelation aus Übung 1.6.36. Dann ist $M/\sim$ eine Kleinsche Flasche, und $R/\sim$ ist ein **Möbiusband**. Zwar ist $R/\sim$ global kein Produkt, ist aber weiterhin lokal ein Produkt und damit eine reguläre Umgebung der 1-Untermannigfaltigkeit $N/\sim \subset M/\sim$. Siehe Abbildung 2.2.

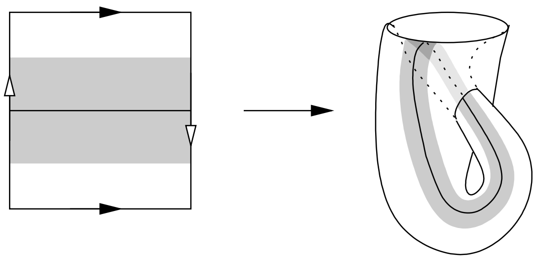


Abbildung 2.2: Reguläre Umgebung eines Kreises in einer Kleinschen Flasche

Ähnliche Beispiele treten in höheren Dimensionen auf. Es sei $N \subset M$ eine zahme eigentlich eingebettete zusammenhängende $(n-1)$-Untermannigfaltigkeit in einer n-Mannigfaltigkeit M, und es sei $U(N) \subset M$ eine reguläre Umgebung von N. Wenn ∂N zusammenhängend ist, so heißt N **einseitig** in M, andernfalls heißt N **zweiseitig** in M. Bei dem vorigen Beispiel ist N einseitig.

2.2 Konstruktionstechniken

In Übung 2.1.5 haben wir einen einfachen Weg kennengelernt, aus Mannigfaltigkeiten neue Mannigfaltigkeiten zu konstruieren. Wir werden hier noch einige weitere Konstruktionstechniken aufzeigen. Jede dieser Konstruktionen führt auf eine andere Herangehensweise an die Theorie der Mannigfaltigkeiten und hat unterschiedliche Vor- und Nachteile. In späteren Kapiteln werden wir weitere Konstruktionen in Dimension 3 kennen lernen.

2.2.1 Herausschneiden

Eine sehr interessante Klasse von Mannigfaltigkeiten gewinnt man, indem man aus einer vorgegebenen Mannigfaltigkeit (z.B. aus S^3) etwas herausschneidet; Beispiele dafür werden wir besonders im Kapitel über Knotentheorie behandeln. Manchmal ist es auch sinnvoll, eine komplizierte Mannigfaltigkeit in einfachere Teile zu zerlegen. Für beides werden wir im vorliegenden Abschnitt die Grundlagen schaffen.

Lemma 2.2.1 *Jede offene Teilmenge $N \subset M$ einer n-Mannigfaltigkeit ist eine n-Mannigfaltigkeit.*

Beweis Als Teilmenge von M ist N separiert und besitzt eine abzählbare Basis. Es sei $\{K_i,\phi_i\}_{i\in I}$ ein Atlas von M. Es sei $x \in K_i \cap N$. Weil N offen in M ist, ist

$K_i \cap N$ offen in K_i. Somit ist auch $\phi_i(K_i \cap N)$ offen in $\mathbb{R}^n$ (bzw. in $\mathbb{R}^n_\geq$), denn ϕ_i ist ein Homöomorphismus. Es gibt also bezüglich der Euklidischen Metrik in $\mathbb{R}^n$ (bzw. in $\mathbb{R}^n_\geq$) eine ϵ-Umgebung $U_\epsilon(\phi_i(x)) \subset \phi_i(K_i \cap N)$. Wir erhalten eine offene Umgebung $V_{x,i} := \phi_i^{-1}(U_\epsilon(\phi_i(x))) \subset N$ von x.

Da ein offener n-Ball zu $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist, gibt es einen Homöomorphismus $\psi_{x,i}\colon U_\epsilon(\phi_i(x)) \approx \mathbb{R}^n$ (bzw. $\psi_{x,i}\colon U_\epsilon(\phi_i(x)) \approx \mathbb{R}^n_\geq$ für $x \in \partial M$). Also ist

$$\{(V_{x,i}, \psi_{x,i} \circ \phi_i|_{V_{x,i}})\}_{x \in N, i \in I}$$

ein Atlas von N. □

Im folgenden Kapitel (Knotentheorie) werden wir zahme geschlossene 1-Untermannigfaltigkeiten aus S^3 herausschneiden. Diese so genannten *Knotenkomplemente* bilden eine sehr interessante Beispielklasse von 3-Mannigfaltigkeiten. In späteren Kapiteln werden wir kompakte 3-Mannigfaltigkeiten entlang zahmer abgeschlossener 2-Untermannigfaltigkeiten in einfachere Teile zerlegen. Oft wird allerdings nicht einfach nur die zahme Untermannigfaltigkeit selbst, sondern eine reguläre Umgebung herausgeschnitten, weil dann gemäß folgendem Lemma eine *kompakte* 3-Mannigfaltigkeit entsteht.

Lemma 2.2.2 *Es sei $N \subset M$ eine abgeschlossene n-Untermannigfaltigkeit einer kompakten n-Mannigfaltigkeit M, und es sei $F := \partial N \setminus \partial M$ eine zahme $(n-1)$-Untermannigfaltigkeit von M. Dann ist $K := (M \setminus N) \cup F$ eine kompakte n-Mannigfaltigkeit, deren Rand aus $\partial M \setminus \partial N$ und F besteht.*

Beweis Als Übung kann man mithilfe eines Atlas von N zeigen, dass $N \setminus \partial N$ offen in M ist. Daher ist K, als das Komplement von $N \setminus \partial N$, abgeschlossen. Weil M kompakt ist, ist K kompakt.

Wegen Lemma 2.2.1 können wir $M \setminus N$ durch geeignete Karten überdecken. Wir müssen also nur noch Karten finden, die F überdecken. Hierzu nutzen wir die Existenz einer regulären Umgebung R von F in M, mit einer Projektion $p\colon R \twoheadrightarrow F$ wie in Definition 2.1.8. Zu $x \in F$ sei $U(x) \subset F$ eine Umgebung wie in Definition 2.1.8. Wir betrachten hier nur $x \in F \setminus \partial F$; der Fall $x \in \partial F$ ist analog und kann als Übung angesehen werden. Weil F eine Mannigfaltigkeit ist, gibt es eine zu $\mathbb{R}^{n-1}$ homöomorphe Umgebung $V(x) \subset U(x)$ von x (dies zeigt man leicht mithilfe von Karten). Wir erhalten einen Homöomorphismus

$$h\colon p^{-1}(V(x)) \approx \mathbb{R}^{n-1} \times B^1 \approx \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R},$$

so dass $h(V(x)) = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $h^{-1}\left(\mathbb{R}^{n-1} \times]-\infty, 0[\right) \subset N$. Dann ist $K_x := h^{-1}\left(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty[\right)$ eine Karte wegen $h\colon K_x \approx \mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty[\approx \mathbb{R}^n_\geq$. □

2.2.2 Verkleben

In diesem Abschnitt werden wir einige Wege kennen lernen, aus relativ einfachen Bausteinen Mannigfaltigkeiten zusammenzubauen. Wir nutzen dazu die Technik der Quotiententopologie aus Abschnitt 1.6.

Lemma 2.2.3 *Es seien M, N zwei n-Mannigfaltigkeiten, es seien $A \subset \partial M$ und $B \subset \partial N$ abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten, und es sei $\psi\colon A \approx B$. Dann ist $M \cup_\psi N$ eine n-Mannigfaltigkeit.*

Beweis Offenbar genügt es zu zeigen, dass alle Punkte von $M \cup_\phi N$, welche Punkten aus A bzw. B entsprechen, zu $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{R}^n_\geq$ homöomorphe Umgebungen besitzen. Es sei $x \in A \setminus \partial A$, es sei (K_x, ϕ_x) eine Karte von M um x, und es sei (K_y, ϕ_y) eine Karte von N um $y := \psi(x)$. Weil $\phi_x(\psi^{-1}(K_y) \cap K_x)$ offen in $\mathbb{R}^n_\geq$ ist, gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $U_\epsilon(\phi_x(x)) \subset \phi_x(\psi^{-1}(K_y) \cap K_x)$. Dann ist $V_M := \phi_x^{-1}(U_\epsilon(\phi_x(x))) \subset M$ eine zu $\mathbb{R}^n_\geq$ homöomorphe Umgebung von x, und $V_M \cap \partial M \subset \psi^{-1}(K_y)$.

Die Menge

$$\tilde{V}_N := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_\geq :\ x_1 \geq 0,\ (0, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \phi_y(\psi(V_M \cap \partial M))\}$$

ist zu $\mathbb{R}^n_\geq$ homöomorph, weil $V_M \cap \partial M$ zu $\mathbb{R}^{n-1}$ homöomorph ist. Also ist $V_N := \phi_y^{-1}(\tilde{V}_N)$ eine zu $\mathbb{R}^n_\geq$ homöomorphe Umgebung von y. Daher ist $V_M \cup_\psi V_N \subset M \cup_\psi N$ eine zu $\mathbb{R}^n$ homöomorphe Umgebung von $[x] = [y] \in M \cup_\psi N$.

Der Fall $x \in \partial A$ ist im Wesentlichen analog und kann als Übung behandelt werden. □

Bemerkung 2.2.4 Es ist eine wesentliche Voraussetzung, dass $A \subset \partial M$ und $B \subset \partial N$ abgeschlossen sind, denn sonst wäre im Hinblick auf Übung 1.6.3.7 nicht zu garantieren, dass $M \cup_\psi N$ separiert ist.

Einen wichtigen Spezialfall erhalten wir, wenn ∂M und ∂N wegzusammenhängend sind, M und N eine feste Orientierung besitzen und zudem. A und B zum abgeschlossenen $(n-1)$-Ball homöomorph sind. Dann nämlich tragen A und B die von M bzw. N induzierte Orientierung, und wenn ψ ein orientierungsändernder Homöomorphismus bezüglich dieser Orientierungen ist, dann heißt $M \cup_\psi N$ die **∂-zusammenhängende Summe** von M und N. Es ist nicht schwer zu beweisen, dass sich $M \cup_\psi N$ bei anderer Wahl von A, B, ψ nur bis auf Homöomorphismen ändert, und man notiert $M \#_\partial N := M \cup_\psi N$.

Beispiel 2.2.5 Es sei $M = \overline{B^2} \times S^1$. Der Rand von M ist ein Torus, und M heißt **Volltorus**. Dann ist $M \#_\partial M$ eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit, deren Rand so wie in Abbildung 2.3 aussieht. Man nennt

$$\underbrace{M \#_\partial M \#_\partial \ldots \#_\partial M}_{g}$$

einen **Henkelkörper** vom Geschlecht g, und nennt $\overline{B^3}$ den Henkelkörper vom Geschlecht 0.

Übung 2.2.6 Es seien $x_1, \ldots, x_g \in B^2$ paarweise verschiedene Punkte, und es sei $\epsilon > 0$ so, dass $U_\epsilon(x_1), \ldots, U_\epsilon(x_g)$ paarweise disjunkt sind und dass der Abstand von $x_1, \ldots, x_g$ zu $\partial \overline{B^2}$ mindestens 2ϵ beträgt. Es sei

$$F := \overline{B^2} \setminus \bigcup_{i=1}^{g} U_\epsilon(x_i).$$

Beweise durch Induktion nach g, dass $F \times [0,1]$ homöomorph zu einem Henkelkörper vom Geschlecht g ist.

2.2.3 Zusammenhängende Summe

Durch Kombination von Herausschneiden und Verkleben erhält man eine weitere Konstruktionsmethode. Es seien M, N kompakte wegzusammenhängende n-Mannigfaltigkeiten, und es seien $A \subset M \setminus \partial M$ und $B \subset N \setminus \partial N$ eingebettete abgeschlossene n-Bälle, so dass ∂A und ∂B zahm in M und N sind. Nach Lemma 2.2.2 sind $\hat{M} := (M \setminus A) \cup \partial A$ und $\hat{N} := (N \setminus B) \cup \partial B$ kompakte Mannigfaltigkeiten. Für einen Homöomorphismus $\psi\colon \partial A \approx \partial B$ bezeichnet man $M\#N := \hat{M} \cup_\psi \hat{N}$ als die **zusammenhängende Summe** von M und N. Man kann zeigen, dass $M\#N$ nur bis auf Homöomorphismen von der Wahl von A, B abhängt. Für ψ gibt es im Wesentlichen zwei Möglichkeiten, nämlich entsprechend den zwei Orientierungen von $\partial A \approx S^{n-1}$. Die zwei Verklebungsmöglichkeiten liefern (für Dimension $n \geq 3$) im Allgemeinen zwei verschiedene zusammenhängende Summen von M und N, aber das ist für unsere Zwecke nicht von Belang.

Bemerkung 2.2.7 Eine eindeutige Definition von $M\#N$ erhält man, wenn M und N orientiert sind (nicht nur *orientierbar*!). Dann entstehe $-\hat{N}$ aus $\hat{N}$ durch Umkehr der Orientierung. Die beiden durch das Herausschneiden der Bälle entstandenen Sphären in $\partial\hat{M}$ und $\partial(-\hat{N})$ tragen die induzierte Orientierung, und wir verlangen, dass ψ orientierungserhaltend ist. Dann ist $M\#N = \hat{M} \cup_\psi (-\hat{N})$ bis auf orientierungserhaltende Homöomorphismen eindeutig.

Beispiel 2.2.8 In Abbildung 2.3 sieht man die zusammenhängende Summe von zwei Tori. Man nennt

$$\Sigma_g := \underbrace{T^2\#\ldots\#T^2}_{g}$$

die geschlossene orientierte Fläche vom Geschlecht g und ergänzt noch $\Sigma_0 := S^2$.

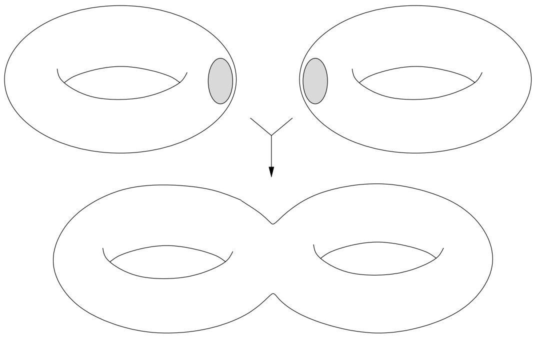


Abbildung 2.3: Zusammenhängende Summe

Übung 2.2.9

1. Man beweise, dass Σ_g der Rand eines Henkelkörpers vom Geschlecht g ist.

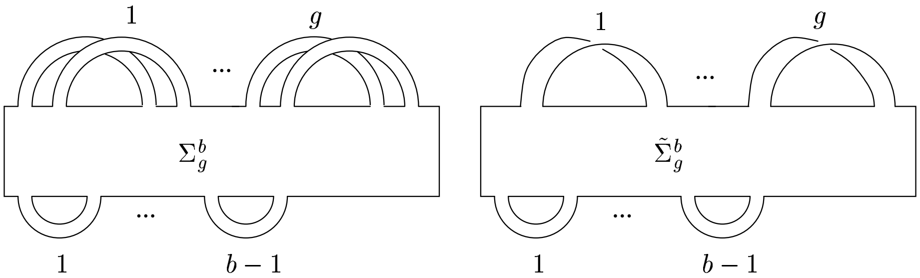
2. Zeige, dass die Zerlegung als zusammenhängende Summe assoziativ ist (bis auf Homöomorphismen).

3. Zeige $M \approx M \# S^n$ für jede n-Mannigfaltigkeit M. Was ist $M \# \overline{B^n}$?

2.3 Klassifikation von Flächen

Eine **Fläche** ist eine kompakte 2-Mannigfaltigkeit, möglicherweise mit Rand und nicht notwendig wegzusammenhängend. Die Homöomorphieklassen von Flächen sind vollständig bekannt, und wir zitieren in diesem Unterabschnitt diese Klassifikation von Flächen.

Theorem 2.3.1 *Jede zusammenhängende Fläche mit nicht-leerem Rand ist homöomorph zu einer der in der folgenden Abbildung gezeigten Modellflächen Σ_g^b (**orientierbare Fläche** vom **Geschlecht** g mit b Randkomponenten) oder $\tilde{\Sigma}_g^b$ (**nichtorientierbare Fläche** vom Geschlecht g mit b Randkomponenten, $g > 0$).*

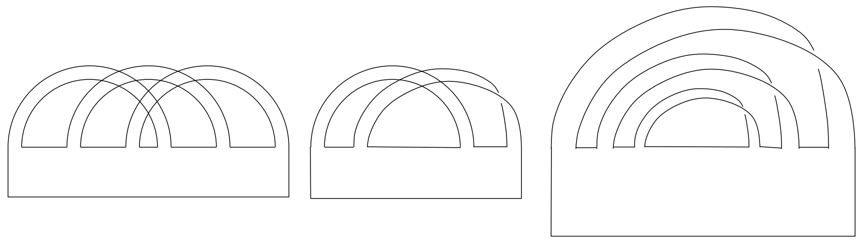


Der Rand von Σ_g^b und $\tilde{\Sigma}_g^b$ besteht aus b Kreisen. Wenn man an den Rand von Σ_g^1 bzw. $\tilde{\Sigma}_g^1$ eine abgeschlossene Scheibe klebt, so entsteht (unabhängig von dem Homöomorphismus, der das Ankleben der Scheibe beschreibt) eine geschlossene Fläche Σ_g^0 bzw. $\tilde{\Sigma}_g^0$. Das Geschlecht einer zusammenhängenden Fläche F notieren wir als $g(F)$.

Einige zusammenhängende Flächen besitzen einen Trivialnamen. Wir lernten bereits die 2-Sphäre S^2, die (reelle) **projektive Ebene** $P^2_{\mathbb{R}}$, den Torus $T^2 = S^1 \times S^1$, die Kleinsche Flasche (man notiert sie manchmal $S^1 \tilde{\times} S^1$), die abgeschlossene **Scheibe** $\overline{B^2}$ und das Möbiusband (man notiert es manchmal $S^1 \tilde{\times} [0,1]$) kennen. Dann gibt es noch den **Annulus** (oder **Kreisring**) $S^1 \times [0,1]$.

Übung 2.3.2

1. Zeige direkt (also ohne die Klassifikation von Flächen zu verwenden), dass die folgenden Flächen zu einer der Modellflächen $\Sigma_g^b, \tilde{\Sigma}_g^b$ homöomorph sind (die Bänder muss man sich natürlich überschneidungsfrei vorstellen).



2. Zeige, dass Σ_g^b orientierbar und dass $\tilde{\Sigma}_b^g$ nicht-orientierbar im Sinne von Unterabschnitt 1.7.3 ist.

3. Zu welcher Modellfläche sind die abgeschlossene Scheibe, der Annulus, das Möbiusband, die Sphäre, die projektive Ebene, der Torus sowie die Kleinsche Flasche homöomorph?

4. Man zeige, dass die 3-Mannigfaltigkeit $\Sigma_0^{g+1} \times [0,1]$ zum Henkelkörper vom Geschlecht g homöomorph ist (siehe Beispiel 2.2.5). Man beweise durch Induktion nach g, dass $\partial(\Sigma_0^{g+1} \times [0,1]) \approx \Sigma_g^0$.

5. Bestimme die Euler-Charakteristik von Σ_g^b und $\tilde{\Sigma}_g^b$ in Abhängigkeit von g und b.

Kapitel 3

Knoten, Verkettungen und Zöpfe

Wir kommen jetzt endlich zum eigentlichen Thema der Vorlesung, nämlich zu dreidimensionalen Objekten. Wir beginnen mit *Knoten*[1] bzw. *Verkettungen.* Ein Knoten ist eine Einbettung eines Kreises S^1 in S^3 oder $\mathbb{R}^3$, also eine zu S^1 homöomorphe Untermannigfaltigkeit. Eine Verkettung (oder auch *Link*) ist eine Einbettung von mehreren Kreisen, also von $S^1 \amalg \cdots \amalg S^1$ in S^3 oder $\mathbb{R}^3$. Knoten bzw. Verkettung heißt auf Englisch *knot* bzw. *link*, im Französischen *nœud* bzw. *entrelac*. Beispiele von Knoten und Verkettungen sind in Abbildung 3.1 dargestellt. Die meisten Bücher über Knotentheorie enthalten Tabellen solcher Diagramme. Der triviale Knoten ist eine ebene Kreislinie, also zum Beispiel

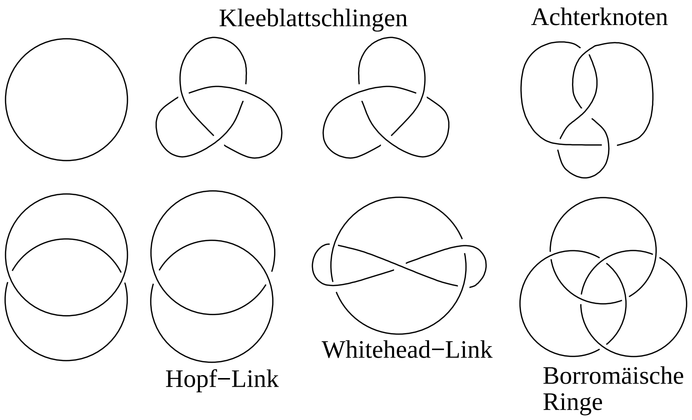


Abbildung 3.1: Einige Knoten und Verkettungen

$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3 = 0\}$. Analog ist eine triviale Verkettung eine Vereinigung verschiedener ebener Kreislinien, also zum Beispiel

$$L_{0,n} := \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3 \in \{1, \ldots, n\}\big\}$$

[1] Das hat nichts mit einem *Knoten eines Graphen* zu tun — dies würden wir als *Ecke* des Graphen bezeichnen.

für $n \in \mathbb{N}$. „Offensichtlich“ sind die anderen in Abbildung 3.1 gezeigten Knoten nicht trivial, d.h. man kann sie nicht in $L_{0,n}$ deformieren — oder? Wenn man versucht, diese Frage durch ein allgemeines Verfahren zu beantworten, zeigt sich bald, wieviel Mathematik in Knoten steckt. Wir werden erst in Abschnitt 3.2.3 zeigen können, dass die beiden Kleeblattschlingen tatsächlich nicht trivial sind. In Verallgemeinerung des klassischen Begriffes kann man natürlich auch Knoten in beliebigen anderen 3-Mannigfaltigkeiten betrachten. Man untersucht auch höherdimensionale Knoten, nämlich Einbettungen von S^n in S^{n+2}.

Bereits Carl Friedrich Gauß untersuchte Knoten und Verkettungen, und er definierte eine erste Invariante von Verkettungen, nämlich die **Verkettungszahl**. Er dachte, dass sich die Klassifikation von Knoten als nicht sehr schwer erweisen würde — er hätte sich kaum mehr irren können. Die Knotentheorie besitzt zahlreiche Querverbindungen zur Physik. Im 19. Jahrhundert gab es Theorien, bei denen Atome als Knoten aufgefasst wurden. Auch James C. Maxwell untersuchte Knoten. Die *Yang-Baxter-Gleichung*, welche in der Quantenmechanik eine gewisse Rolle spielt, entspricht direkt der *Zopfrelation*. Auch in manchen Ansätzen zu einer Quantentheorie der Gravitation spielen Knoten eine Rolle: Falls die kosmologische Konstante nicht verschwindet, besitzen die zugrundeliegenden Differentialgleichungen nicht-triviale Lösungen, welche dem *Jones-Polynom* von Knoten zugeordnet sind [9]. Das Jones-Polynom steht auch in Verbindung zur statistischen Mechanik, es gibt Entsprechungen im *Ising-Modell* des Magnetismus [27]. Das Jones-Polynom stellte sich später als Spezialfall von *Quanteninvarianten* von Knoten heraus, welche aus der Darstellungstheorie deformierter Lie-Algebren stammen [71]. Erstaunlicherweise gab es auch knotentheoretische Arbeiten in der Biochemie. DNA-Moleküle können sich nämlich bei gewissen chemischen Prozessen verknoten. Je nachdem wie dicht ein solches Molekül verknotet ist, ergeben sich Unterschiede in der Diffusionskonstante des Moleküls [44]. Knotentheoretische Untersuchungen lieferten sogar Hinweise auf die Wirkungsweise gewisser DNA-spaltender Enzyme [14].

Wir werden mehrere Herangehensweisen an die Theorie der Verkettungen vorstellen. Einerseits werden wir *Diagramme* untersuchen (das sind ebene Zeichnungen eines Knotens). Diese Sichtweise wurde durch Kurt Reidemeister begründet. Ihr Vorteil ist, dass anhand ebener Bilder dreidimensionale Objekte studiert werden können und auf verhältnismäßig einfache Art algebraische Objekte definiert werden können, die viel über die Verkettungen verraten. Doch hat es häufig auch Vorteile, sich auf die dreidimensionale Sichtweise einzulassen (im Abschnitt über den Knotenaußenraum), denn dadurch wird bisweilen die tiefere Bedeutung der algebraischen Objekte klar, die sich zwar anhand von Diagrammen leicht definieren lassen, die aber doch scheinbar „vom Himmel fallen“. Außerdem sind algorithmische Lösungen von Problemen der Knotentheorie am ehesten aus dem Studium der Außenräume und nicht der Diagramme zu gewinnen. Einen dritten Blickwinkel erlaubt das Studium der *Zöpfe*. Diese bilden eine Gruppe, die mit algebraischen Mitteln noch recht gut handhabbar ist. Darstellungen dieser Gruppe, die zum Teil aus der Quantenmechanik motiviert sind, führen wiederum auf Invarianten für Knoten. Zöpfe sind auch ein Einstieg in die Untersuchung von Automorphismen von Flächen, welche wiederum für die Konstruktion von bestimmten Typen von 3-Mannigfaltigkeiten relevant sind (dafür wird in dieser Vorlesung leider keine Zeit sein).

3.1 Knotenäquivalenz

Wir werden in dieser Vorlesung nur *zahme* Knoten behandeln. Ein Grund für diese Einschränkung ist in Abbildung 3.2 gezeigt. Dieser wilde Knoten K besitzt unendlich viele Schlaufen. Man könnte die Schlaufen offenbar leicht beseitigen,

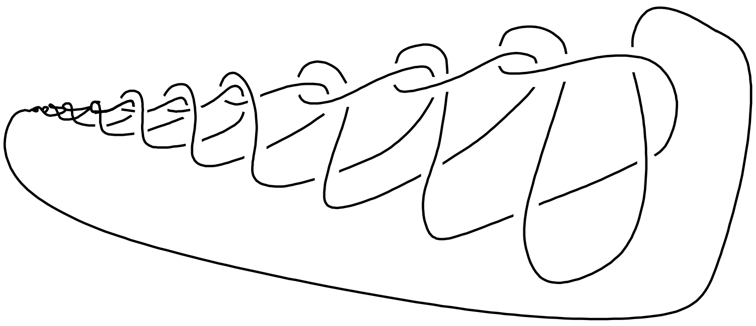


Abbildung 3.2: Wilder Knoten

wenn man dafür unendlich viel Zeit hätte; in diesem Sinne ist der abgebildete Knoten nicht wirklich verknotet. Andererseits kann man zeigen, dass es keinen Homöomorphismus $\phi\colon\ S^3 \approx S^3$ gibt, der den gezeigten Knoten auf eine ebene Kreislinie abbildet; in diesem Sinne ist der Knoten nicht-trivial.

Zu Beginn werden wir Knoten mit kombinatorischen Mitteln untersuchen, und werden Knoten daher als *Streckenzüge* definieren, also als stückweise lineare Einbettungen von S^1 in $\mathbb{R}^3$. Das ist keine Einschränkung, denn jede zahme Einbettung von S^1 lässt sich in eine stückweise lineare Einbettung deformieren. Genausogut könnte man zahme Einbettungen durch glatte (beliebig oft differenzierbare) Einbettungen ersetzen.

Definition 3.1.1 *Eine* ***Verkettung*** *mit m Komponenten ist eine stückweise lineare Einbettung*

$$\phi\colon\ \underbrace{S^1 \amalg \cdots \amalg S^1}_{m} \hookrightarrow \mathbb{R}^3.$$

Ein ***Knoten*** *ist eine Verkettung mit einer Komponente.*

Stückweise linear bedeutet, dass es auf jeder der m Kopien von S^1 endlich viele Punkte gibt, so dass die Abschnitte zwischen diesen Punkten durch ϕ auf eine Strecke in $\mathbb{R}^3$ abgebildet werden. Meist werden wir der Einfachheit halber eine Verkettung als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ auffassen, nämlich das Bild $\phi(S^1 \amalg \cdots \amalg S^1)$. Bisweilen werden wir jeder Komponente einer Verkettung eine feste Durchlaufrichtung zuordnen; wir sprechen dann von einer **orientierten Verkettung**.

Einen aus einem „echten" Faden geschlungenen Knoten kann man deformieren, ohne ihn wesentlich zu verändern. Entscheidend dabei ist natürlich, dass sich einzelne Abschnitte eines Fadens nicht gegenseitig durchdringen können.

Auf den ersten Blick ist der Begriff der Isotopie (siehe Definition 1.5.1) genau was wir wollen: Durch eine Isotopie ist ein stetiger Übergang von einem Knoten in einen anderen gegeben, ohne das zwischendurch Selbstschnitte entstehen. Doch Abbildung 3.3 weist auf ein Problem: Man könnte an einem beliebigen Knoten so „fest“ ziehen, dass der Knoten auf einen Punkt zusammengezogen wird. Dieser Prozess entspricht einer stetigen Isotopie, jeder Knoten ist also isotop zum trivialen Knoten. Allerdings ist die Isotopie an der Stelle, an der der Knoten verschwindet, nicht differenzierbar und die reguläre Umgebung des Knoten geht verloren. Wir werden in diesem Kapitel mehrere Begriffe von

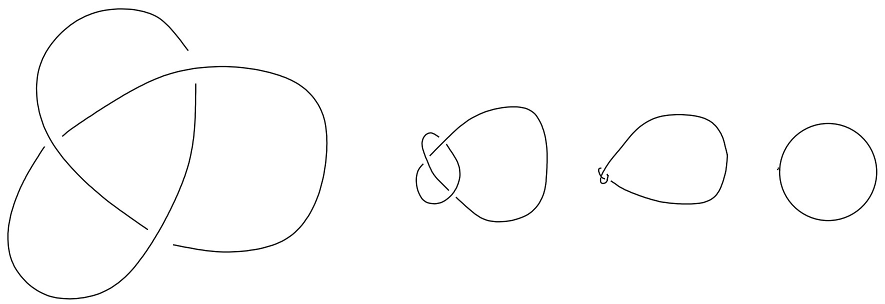


Abbildung 3.3: Wilde Isotopie

Knotenäquivalenz definieren, doch sind die Äquivalenzklassen stets dieselben. Beginnen möchten wir mit einer „expliziten“ Variante von stückweise linearen Isotopien. Dazu bezeichnen wir mit $\langle A_1 A_2 \cdots A_k \rangle$ die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten im $\mathbb{R}^n$.

Definition 3.1.2 *Es sei $L \subset \mathbb{R}^3$ eine Verkettung, und es sei $\langle ABC \rangle \subset \mathbb{R}^3$ ein Dreieck, so dass $\langle ABC \rangle \cap L = \langle AB \rangle$. Dann ist $L' := (L \setminus \langle AB \rangle) \cup \langle AC \rangle \cup \langle CB \rangle$ ebenfalls eine Verkettung. Den Übergang von L nach L' nennen wir* ***Δ-Prozess****. Falls L orientiert ist, dann orientieren wir L' so, dass die Orientierungen auf $L \cap L'$ übereinstimmen.*

Zwei (orientierte) Verkettungen $L, \tilde{L}$ heißen ***Δ-äquivalent****, falls man sie durch eine endliche Abfolge von Δ-Prozessen oder inversen Δ-Prozessen ineinander umformen kann.*

Die Äquivalenzklasse einer Verkettung L bezeichnen wir als $[L]$. Meist werden wir der Einfachheit halber von einer *Verkettung* statt von der *Äquivalenzklasse einer Verkettung* reden; das dürfte jeweils aus dem Zusammenhang klar werden.

Übung 3.1.3 Es seien p, q teilerfremde ganze Zahlen. Wir versehen $\mathbb{R}^3$ mit *Zylinderkoordinaten* (ϕ, r, z) mit $\phi \in [0, 2\pi[$, $r \geq 0$ und $z \in \mathbb{R}$. Es sei $\psi\colon\ [0, 2p\pi[\to \mathbb{R}^3$ mit

$$\psi(\alpha) := \left(\alpha \pmod{2\pi},\ 2 + \cos(\frac{q}{p}\alpha),\ \sin(\frac{q}{p}\alpha)\right).$$

1. Man zeige, dass ψ injektiv ist.

2. Durch ψ wird ein Knoten $\mathfrak{t}(p,q)$ definiert. Durch das Wachsen des Winkels α von 0 nach $2p\pi$ erhält $\mathfrak{t}(p,q)$ einen Durchlaufsinn. Ein Knoten der Form $\mathfrak{t}(p,q)$ heißt **Torusknoten**. Warum wohl? Man zeichne $\mathfrak{t}(3,2)$.

3. Man beweise $\mathfrak{t}(p,q) \sim_\Delta -\mathfrak{t}(-p,-q) \sim_\Delta -\mathfrak{t}(p,q) \sim_\Delta \mathfrak{t}(q,p)$ (Torusknoten sind also invertierbar) sowie $(\mathfrak{t}(p,q))^* \sim_\Delta \mathfrak{t}(p,-q)$.

Bemerkung 3.1.4 Gemäß der vorigen Übung ist die Kleeblattschlinge ein Torusknoten, und die Äquivalenzklasse eines orientierten Torusknotens ändert sich nicht, wenn man die Orientierung umkehrt. Es gibt tatsächlich orientierte Knoten, deren Äquivalenzklasse sich durch Umorientieren ändert, siehe [69]. Wir werden in Abschnitt 3.4.2 zeigen, dass die beiden Kleeblattschlinge (sie sind Spiegelbilder!) nicht zueinander äquivalent sind.

3.2 Kombinatorische Knotentheorie

3.2.1 Diagramme

Oben wurde behauptet, Abbildung 3.1 enthalte Beispiele von Knoten und Verkettungen. Doch eigentlich sind es nur *Zeichnungen* von Knoten und Verkettungen. Die ebene Zeichnung deutet zwar an, wie der Knoten aussieht, aber die Tiefeninformation geht fast verloren: Sie ist an den Kreuzungsstellen nur noch dadurch angedeutet, dass ein Fadenstück „oben" und das andere Fadenstück „unten" verläuft. Wir werden diese Darstellungsweise nun formal begründet und untersuchen, inwieweit sich verschiedene Zeichnungen einer Verkettung voneinander unterscheiden.

Es sei $p\colon \mathbb{R}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^2$ eine Parallelprojektion. Wenn $L \subset \mathbb{R}^3$ eine Verkettung ist, dann ist $p(L)$ eine ebene Kurve, die sich möglicherweise selbst schneidet. Wir möchten vermeiden, dass sich ein „Dreifachschnitt" ergibt, und fordern daher, dass $|p^{-1}(x) \cap L| \leq 2$ für alle $x \in p(L)$ gilt. Falls $|p^{-1}(x) \cap L| = 2$, so nennen wir x einen **Doppelpunkt**, und versehen ihn mit einer **Markierung**, die anzeigt, welcher seiner beiden Urbilder bezüglich der Projektionsrichtung höher liegt. Ferner fordern wir, dass es nur *endlich viele* Doppelpunkte gibt. Und schließlich fordern wir, dass keiner der beiden Urbilder eines Doppelpunktes eine Ecke der Verkettung ist.[2] Wenn die drei Forderungen erfüllt sind, so nennen wir $p(L) \subset \mathbb{R}^2$ zusammen mit den Markierungen der Doppelpunkte ein **Diagramm** von L, und notieren es durch $\mathcal{D}(L, p)$.

Bemerkung 3.2.1 Per definitionem ist $p(L)$ stückweise linear, also eine Vereinigung endlich vieler Strecken im $\mathbb{R}^2$. Insbesondere ist ein Diagramm eckig. Aus ästhetischen Gründen werden wir jedoch meist glatte Kurven statt Streckenzüge zeichnen.

Gemäß den folgenden beiden Lemmata besitzt jede Verkettung L ein Diagramm $\mathcal{D}(L, p)$ und wird durch dieses im Wesentlichen eindeutig beschrieben.

Lemma 3.2.2 *Zu jeder Verkettung L gibt es eine Parallelprojektion $p\colon \mathbb{R}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^2$ und ein Diagramm $\mathcal{D}(L, p)$.*

Beweis Es genügt, eine Projektionsrichtung zu finden, so dass bei der zugehörigen Projektion die drei Forderungen in der Definition von Diagrammen erfüllt sind. Eine solche Projektionsrichtung heißt *zulässig*. Jede Projektionsrichtung ist durch einen Einheitsvektor in $\mathbb{R}^3$ beschrieben, also durch einen Punkt

[2] Eine Verkettung war ja als Vereinigung von endlich vielen Strecken definiert, und die Ecken der Verkettung sind Endpunkte dieser Strecken.

auf S^2. Wir behaupten, dass die zulässigen Projektionsrichtungen eine offene dichte Teilmenge von S^2 bilden.

Es sei s eine Strecke in L und P eine Ecke von L. Die Projektionen p, bei welchen $p(P) \in p(s)$, entsprechen einer Kurve auf S^2, wie man sich leicht überzeugt. Die Projektionsrichtungen, die auf dieser Kurve liegen, sind offenbar nicht zulässig. Für Projektionen, die nicht auf diesen Kurven (für alle Paare s, P) liegen, gibt es offenbar nur endlich viele Mehrfachpunkte. Es bleibt damit nur noch übrig, all diejenigen Projektionsrichtungen auszuschließen, bei denen die Projektionen dreier Strecken in L einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen. Auch diese entsprechen Kurven auf S^2. Weil L aus endlich vielen Strecken besteht, liegen die unzulässigen Projektionsrichtungen auf endlich vielen Kurven in S^2; das Komplement dieser Kurven ist offen und dicht in S^2, insbesondere ist es nicht leer, und enthält zulässige Projektionsrichtungen. □

Lemma 3.2.3 *Wenn zwei Verkettungen dasselbe Diagramm haben, so sind sie zueinander Δ-äquivalent.*

Beweis Es seien L_1, L_2 zwei Verkettungen und p eine Projektion mit $\mathcal{D}(L_1, p) = \mathcal{D}(L_2, p)$. Die Menge der Ecken von $L_{1/2}$ bezeichnen wir mit $V(L_{1/2})$. Durch Unterteilungen von Strecken (d.h. Einfügen zusätzlicher Ecken) können wir voraussetzen, dass $p(V(L_1)) = p(V(L_2))$. Die Ecken von L_1 und L_2 unterscheiden sich also nur durch Verschiebungen in Projektionsrichtung. Wir fügen durch Unterteilung weitere Ecken in L_1 und L_2 ein, nämlich an beiden Urbildern jedes Doppelpunktes des gemeinsamen Diagrammes. Die Menge der zusätzlichen „oberen“ Ecken von $L_{1/2}$ bezeichnen wir mit $V_+(L_{1/2})$, die „unteren“ Ecken mit $V_-(L_{1/2})$. Dabei sind die Begriffe „oben“ und „unten“ bezüglich der Projektionsrichtung zu verstehen.

Es sei $X_1 \in V_+(L_1)$ und X_2 die Ecke in $V_+(L_2)$ mit $p(X_1) = p(X_2)$. Wir ändern L_1 und L_2, indem wir X_1 und X_2 nach oben zu einem gemeinsamen Punkt $\tilde{X}$ verschieben und alle anderen Ecken festlassen. Dabei soll $\tilde{X}$ weiter oben als alle Ecken in $V(L_1)$ und $V(L_2)$ liegen. Da X_1 und X_2 oben liegen, lässt sich die Verschiebung jeweils durch zwei Δ-Prozesse entlang von Dreiecken parallel zur Projektionsrichtung realisieren (siehe Abbildung 3.4 links). In dieser

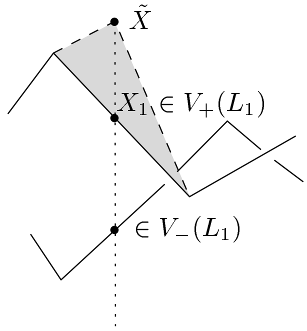


Abbildung 3.4: Verschieben einer Ecke

Weise verfahren wir mit allen Ecken aus $V_+(L_{1/2})$. Entsprechend verschieben wir auch alle Ecken aus $V_-(L_{1/2})$ nach unten, und zwar tiefer als alle Ecken aus $V(L_{1/2})$. Die entstehenden Verkettungen bezeichnen wir mit $\tilde{L}_{1/2}$.

Es sei nun $Y_1 \in V(L_1) \subset \tilde{L}_1$ und $Y_2 \in V(L_2)$ mit $p(Y_1) = p(Y_2)$. Wir ändern $\tilde{L}_1$, indem wir Y_1 nach Y_2 verschieben und alle anderen Ecken von $\tilde{L}_1$ festlassen. Auch diese Verschiebung lässt sich durch zwei Δ-Prozesse entlang von Dreiecken parallel zur Projektionsrichtung realisieren (siehe Abbildung 3.4 rechts). In ähnlicher Weise verfahren wir mit allen Ecken in $V(L_1)$ und transformieren auf diese Weise $\tilde{L}_1$ in eine Verkettung L_1', dessen Ecken mit den Ecken von $\tilde{L}_2$ übereinstimmen.

Bis jetzt haben wir nur verwendet, dass $p(L_1) = p(L_2) = p(L_1') = p(\tilde{L}_2)$. Jetzt nutzen wir, dass sogar $\mathcal{D}(L_1, p) = \mathcal{D}(L_2, p)$, dass also sogar die Markierungen der Doppelpunkte übereinstimmen. Es sei $X_1 \in V_+(L_1) \cup V_-(L_1)$ und $Y_1 \in V(L_1)$, so dass $\langle X_1 Y_1 \rangle \subset L_1$; es sei $Y_2 \in V(L_2)$ mit $p(Y_1) = p(Y_2)$. Dann gibt es genau ein $X_2 \in V_+(L_2) \cup V_-(L_2)$, so dass $\langle X_2 Y_2 \rangle \subset L_2$ und $p(X_1) = p(X_2)$. Weil die Markierung des Doppelpunktes $p(X_1) = p(X_2)$ in $\mathcal{D}(L_1, p)$ und $\mathcal{D}(L_2, p)$ übereinstimmen, ist $X_1 \in V_+(L_1)$ genau dann wenn $X_2 \in V_+(L_2)$. Daher stimmen nicht nur die Ecken von L_1' und $\tilde{L}_2$ überein, sondern sie werden sogar in der gleichen zyklischen Reihenfolge durchlaufen. $\square$

3.2.2 Der Satz von Reidemeister

Wenn ein Diagramm $\mathcal{D}(L, p) \subset \mathbb{R}^2$ durch eine p.l.-Isotopie in $\mathbb{R}^2$ geändert wird, so ist nach dem vorigen Lemma leicht einzusehen, dass ein Diagramm einer zu L Δ-äquivalenten Verkettung entsteht. Es ist kein Problem, zu erkennen, ob zwei Diagramme zueinander in $\mathbb{R}^2$ p.l.-isotop sind — dazu gibt es im Kontext von ebenen Graphen Algorithmen. Schwierigkeiten entstehen hingegen dadurch, dass eine Verkettung im Allgemeinen Diagramme besitzt, die nicht zueinander in $\mathbb{R}^2$ isotop sind. Abbildung 3.5 zeigt Umformungsprozesse, durch die Diagramme nicht-isotop geändert werden, obwohl sie offenbar zu Δ-äquivalenten Verkettungen gehören. Die Abbildung ist so zu verstehen, dass die Diagramme außerhalb

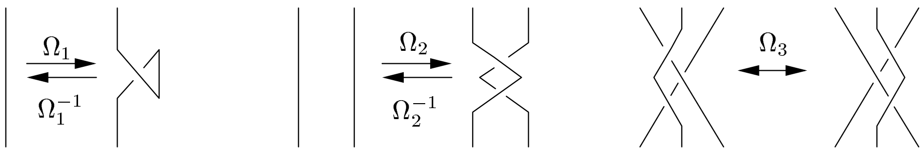
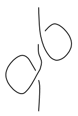
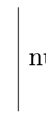
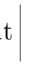


Abbildung 3.5: Die Reidemeister-Prozesse

der gezeigten Abschnitte jeweils unverändert bleiben. Durch einen Ω_1-Prozess entsteht also ein neuer Doppelpunkt, durch einen Ω_2-Prozess zwei neue Doppelpunkte, und beim Ω_3-Prozess ändert sich die Anordnung von drei benachbarten Doppelpunkten.

Übung 3.2.4 Man realisiere  $\sim$  nur unter Verwendung der Prozesse $\Omega_2^{\pm 1}$ und $\Omega_3^{\pm 1}$.

Gemäß dieser Übung gilt  $\sim$ , wobei $\sim$ die durch $\Omega_1^{\pm 1}, \Omega_2^{\pm 1}, \Omega_3^{\pm 1}$ und ebene p.l.-Isotopie erzeugte Äquivalenzrelation bezeichnet. Die Prozesse $\Omega_1^{\pm 1}, \Omega_2^{\pm 1}, \Omega_3^{\pm 1}$ heißen **Reidemeister-Prozesse**. Der folgende Satz von Reidemeister besagt nun, dass man durch Reidemeister-Prozesse und p.l.-Isotopie in $\mathbb{R}^2$ beliebige Diagramme zweier zueinander Δ-äquivalenter Verkettung ineinander umformen kann, wenn man sie nur hinreichend oft anwendet. Durch dieses Ergebnis hat Reidemeister die „kombinatorische Knotentheorie“ begründet [51]. Das dreidimensionale Problem der Äquivalenz von Verkettungen wird also auf ein zweidimensionales Problem zurückgeführt. Manche Probleme der Knotentheorie lassen sich leichter in der dreidimensionalen Darstellungsweise lösen, andere sind über Diagramme leichter zugänglich — Knotentheoretiker müssen beide Herangehensweisen beherrschen.

Theorem 3.2.5 (Reidemeister) *Zwei Verkettungen sind genau dann zueinander Δ-äquivalent, wenn ihre Diagramme durch eine endliche Folge der Prozesse $\Omega_1^{\pm}, \Omega_2^{\pm}, \Omega_3^{\pm}$ sowie Isotopie in $\mathbb{R}^2$ ineinander übergehen.*

Beweis Wir zeigen zunächst, dass zwei Diagramme einer Verkettung zu verschiedenen Projektionsrichtungen durch Reidemeister-Prozesse ineinander übergehen. Sei $L \subset \mathbb{R}^3$ eine Verkettung und p_0, p_1 Parallelprojektionen, so dass zwei Diagramme $\mathcal{D}(L, p_0)$ und $\mathcal{D}(L, p_1)$ entstehen. Wir betrachten p_0, p_1 wieder als Punkte auf S^2 und erinnern an die *Ausnahmekurven* auf S^2, entsprechend Projektionen, die nicht auf ein Diagramm führen. Da es nur endlich viele Ausnahmekurven gibt, gibt es auf S^2 einen Weg von p_0 nach p_1, also eine stetige Abbildung $p\colon\ [0,1] \to S^2$ mit $p(0) = p_0$ und $p(1) = p_1$, so dass $p([0,1])$ nur endlich viele Schnitte mit Ausnahmekurven hat. Wenn $p(t)$ nicht auf einer Ausnahmekurve liegt, erhalten wir ein Diagramm $\mathcal{D}(L, p(t))$. Wenn t von 0 nach 1 wächst, so ändert sich $\mathcal{D}(L, p(t))$ durch Isotopie in $\mathbb{R}^2$, außer wenn gerade eine Ausnahmekurve überquert wird. Nach Konstruktion der Ausnahmekurven ändert sich das Diagramm an diesen Stellen durch Isotopie oder einen Reidemeister-Prozess; vgl. Abbildung 3.6, wobei allerdings nicht alle Sonderfälle berücksichtigt sind (die Markierungen der Doppelpunkte können jeweils auch umgekehrt sein). Es folgt also $\mathcal{D}(L, p_0) \sim \mathcal{D}(L, p_1)$.

Es seien nun $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^3$ Verkettungen, welche zueinander Δ-äquivalent sind. Durch Induktion können wir annehmen, dass L_2 aus L_1 durch einen einzelnen Δ-Prozess an einem Dreieck $\langle ABC \rangle$ hervorgeht mit $\langle ABC \rangle \cap L_1 = \langle AB \rangle$. Wir betrachten ferner Diagramme von L_1, L_2. Nach dem Ergebnis des ersten Absatzes können wir bis auf Reidemeister-Äquivalenz der Diagramme annehmen, dass beide Diagramme durch dieselbe Projektion p entstehen. Wenn $p(\langle ABC \rangle) \cap p(L_1) = p(\langle AB \rangle)$, dann ändert sich $\mathcal{D}(L_1, p)$ durch den Δ-Prozess offenbar nur durch Isotopie in $\mathbb{R}^2$; dies ist insbesondere der Fall, wenn $\langle ABC \rangle$ parallel zur Projektionsrichtung liegt. Wenn $p(\langle ABC \rangle)$ hingegen weitere „Fäden“ des Diagramms schneidet, so unterteilen wir $\langle ABC \rangle$ in kleinere Teildreiecke und zerlegen den Δ-Prozess entsprechend in mehrere Δ-Prozesse. Man kann dadurch erreichen (Übung oder [52]!), dass sich in jedem Schritt das Diagramm im Wesentlichen (bis auf Symmetrie, Markierungsänderung, ebene Isotopie) auf eine der in Abbildung 3.7 dargestellten Arten ändert. In allen Fällen entspricht die Änderung (bis auf Isotopie) einem Reidemeister-Prozess. $\square$

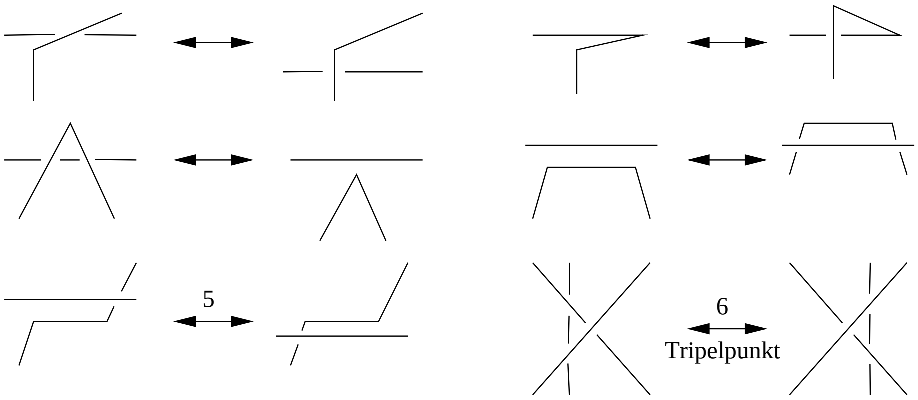


Abbildung 3.6: Geänderte Projektionsrichtung

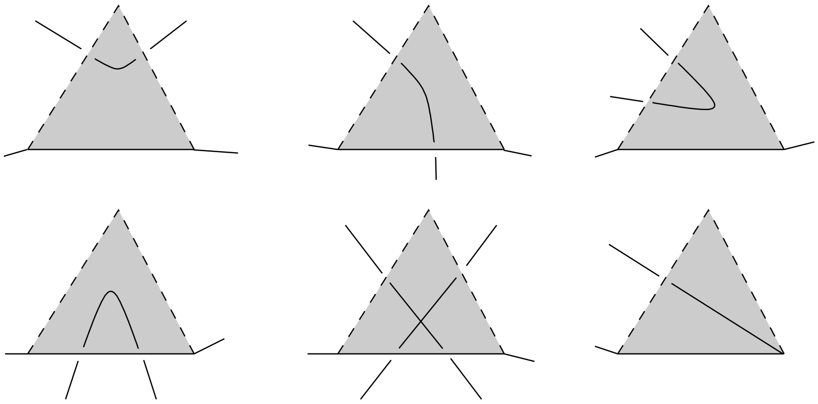
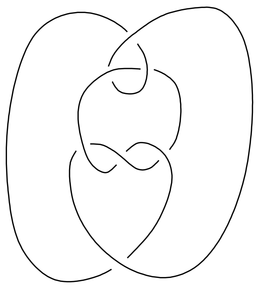


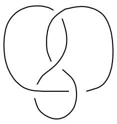
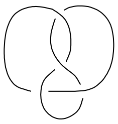
Abbildung 3.7: Auswirkung von Δ-Prozessen

Wenn wir *orientierte* Verkettungen betrachten, so erhalten auch die Kanten ihrer Diagramme eine Orientierung. Diese orientierten Diagramme gehen natürlich ebenfalls durch Reidemeister-Prozesse auseinander hervor, wobei allerdings die verschiedenen Orientierungen der an den Reidemeister-Prozessen beteiligten Fäden berücksichtigt werden müssen.

Übung 3.2.6

1. Eine naheliegende Strategie zur Vereinfachung eines Diagrammes ist es, so oft wie möglich die Prozesse Ω_1^{-1} und Ω_2^{-1} anzuwenden. Man beweise, dass das nebenstehende Diagramm ein Diagramm des trivialen Knotens ist, und folgere, dass das „gierige“ Vereinfachen durch Ω_1^{-1} und Ω_2^{-1} nicht zu einem Erkennungsalgorithmus für den trivialen Knoten führt.



2. Man beweise  $\sim$ 

3.2.3 Färbungen

Ein **Bogen** eines Diagramms $\mathcal{D}(L,p)$ ist die Projektion eines (möglicherweise geschlossenen) Weges in L, dessen Enden (falls vorhanden) *untere* Urbilder von Doppelpunkten von $\mathcal{D}(L,p)$ sind und der in seinem Inneren keine weiteren unteren Urbilder von Doppelpunkten von $\mathcal{D}(L,p)$ enthält; er darf obere Urbilder von Doppelpunkten enthalten. Die fett gezeichneten Linien in Abbildung 3.8 sind Beispiele von Bögen. Vereinfacht gesagt ist ein Bogen ein Teil des Diagramms, den man ohne abzusetzen zeichnen kann.

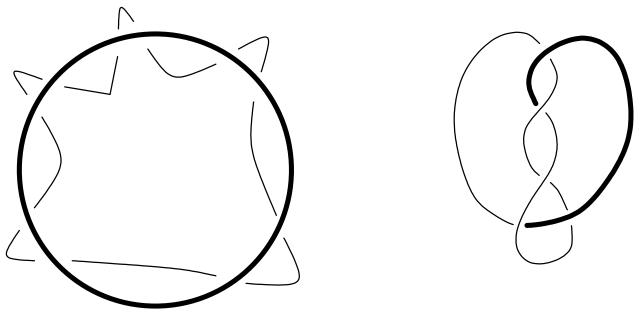


Abbildung 3.8: Bögen

In der folgenden Übung werden die Bögen eines Diagrammes in bestimmter Weise „gefärbt“ und aus der Existenz von Färbungen auf die Nicht-trivialität eines Knotens geschlossen. Der erste Teil dieser Übung ist ein Spezialfall einer Aussage, die wir im Anschluss beweisen.

Übung 3.2.7

1. Eine **3-Färbung** eines Diagramms ordnet jedem Bogen des Diagramms eine der „Farben“ $1, 2, 3$ zu, so dass an jedem Doppelpunkt des Diagramms die drei anstoßenden Bögen jeweils entweder alle dieselbe Farbe oder paarweise verschiedene Farben tragen. Wenn alle Bögen des Diagramms dieselbe Farbe tragen, dann heißt die 3-Färbung **trivial**.

   (a) Beweise, dass für jede Verkettung jeweils entweder alle Diagramme oder kein Diagramm eine nicht-triviale 3-Färbung besitzen. Die Eigenschaft „Es gibt eine nicht-triviale 3-Färbung“ ist also eine Verkettungsinvariante.

   (b) Beweise, dass die Kleeblattschlingen (siehe Abbildung 3.1) eine nicht-triviale 3-Färbung besitzen. Damit ist bewiesen, dass es nicht-triviale Knoten gibt!

   (c) Beweise, dass der Achterknoten (siehe Abbildung 3.1) keine nicht-triviale 3-Färbung besitzt. Die Methode der 3-Färbung scheint also nicht sonderlich stark zu sein.

Die Idee, Knoten und Verkettungen anhand von Färbungen ihrer Diagramme zu unterscheiden, werden wir nun systematisieren.

Definition 3.2.8 *Ein* ***Farbensystem*** *ist eine Menge F mit einer Verknüpfung $\circ$, so dass gilt:*

1. $f \circ f = f$ für alle $f \in F$ (idempotent),

2. $f \circ g = f \circ h$ impliziert $g = h$, für alle $f, g, h \in F$ (linkskürzbar), und

3. $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ (f \circ h)$ für alle $f, g, h \in F$ (linksdistributiv).

Eine F-Färbung eines orientierten Verkettungsdiagramms $\mathcal{D}$ ordnet jedem Bogen von $\mathcal{D}$ ein Element von F zu, so dass an jeder Überkreuzung gilt: $\begin{array}{c} g \\ \xrightarrow{f} \\ f \circ g \end{array}$ Man beachte, dass nur die Orientierung des *überkreuzenden* Bogens berücksichtigt wird. Eine F-Färbung heißt trivial, wenn jedem Bogen dasselbe Element von F zugeordnet ist.

Beispiel 3.2.9 Die in der vorigen Übung betrachteten 3-Färbungen sind F-Färbungen, für $F = \{1, 2, 3\}$ mit $f \circ f = f$ für $f \in F$ sowie $1 \circ 2 = 2 \circ 1 = 3$, $2 \circ 3 = 3 \circ 2 = 1$ und $3 \circ 1 = 1 \circ 3 = 2$.

Lemma 3.2.10 *Es sei F ein Farbensystem. Wenn zwei orientierte Diagramme zueinander äquivalent sind, so besitzt entweder keines von ihnen oder beide eine nicht-triviale F-Färbung.*

Beweis Es genügt, zwei orientiert Diagramme $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ zu betrachten, die sich nur durch einen Reidemeister-Prozess unterscheiden. Wir zeigen: Wenn $\mathcal{D}_1$ eine nicht-triviale F-Färbung besitzt, dann auch $\mathcal{D}_2$, und umgekehrt. Dazu zeigen wir: Jeder F-Färbung von $\mathcal{D}_1$ entspricht eindeutig eine F-Färbung von $\mathcal{D}_2$, so dass die beiden F-Färbungen auf den durch den Reidemeister-Prozess

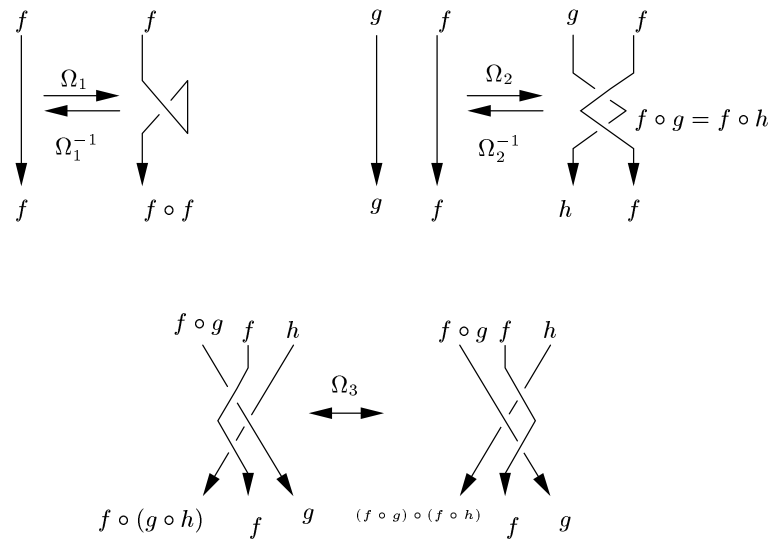


Abbildung 3.9: Färbungen unter Reidemeister-Prozessen

unveränderten Teil der Diagramme übereinstimmen. Dazu betrachten wir Abbildung 3.9. Es ist für jeden Reidemeister-Prozess jeweils eine Möglichkeit angegeben, die Fäden zu orientieren. Man kann sich leicht überzeugen, dass die anderen Möglichkeiten der Orientierung keine zusätzlichen Schwierigkeiten ergeben. Für Ω_1 stellt die Idempotenz $f \circ f = f$ sicher, dass sich die Färbungen vor und nach dem Prozess eins zu eins entsprechen. Für Ω_2 ist die Linkskürzbarkeit entscheidend, denn daraus folgt die für die Fortsetzbarkeit der Färbungen entscheidende Gleichung $g = h$. Für Ω_3 schließlich folgt die Fortsetzbarkeit aus der Linksdistributivität $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ (f \circ h)$. Man erkennt ferner, dass eine F-Färbung vor einem Reidemeister-Prozess genau dann nicht-trivial ist, wenn die entsprechende F-Färbung nach dem Reidemeister-Prozess nicht-trivial ist. □

Wer sich über diesen Ansatz zum Verständnis von Verkettungen näher informieren möchte, kann dies unter dem Stichwort *quandle* tun. Linksdistributive Verknüpfungen werden auch in der Theorie der *großen Kardinalzahlen* untersucht [13]. Aus mengentheoretischen Axiomen über die Existenz großer Kardinalzahlen folgen auf rein algebraische Weise einige Eigenschaften von Zopfgruppen, die sich sogar algorithmisch nutzen lassen; vgl. Abschnitt 3.4.

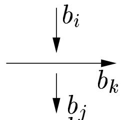
Übung 3.2.11 Man konstruiere ein möglichst kleines Farbensystem F, so dass der Achterknoten eine nicht-triviale F-Färbung besitzt.

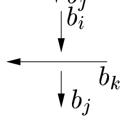
3.2.4 Knotengruppe

Im vorigen Unterabschnitt wurden Farbensysteme definiert. Jede Gruppe $(G, \cdot)$ führt auf ein Farbensystem $(G, \circ)$ über die Definition $f \circ g := f \cdot g \cdot f^{-1}$, wie man leicht verifiziert. Jede Gruppe bietet also die Chance, Verkettungen anhand ihrer Färbbarkeit zu unterscheiden. Wir werden nun den umgekehrten Weg gehen: Es sollen nicht Diagramme mit einer vorgegebenen Gruppe gefärbt werden, sondern es soll anhand eines vorgegebenen Diagrammes $\mathcal{D}$ eine Gruppe $G_{\mathcal{D}}$ konstruiert werden, wobei sich aus der Konstruktion unmittelbar eine $G_{\mathcal{D}}$-Färbung von $\mathcal{D}$ ergeben wird.

Definition 3.2.12 *Es sei $\mathcal{D}$ ein orientiertes Diagramm mit Bögen $b_1, \ldots, b_n$. Wir betrachten $b_1, \ldots, b_n$ als Erzeugende einer freien Gruppe $F(b_1, \ldots, b_n)$. Für jeden Doppelpunkt P von $\mathcal{D}$ definieren wir ein Wort $r(P) \in F(b_1, \ldots, b_n)$ durch*

$$r(P) := \begin{cases} b_j^{-1} b_k b_i b_k^{-1} & ; \; P = \\ b_j^{-1} b_k^{-1} b_i b_k & ; \; P = \end{cases}$$





Dann definieren wir durch

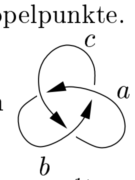
$$\begin{aligned} G_{\mathcal{D}} &:= \langle b_1, \ldots, b_n \mid r(P) \colon \ P \text{ Doppelpunkt von } \mathcal{D} \rangle \\ &:= F(b_1, \ldots, b_n)/N \end{aligned}$$

eine Gruppe, wobei N den von den „Relationen" $\{r(P) \colon \ P$ Doppelpunkt von $\mathcal{D}\}$ erzeugten Normalteiler bezeichnet. Oft schreibt man die Relationen auch als Gleichung: $b_j = b_k^{-1} b_i b_k$ etc.

Wenn man eine Gruppe G durch $\langle$*Erzeugende* | *Relationen* $\rangle$ beschreibt, so nennt man dies ein **Präsentation** von G. Die in Definition 3.2.12 angegebene Präsentation heißt **Wirtinger-Präsentation**, und die so definierte Gruppe heißt **Knotengruppe**.

Sowohl bei der Wahl der Erzeugenden als auch der Relationen besteht eine große Freiheit. Wenn etwa eine Relation aus den anderen Relationen folgt (wenn sie also in dem von den anderen Relationen erzeugten Normalteiler enthalten ist), dann kann man sie einfach weglassen, ohne die präsentierte Gruppe zu verändern. Ebenso kann man ein Erzeugendes weglassen, wenn es sich durch Anwendung der Relationen als Produkt anderer Erzeugender erweist. Eine Relation $g_1 g_2 \cdots g_n$ lässt sich stets durch $g_2 g_3 \cdots g_n g_1$ ersetzen; denn es ist ja $g_2 g_3 \cdots g_n g_1 = g_1^{-1} (g_1 g_2 \cdots g_n) g_1$, der von den Relationen erzeugte Normalteiler ändert sich also nicht. Wenn E die Menge der Erzeugenden und R die Menge der Relationen bezeichnet und H eine Gruppe ist, so lässt sich jede Abbildung $\phi \colon E \to H$ zu einem Homomorphismus ϕ' der von E erzeugten freien Gruppe $F(E)$ nach H fortsetzen. Dadurch wird ein Homomorphismus von $\langle E \mid R \rangle = F(E)/N(R)$ erzeugt, genau dann wenn $\phi'(r) = 1 \in H$ für alle $r \in R \subset F(E)$ gilt.

Im Allgemeinen ist weder die Menge der Erzeugenden noch die Menge der Relationen in einer Gruppenpräsentation endlich. Es gibt auch Gruppen, die sich durch endlich viele Elemente erzeugen lassen (*endlich erzeugt*), aber nicht durch die Angabe endlich vieler Relationen beschreiben lassen (nicht *endlich präsentiert*). Übrigens ist eine Präsentation von G (englisch *presentation*) etwas völlig anderes als eine Darstellung von G (englisch *representation*). Letzteres ist ein Homomorphismus von G in eine andere Gruppe, die man besser versteht, wie z.B. eine Matrizengruppe.

Beispiel 3.2.13 Das triviale Diagramm (der Kreis) hat nur einen Bogen und keine Doppelpunkte. Die zugeordnete Gruppe ist also $\langle b \mid \ \rangle \cong \mathbb{Z}$. Für das Diagramm 

erhalten wir die Gruppe $G := \langle a, b, c \mid b = cac^{-1}, c = aba^{-1}, a = bcb^{-1}\rangle$. Die Relation $c = aba^{-1}$ erlaubt es, das Erzeugende c zu eliminieren (also als Wort in den anderen Erzeugenden zu schreiben), und wir erhalten

$$
\begin{aligned}
G &\cong \langle a, b \mid b = aba^{-1}aab^{-1}a^{-1}, a = baba^{-1}b^{-1}\rangle \\
&= \langle a, b \mid b = abab^{-1}a^{-1}, a = baba^{-1}b^{-1}\rangle \\
&= \langle a, b \mid bab = aba\rangle
\end{aligned}
$$

Man beachte, dass *beide* Relationen in der mittleren Zeile gleichwertig zur Relation $bab = aba$ sind. Diese Relation wird uns noch in Abschnitt 3.4 begegnen und heißt **Zopfrelation**.

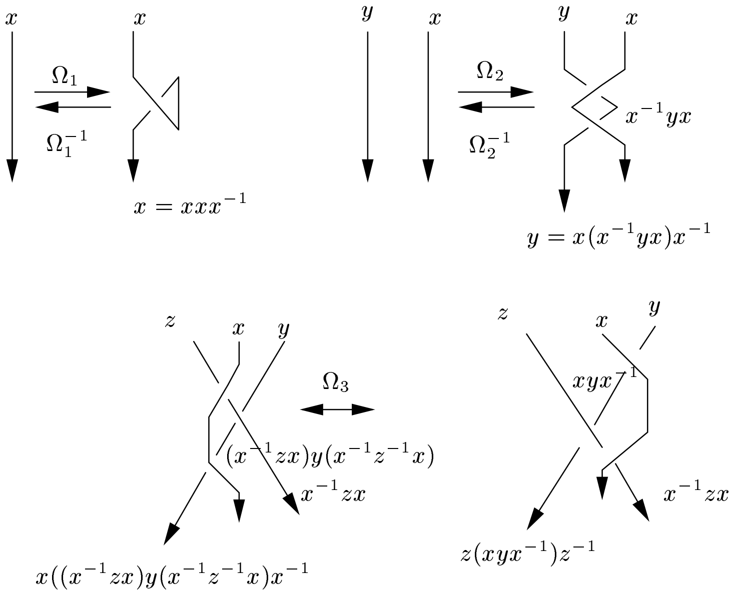


Abbildung 3.10: Invarianz der Knotengruppen

Satz 3.2.14 *Für zwei zueinander äquivalente orientierte Diagramme $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$ sind die durch die Wirtinger-Präsentation gegebenen Gruppen isomorph, $G_{\mathcal{D}_1} \cong G_{\mathcal{D}_2}$.*

Beweis Wir können wieder per Induktion annehmen, dass sich $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ nur um einen Reidemeister-Prozess voneinander unterscheiden. Jedem Bogen der Diagramme ist ein Gruppenelement zugeordnet. Ein Bogen b_i von $\mathcal{D}_1$ in dem durch den Prozess unveränderten Teil der Diagramme ist gleichzeitig ein Bogen von $\mathcal{D}_2$. Wir bilden das b_i entsprechende Gruppenelement von $G_{\mathcal{D}_1}$ auf das b_i entsprechende Gruppenelement von $G_{\mathcal{D}_2}$ ab, und verfahren so für *alle* Bögen im durch den Reidemeister-Prozess unveränderten Teil der Diagramme. Wir behaupten, dass dadurch bereits ein Gruppenisomorphismus $\phi\colon G_{\mathcal{D}_1} \cong G_{\mathcal{D}_2}$ gegeben ist.

Die Bögen, welche durch den Reidemeister-Prozess geändert werden, entsprechen Gruppenelementen, welche sich in der Wirtinger-Präsentation eliminieren lassen (siehe Abbildung 3.10). Es bleibt also nur noch zu testen, ob die Relationen in der Wirtinger-Präsentation von $\mathcal{D}_1$ durch ϕ auf das triviale Element in $G_{\mathcal{D}_2}$ abgebildet werden, also eine Folge der Relationen in der Wirtinger-Präsentation von $\mathcal{D}_2$ sind. Dies ist an Abbildung 3.10 leicht zu verifizieren. □

Übung 3.2.15

1. Man berechne die „Abelschmachung“ G_L^{ab} (das ist der Quotient von G_L nach der Kommutatoruntergruppe, oder anders gesagt der größte abelsche Quotient von G_L) für eine Verkettung L mit k Komponenten.

2. * Es seien p, q teilerfremde ganze Zahlen, und $\mathfrak{t}(p,q)$ ein Torusknoten (vgl. Übung 3.1.3). Man beweise $G_{\mathfrak{t}(p,q)} \cong \langle u, v \mid u^p v^{-q} \rangle$ und bestimme das Zentrum dieser Gruppe.

Bemerkung 3.2.16

1. Wir werden in Beispiel 3.3.3.2 eine Lösung zu Übung 3.2.15.2 angeben, indem wir Knoten als dreidimensionale Objekte statt bloß als zweidimensionale Diagramme betrachten. Wenn man nur mit Diagrammen arbeitet, ist diese Übung sehr kniffelig.

2. Durch den Isomorphietyp der Gruppe $\langle u, v \mid u^p v^{-q} \rangle$ sind p, q bis auf Vertauschung und Vorzeichen bestimmt. Es gibt also unendlich viele nicht-äquivalente Knoten.

3. Nach einem Satz von Burde und Zieschang [11] ist ein nicht-trivialer Knoten K genau dann äquivalent zu einem Torusknoten, wenn das Zentrum von G_K nicht-trivial ist.

3.2.5 Das Periphere System eines Knotens

Es sei $\mathcal{D}$ ein Diagramm eines (orientierten) Knotens K mit Bögen $b_1, \ldots, b_n$. Wir nennen die den Bögen entsprechenden Elemente $b_1, \ldots, b_n \in G_{\mathcal{D}}$ **Meridiane** von K. Diese Sprechweise impliziert natürlich, dass die Meridiane von K im Wesentlichen nur von K und nicht von $\mathcal{D}$ abhängen; dies werden wir im Folgenden zeigen. Zunächst beobachten wir, dass die Meridiane von K gemäß den Wirtinger-Relationen von $G_{\mathcal{D}}$ alle zueinander konjugiert sind. Wenn ein Diagramm $\mathcal{D}'$ von K durch einen Reidemeister-Prozess aus $\mathcal{D}$ entsteht und b_i ein durch den Prozess unveränderter Bogen ist, so bildet der im Beweis von Satz 3.2.14 konstruierte Gruppenisomorphismus $\phi\colon G_{\mathcal{D}} \cong G_{\mathcal{D}'}$ den Meridian $b_i \in G_{\mathcal{D}}$ von K auf einen Meridian von K in $G_{\mathcal{D}'}$ ab. Jeder Meridian von K in $G_{\mathcal{D}}$ ist konjugiert zu einem Meridian, der durch den Reidemeister-Prozess unverändert bleibt. Also bildet ϕ die Konjugationsklasse von Meridianen von K in $G_{\mathcal{D}}$ auf die Konjugationsklasse von Meridianen von K in $G_{\mathcal{D}'}$ ab. In diesem Sinne also hängen die Meridiane nur vom Knoten und nicht vom Diagramm ab.

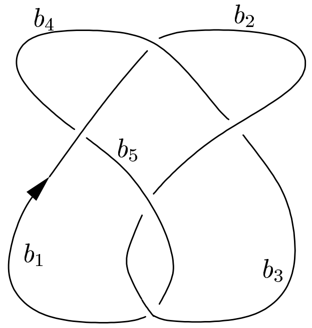
Wir werden nun noch ein weiteres Element von $G_{\mathcal{D}}$ definieren, das ebenfalls bis auf Konjugation nur vom Knoten und nicht vom Diagramm abhängt. Wir wählen zunächst einen Bogen b von $\mathcal{D}$. Wir laufen im Diagramm entlang der Orientierung von K und unterkreuzen dabei (in zyklischer Reihenfolge) Bögen $b_{i_1}, \ldots, b_{i_c}$, wobei c die Anzahl der Doppelpunkte von $\mathcal{D}$ ist und die einzelnen Bögen mehrfach auftreten können. Ferner sei $\epsilon_j = +1$ (bzw. $= -1$), wenn b_{i_j} von rechts nach links (bzw. von links nach rechts) unterkreuzt wird. Es sei $\alpha := -\sum_{j=1}^{c} \epsilon_j$. Dann heißt

$$l(b) := \left(\prod_{j=1}^{c} b_{i_j}^{\epsilon_j} \right) \cdot b^{\alpha}$$

die zu b gehörende **Longitude** von K.

Beispiel 3.2.17

Im nebenstehenden Beispiel ist die zu $b = b_1$ gehörende Longitude $b_4^{-1} b_5^{-1} b_2^{-1} b_1^{-1} b_3^{-1} b_1^{5}$.



Die Longitude liegt in der Kommutatoruntergruppe von $G_{\mathcal{D}}$. Wir werden nun untersuchen, inwieweit das Paar $(b, l(b))$ von der Wahl von $\mathcal{D}$ und b abhängt. Wenn G eine Gruppe ist, definieren wir eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $G \times G$: Es sei $(a, b) \sim (c, d)$ genau dann wenn es ein $g \in G$ gibt mit $gag^{-1} = c$ und $gbg^{-1} = d$. Die Äquivalenzklasse von (a, b) bezeichnen wir mit $[a, b]$.

Definition 3.2.18 *Es sei K ein orientierter Knoten mit einem Diagramm $\mathcal{D}$, und es sei $b \in G_{\mathcal{D}}$ ein Meridian von K. Das Paar $(G_{\mathcal{D}}, [b, l(b)])$ heißt* ***peripheres System*** *von K.*

Analog kann man auch für Verkettungen ein peripheres System definieren, doch darauf verzichten wir, um die Notation einfach zu halten.

Theorem 3.2.19 *Es seien $(G_{\mathcal{D}}, [b, l(b)])$ und $(G_{\mathcal{D}'}, [b', l(b')])$ periphere Systeme eines orientierten Knotens K bezüglich zweier Diagramme $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$. Es gibt einen Isomorphismus $\phi\colon G_{\mathcal{D}} \cong G_{\mathcal{D}'}$ mit $\phi \times \phi([b, l(b)]) = [b', l(b')]$. Wenn $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$, so gilt diese Aussage für $\phi = \mathrm{Id}_G$, die Äquivalenzklasse $[b, l(b)]$ hängt also nicht von der Wahl von b ab.*

Beweis Man kann leicht zeigen, dass die Äquivalenzklasse $[b, l(b)]$ nicht von der Wahl des Bogens b abhängt (Übung!). Wir nehmen nun an, dass $\mathcal{D}'$ aus $\mathcal{D}$ durch einen Reidemeister-Prozess hervorgeht, und betrachten den im Beweis von Satz 3.2.14 konstruierten Isomorphismus $\phi\colon\ G_{\mathcal{D}} \cong G_{\mathcal{D}'}$. Es sei ϵ_j, b_{i_j} und α wie in der Definition von $l(b)$, und es sei c die Anzahl der Kreuzungen von $\mathcal{D}$. Wie immer erhalten wir drei Fälle gemäß den Reidemeister-Prozessen. Da

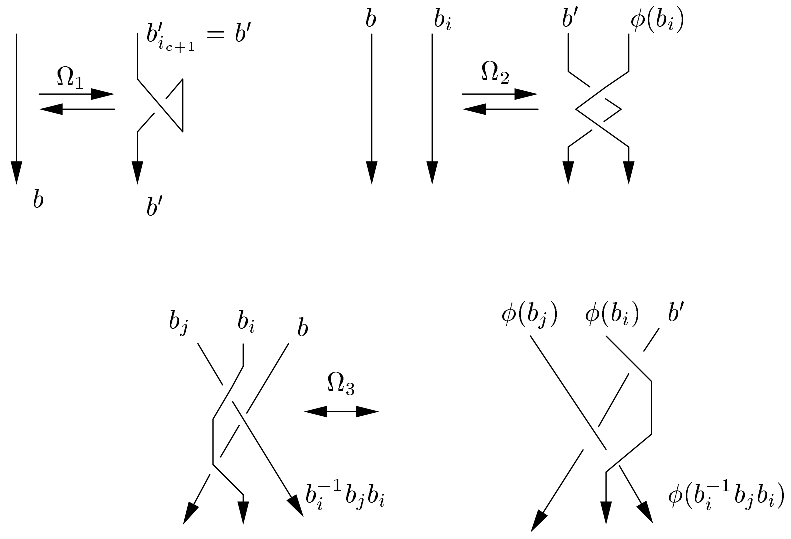


Abbildung 3.11: Invarianz der Longitude

$[b, l(b)]$ und $[b', l(b')]$ nicht von der Wahl von b und b' abhängen, können wir b und b' jeweils so wählen wie in Abbildung 3.11. Nach Konstruktion von ϕ gilt $b' = \phi(b)$, und wir werden $l(b') = \phi(l(b))$ zeigen. Beim Prozess Ω_1 erhalten wir $b'_{i_{c+1}} = b'$, $\epsilon_{c+1} = -1$, und demnach wächst α um Eins. Es ist also

$$l(b') = \left(\prod_{j=1}^{c} \phi(b_{i_j}^{\epsilon_j})\right) \cdot (b')^{-1} \cdot b' \cdot (b')^{\alpha} = \phi(l(b)).$$

Beim Prozess Ω_2 ändert sich α nicht, und es entsteht $l(b')$ aus $\phi(l(b))$ durch Einfügen von $\phi(b_i)\,(\phi(b_i))^{-1}$, also $l(b') = \phi(l(b))$. Beim Prozess Ω_3 beginnt $l(b)$ gemäß Abbildung 3.11 mit dem Teilwort $(b_i^{-1}b_jb_i)^{-1}b_i^{-1}$, während $l(b')$ mit $(\phi(b_i))^{-1}(\phi(b_j))^{-1}$ beginnt und dann wie $\phi(l(b))$ weitergeht. Wegen

$$\phi\left((b_i^{-1}b_jb_i)^{-1}b_i^{-1}\right) = (\phi(b_i))^{-1}(\phi(b_j))^{-1}$$

folgt also auch in diesem Fall $l(b') = \phi(l(b))$. Der Satz folgt nun durch Induktion nach der Anzahl der Reidemeister-Prozesse. □

Übung 3.2.20

1. Bestimme das periphere System der beiden Kleeblattschlingen.

2. * Beweise mit Hilfe des peripheren Systems, dass die beiden Kleeblattschlingen nicht zueinander äquivalent sind.

Bemerkung 3.2.21 Die vorige Übung könnte man verallgemeinern und zeigen, dass kein nichttrivialer Torusknoten zu seinem Spiegelbild äquivalent ist; siehe [10, Theorem 3.29]. Ein Knoten, der zu seinem Spiegelbild äquivalent ist, heißt **amphichiral**. Torusknoten sind also nicht amphichiral.

Es sei $K \subset \mathbb{R}^3$ ein orientierter Knoten. Es entstehe $-K$ aus K durch Umkehren der Orientierung, und es entstehe K^* aus K durch Spiegelung an einer Ebene. Die Wahl der Ebene in der Definition von K^* spielt keine Rolle. Wenn also ein Diagramm $\mathcal{D}$ von K gegeben ist, wird man als Spiegelungsebene meist eine zur Projektionsrichtung senkrechte Ebene verwenden, es entsteht also ein Diagramm von K^* durch Vertauschen von Über- und Unterkreuzungen in $\mathcal{D}$. Aus dieser Beobachtung folgt leicht das nächste Lemma.

Lemma 3.2.22 *Es sei $(G, [m, l])$ das periphere System eines orientierten Knotens $K \subset \mathbb{R}^3$. Dann ist $(G, [m^{-1}, l^{-1}])$ das periphere System von $-K$, und $(G, [m^{-1}, l])$ ist das periphere System von K^*.* □

Nach dem folgenden Theorem von Waldhausen legt das periphere System einen orientierten Knoten bis auf Δ-Äquivalenz fest. Das periphere System erlaubt es also, alle knotentheoretischen Probleme auf rein algebraische Art zu lösen.

Theorem 3.2.23 (Waldhausen 1968) *Zwei Knoten $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^3$ mit peripherem System $(G_i, [m_i, l_i])$ (für $i = 1, 2$) sind zueinander Δ-Äquivalent genau dann wenn es einen Isomorphismus $\phi\colon G_1 \cong G_2$ gibt mit $\phi \times \phi([m_1, l_1]) = [m_2, l_2]$.* □

Einen Beweis findet man zum Beispiel in [10] Kapitel 3.C, in Verbindung mit [42, Theorem 6.2.2]. Wir werden hier keinen Beweis führen, obwohl die Beweishilfsmittel eng mit späteren Inhalten dieser Vorlesung verbunden sind: Der Beweis basiert auf der Untersuchung des *Knotenkomplements* (siehe den folgenden Abschnitt), welches außer im Fall des trivialen Knotens ein *Haken-Mannigfaltigkeit* ist (siehe Abschnitt 4.5).

3.3 Knotenkomplement

Nach Definition sind alle von uns betrachteten Verkettungen $K \subset \mathbb{R}^3$ zahm. Sie besitzen also eine offene reguläre Umgebung $U(L) \subset \mathbb{R}^3$. Wie wir aus Übung 1.4.5.3 wissen, können wir $\mathbb{R}^3$ durch Hinzufügen eines Punktes in S^3 umwandeln. Wir fassen daher $U(L)$ als Teilmenge von S^3 auf. Nach Lemma 2.2.2 ist $S^3 \setminus U(L)$ eine kompakte[3] 3-Mannigfaltigkeit, die wir mit M^L bezeichnen und **Komplement** oder **Außenraum** von L nennen.

Man sieht leicht, dass zwei zueinander äquivalente Verkettungen L_1, L_2 homöomorphe Außenräume besitzen ($L_1 \sim_\Delta L_2 \Rightarrow M^{L_1} \approx M^{L_2}$): Jeder Δ-Prozess bedeutet ja in S^3 nur eine Deformation des Außenraums einer Verkettung. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, wie man an Abbildung 3.12 sieht. Die beiden Verkettungen $L := K_1 \cup K_2$ und $\tilde{L} := K_1 \cup \tilde{K}_2$ sind nicht zueinander äquivalent,

[3] Deshalb arbeiten wir mit S^3 statt $\mathbb{R}^3$.

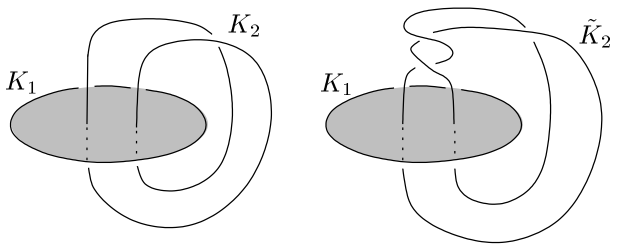


Abbildung 3.12: Homöomorphe Außenräume zweier nicht-äquivalenter Verkettungen

denn K_2 ist trivial, während $\tilde{K}_2$ äquivalent zu einer Kleeblattschlinge und damit nicht-trivial ist. Die Außenräume sind jedoch homöomorph: Man schneide M^L an der schattiert gezeichneten Scheibe auf, deren Rand auf $\partial U(K_1)$ entlang K_1 verläuft; dann dreht man die Oberseite des Schnittes um 360° gegen den Uhrzeigersinn, schließlich klebt man es an der ebenfalls schattiert gezeichneten Scheibe in $M^{\tilde{L}}$ wieder zusammen. Man überzeugt sich leicht, dass dadurch ein Homöomorphismus beschrieben wird, denn Punkte, die in M^L nahe beieinander liegen, werden durch das Aufschneiden, Drehen und Verkleben wieder auf nahe beieinanderliegende Punkte abgebildet. Im Hinblick auf dieses Beispiel ist es in hohem Maße erstaunlich, dass derartige Phänomene für die Außenräume von *Knoten* (Verkettungen mit nur einer Komponente) nicht auftreten. Der folgende Satz wurde bereits 1908 von Tietze vermutet, jedoch erst 1988 von Cameron McA. Gordon und John Luecke [18] bewiesen. Der Beweis ist sehr komplex, weshalb wir den Satz nur zitieren.

Theorem 3.3.1 (Gordon-Luecke 1988) *Zwei unorientierte Knoten sind genau dann zueinander äquivalent, wenn ihre Außenräume zueinander orientiert homöomorph sind.* □

Aus der algebraischen Topologie kennt man nun zahllose Invarianten, aus denen man über den Umweg des Knotenkomplements eine Invariante von Verkettungen machen kann. Dies möchten wir am Beispiel der Fundamentalgruppe tun (siehe Abschnitt 1.5). Es zeigt sich, dass wir dadurch eine andere Beschreibung der Knotengruppe erhalten. Doch dazu müssen wir noch weitere Resultate der algebraischen Topologie zitieren.

In Lemma 2.2.3 haben wir gezeigt, dass man Mannigfaltigkeiten miteinander verkleben kann, und zwar entlang abgeschlossener Untermannigfaltigkeiten ihrer Ränder. Diese Konstruktion wir oft benutzt, und sie lässt sich ziemlich direkt auf die Fundamentalgruppe übertragen. Es seien M_1, M_2 wegzusammenhängende kompakte 3-Mannigfaltigkeiten, und es seien $A_1 \subset \partial M_1$, $A_2 \subset \partial M_2$ abgeschlossene 2-dimensionale wegzusammenhängende Untermannigfaltigkeiten. Wir wählen Basispunkte $x_i \in A_i$, für $i = 1, 2$. Die Inklusionsabbildung $\iota_i\colon A_i \hookrightarrow M_i$ induziert Homomorphismen $(\iota_i)_*\colon \pi_1(A_i, x_i) \to \pi_1(M_i, x_i)$; diese sind im Allgemeinen nicht injektiv, wie man am Beispiel des Volltorus $\overline{B^2} \times S^1$ sieht. Es sei nun $\phi\colon A_1 \approx A_2$ ein Homöomorphismus. Dann ist nach Lemma 2.2.3 auch $M_1 \cup_\phi M_2$ eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit, mit Basispunkt $[x_1] = [x_2]$.

Satz 3.3.2 (Seifert, van Kampen)
Es seien $\pi_1(M_1, x_1) \cong \langle X_1, \ldots, X_m \mid R_1, \ldots, R_a \rangle$, $\pi_1(M_2, x_2) \cong \langle Y_1, \ldots, Y_n \mid S_1, \ldots, S_b \rangle$ Präsentationen der Fundamentalgruppen von M_1 und M_2. Ferner seien $Z_1, \ldots, Z_k$ Erzeugende von $\pi_1(A_1, x_1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\pi_1(M_1 \cup_\phi M_2, [x_1]) \quad \cong \quad & \langle X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n \mid R_1, \ldots, R_a, S_1, \ldots, S_b, \\ & (\iota_1)_*(Z_j) = (\iota_2 \circ \phi)_*(Z_j) \text{ für } j = 1, \ldots, k \rangle\end{aligned}$$

Einen Beweis findet man in einschlägigen Lehrbüchern der algebraischen Topologie. Der Satz gilt noch unter erheblich allgemeineren Voraussetzungen, allerdings trifft er nicht für *alle* möglichen Verklebungen von wegzusammenhängenden topologischen Räumen zu — eine Voraussetzung wie etwa stückweise Linearität ist nötig.

Beispiel 3.3.3

1. Wir betrachten die ∂-zusammenhängende Summe (siehe Beispiel 2.2.5) und lassen die Angabe der Basispunkte weg. Bei der ∂-zusammenhängenden Summe wird entlang eines Balles verklebt, und man sieht leicht, dass die Fundamentalgruppe von Bällen trivial ist. Damit vereinfacht sich der Satz von Seifert–van-Kampen zu der Aussage, dass

   $$\pi_1(M_1 \#_\partial M_2) \cong \langle X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n \mid R_1, \ldots, R_a, S_1, \ldots, S_b \rangle.$$

   Dies jedoch ist das freie Produkt $\pi_1(M_1) * \pi_1(M_2)$ der Fundamentalgruppen von M_1 und M_2.

2. In Übung 3.2.15 sollte unter anderem die Knotengruppe von Torusknoten $\mathfrak{t}(p,q)$ für teilerfremde ganze Zahlen p, q bestimmt werden. Im Prinzip könnte man sich ein Diagramm von $\mathfrak{t}(p,q)$ zeichnen, daran die Wirtinger-Präsentation von $G_{\mathfrak{t}(p,q)}$ ablesen, und sie so lange vereinfachen, bis sie die gewünschte Form hat. Da jedoch gemäß dem nachfolgenden Satz $G_{\mathfrak{t}(p,q)} \cong \pi_1(M^{\mathfrak{t}(p,q)})$ gilt, kann man die Aufgabe auch mit dem Satz von Seifert–van-Kampen lösen.

   Wir betrachten dazu Schleifen im Torus T^2. Wir stellen T^2 als Quadrat $Q := [0,1] \times [0,1]$ dar, bei dem gegenüberliegende Seiten miteinander verklebt werden. Dann sei $\alpha_{p,q}$ eine Gerade an 0×0 mit Steigung $\frac{q}{p}$, wobei die Gerade, wenn sie das Quadrat verlässt, auf der gegenüberliegenden Quadratseite fortgesetzt wird. Siehe Abbildung 3.13 links, fett gezeichnet, für $\alpha_{3,2}$. Wenn wir nun $T^2 = Q/\sim$ so in $\mathbb{R}^3$ einbetten, dass die beiden mit Pfeil bzw. Doppelpfeil markierten einfach geschlossenen Wege auf T^2 jeweils eine Scheibe in $\mathbb{R}^3$ beranden, so entsteht aus $\alpha_{p,q}$ der Torusknoten $\mathfrak{t}(p,q)$; siehe Abbildung 3.13 rechts. T^2 ist der Rand eines in $\mathbb{R}^3 \subset S^3$ eingebetteten Volltorus M_1 (=Henkelkörper vom Geschlecht 1), und auch $(S^3 \setminus M_1) \cup \partial M_1$ ist ein Volltorus. Man kann zeigen, dass die Fundamentalgruppen von M_1 und M_2 isomorph zu $\mathbb{Z}$ sind und erzeugt werden durch die mit einem Pfeil bzw. Doppelpfeil markierten Schleifen u bzw. v.

   Es sei $U(\mathfrak{t}(p,q))$ eine reguläre Umgebung von $\mathfrak{t}(p,q)$. Dann ist $A_1 := \partial M_1 \cap M^{\mathfrak{t}(p,q)}$ Annulus $[0,1] \times S^1$. Die Fundamentalgruppe von A_1 ist isomorph zu $\mathbb{Z}$ und wird erzeugt von einer Schleife z, die entlang $\mathfrak{t}(p,q)$ verläuft. Wie man sieht, ist z in M_1 zu u^p homotop, und in M_2 zu v^q homotop. Daher ist nach dem Satz von Seifert–van-Kampen $\pi_1(M^{\mathfrak{t}(p,q)}) \cong \langle u, v \mid u^p = v^q \rangle$.

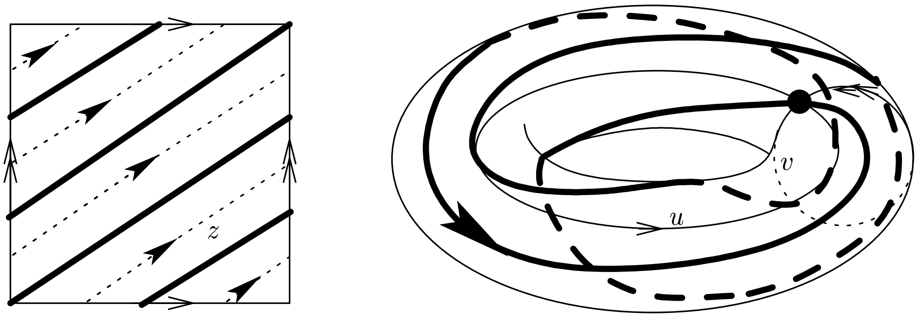


Abbildung 3.13: Torusknoten

Theorem 3.3.4 *Für orientierte Verkettungen* $L \subset \mathbb{R}^3 \subset S^3$ *gilt* $G_L \cong \pi_1(M^L)$.

Beweis Wir skizzieren den Beweis; mehr Details findet man in [10]. Zunächst sei bemerkt, dass sich die Fundamentalgruppe einer 3-Mannigfaltigkeit nicht ändert, wenn man aus ihr einen einzelnen Punkt entfernt. Insbesondere ist $\pi_1(M^L) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \cap M^L)$. Es sei $\mathcal{D} := \mathcal{D}(L,p)$ ein Diagramm von L. Es sei $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^3$ die Menge aller Punkte, die bzgl. p unterhalb von L liegen. Wenn wir also ein kartesisches Koordinatensystem x, y, z wählen, so dass p die Projektion auf die xy-Ebene ist, so gilt

$$\mathcal{Z} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \text{ Es gibt ein } z_0 \geq z, \text{ so dass } (x,y,z_0) \in L\}.$$

Dies ist in Abbildung 3.14 dargestellt (L ist fett gezeichnet). Der unter dem Urbild jedes Bogens $b_1, \ldots, b_n$ von $\mathcal{D}$ befindliche Teil von $\mathcal{Z}$ ist mit $B_1, \ldots, B_n$ bezeichnet. Den Doppelpunkten von $\mathcal{D}$ entsprechen Halbgeraden c_{ijk}, an denen sich die Flächen B_i, B_j, B_k treffen.

Wir wählen einen Basispunkt $x_0 \subset \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{Z}$. Der Raum $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{Z}$ ist zu $\mathbb{R}^3$ homöomorph; daher ist eine Schleife an x_0 in M^L homotop zum konstanten Weg, ihre Homotopieklasse in $\pi_1(M^L)$ ist also trivial. Es sei $\alpha\colon [0,1] \to M^L \cap \mathbb{R}^3$ eine Schleife an x_0. Jetzt wenden wir einige Techniken aus der algebraischen Topologie (wir können hier leider nicht beweisen, dass sie funktionieren): Wir können bis auf Homotopie von α voraussetzen, dass α keine der Halbgeraden c_{ijk} schneidet. Ebenso können wir voraussetzen, dass α jedes Flächenstücke B_i nur in endlich vielen Punkten schneidet, und dass an diesen Schnittpunkten $p(\alpha)$ von einer Seite des Bogens b_i auf die andere wechselt (also nicht etwa nur b_i berührt und dann wieder zurückläuft).

Wir betrachten nun Parameter $0 < t_1 < \cdots < t_k < 1$, so dass $\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_k)$ genau die Schnittpunkte von α mit $\mathcal{Z}$ sind. Es sei $i_1, \ldots, i_k$ so, dass $\alpha(t_m)$ in B_{i_m} liegt. Es sei $\epsilon_m := +1$, falls der (in das Diagramm projizierte) Weg $p(\alpha(t))$ in der Umgebung von t_m den Bogen b_{i_m} von rechts nach links kreuzt; entsprechend sei $\epsilon_m := -1$, falls er b_{i_m} von links nach rechts kreuzt. Wir erhalten so ein Wort $w(\alpha) := b_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots b_{i_k}^{\epsilon_k}$ in der freien Gruppe $\langle b_1, \ldots, b_n \mid \rangle$. In Abbildung 3.14 ist als Beispiel eine Schleife α eingezeichnet, der das Wort $b_i b_k^{-1} b_i$ entspricht. Weil $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{Z}$ zu $\mathbb{R}^3$ homöomorph ist, ist die Homotopieklasse von α *eindeutig* durch $w(\alpha)$ bestimmt — auch dies ist ein Standardargument der algebraischen

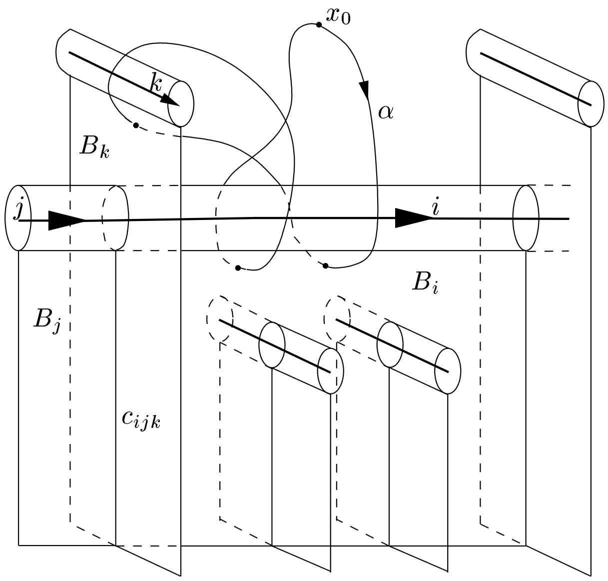


Abbildung 3.14: Beschreibung von Wegen in M^L

Topologie. Wir können also $b_1, \ldots, b_n$ als Erzeugende einer Präsentation von $\pi_1(M^L)$ ansehen.

Es bleibt nur noch zu untersuchen, welche Relationen in $\pi_1(M^L)$ zwischen den Erzeugenden $b_1, \ldots, b_n$ bestehen. Dazu untersuchen wir, wie sich $w(\alpha)$ verändert, wenn α durch eine Homotopie in M^L verändert wird. Nach Definition wird $w(\alpha)$ nur geändert, wenn durch die Homotopie neue Schnittpunkte von α mit den Flächenstücken $B_1, \ldots, B_n$ entstehen, bzw. alte Schnittpunkte verschwinden. Zwei mögliche Änderungen sind in Abbildung 3.15 dargestellt: In der Abbildung oben wird ein Teil von α durch B_i geschoben, wodurch das Wort $w(\alpha)$ um $b_i b_i^{-1}$ geändert wird; in der Abbildung unten wird α durch c_{ijk} geschoben, wodurch $w(\alpha)$ um $b_j b_k b_i^{-1} b_k^{-1}$ geändert wird (oder $b_j b_k^{-1} b_i^{-1} b_k$, falls der Bogen b_k anders orientiert ist). Weitere Standardargumente der algebraischen Topologie stellen sicher, dass sich durch mehrfaches Anwenden dieser beiden Änderungstypen *alle* möglichen Änderungen $\alpha \cap \mathcal{Z}$ unter einer Homotopie von α in M^L beschreiben lassen. Das heißt, zwei Schleifen α, β an x_0 sind zueinander in M^L homotop, genau dann wenn $w(\alpha)$ in $w(\beta)$ übergeht durch Anwendung von Relationen $b_i b_i^{-1}$ für $i = 1, \ldots n$ (diese Relation gilt in jeder Gruppe) sowie $b_j b_k b_i^{-1} b_k^{-1}$ bzw. $b_j b_k^{-1} b_i^{-1} b_k$ für jeden Doppelpunkt von $\mathcal{D}$. Das heißt aber, dass die Wirtinger-Präsentation nicht nur eine Präsentation von G_L, sondern auch von $\pi_1(M^L)$ ist. $\square$

Nach dem vorigen Theorem ist $\pi_1(M^L)$, also eine topologisch definierte Invariante, nichts anderes als die Knotengruppe G_L, die wir in vorigen Abschnitten auf rein kombinatorisch-algebraische Art definierten. Wir werden in Abschnitt 4.1 auch noch andeuten, wie man das periphere System in $\pi_1(M^L)$ wiederfinden kann. Viele weitere Invarianten von Knoten und Verkettungen lassen sich aus der Knotengruppe ableiten, etwa die Alexander-Moduln. Doch weil das

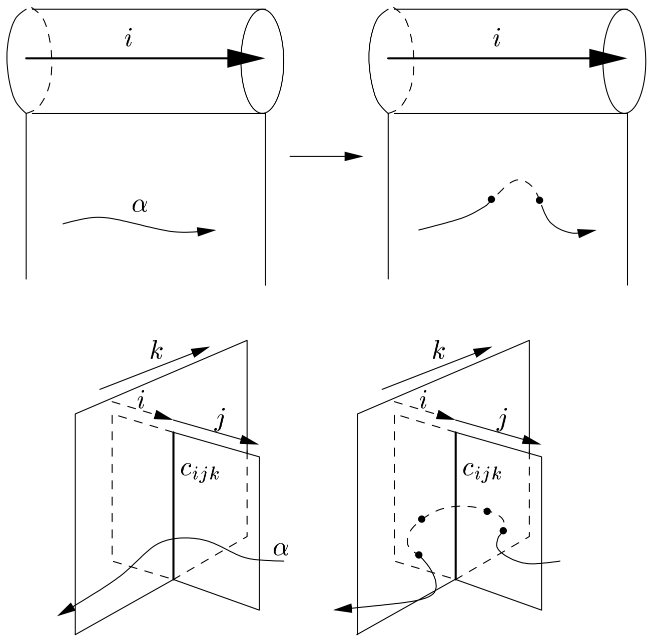


Abbildung 3.15: Änderung des zu α gehörenden Wortes

Thema der Vorlesung „Dreidimensionale Topologie“ und nicht „Knotentheorie“ ist, werden wir auf die Beschreibung solcher Invarianten verzichten.

3.4 Zöpfe

3.4.1 Die Zopfgruppen

Eine weitere Herangehensweise an die Knotentheorie hat sich bereits selbst zu einem eigenständigen Gebiet zwischen Topologie und Gruppentheorie entwickelt: die Theorie der Zöpfe.

Es seien $(d_1, t_1), (d_2, t_2)$ Punkte in $B^2 \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Die Strecke mit Anfangspunkt (d_1, t_1) und Endpunkt (d_2, t_2) heißt *fallend*, falls $t_1 > t_2$. Ein *fallender Streckenzug* in $B^2 \times [0,1]$ ist ein aus fallenden Strecken bestehender Streckenzug. Wir wählen n Punkte $x_1, \ldots, x_n$ in der Kreisscheibe B^2.

Definition 3.4.1 *Ein **Zopf** mit n Fäden ist eine Vereinigung von n paarweise disjunkten fallenden Streckenzügen, welche $\{x_1, \ldots, x_n\} \times \{1\}$ mit $\{x_1, \ldots, x_n\} \times \{0\}$ verbinden.*

Wie bei Knoten lassen sich Diagramme bezüglich einer Projektionsrichtung definieren, mit denselben Einschränkungen bzgl. der Doppelpunkte. Man möchte (und kann!) nur mit Diagrammen bezüglich Projektionsrichtungen arbeiten, die auf $\{0\} \times [0,1]$ senkrecht stehen; dadurch wird das monotone Fallen der Streckenzüge auch im Diagramm deutlich. Ebenso wie bei Knoten interessiert uns nicht der Zopf als solcher, sondern Äquivalenzklassen von Zöpfen. Die Äquivalenz von Zöpfen mit n Fäden wird durch folgende zwei Typen von Prozessen erzeugt:

1. **Horizontale Δ-Prozesse**. Das sind solche Δ-Prozesse, deren Ergebnis wieder ein Zopf mit n Fäden ist.

2. **Höhenskalierung**. Dazu sei $\phi\colon [0,1] \to [0,1]$ stückweise linear und bijektiv, mit $\phi(0) = 0$. Dann sei $\tilde{\phi}\colon B^2 \times [0,1] \to B^2 \times [0,1]$ gegeben durch $\tilde{\phi}(p,t) := (p, \phi(t))$. Wenn z ein Zopf ist, dann ist $\tilde{\phi}(z)$ ebenfalls ein Zopf, und der Übergang von z nach $\tilde{\phi}(z)$ heißt Höhenskalierung.

Man kann zeigen, dass dieselben Äquivalenzklassen von Zöpfen entstehen, wenn man auf die Verwendung der Höhenskalierung verzichtet. Ebensogut könnte man alle Δ-Prozesse zulassen, die die beiden Mengen $\{x_1, \ldots, x_n\} \times \{1\}$ und $\{x_1, \ldots, x_n\} \times \{0\}$ punktweise fest lassen; in diesem Fall könnte ein „Zwischenstadium“ einer Äquivalenzumformung von Zöpfen nicht-fallende Streckenzüge enthalten, wäre also kein Zopf. Mit solchen technischen Details wollen wir uns jedoch nicht aufhalten.

Für zwei Zöpfe mit n Fäden können wir eine Multiplikation definieren. Dazu seien $\psi_1, \psi_2\colon B^2 \times [0,1] \to B^2 \times [0,1]$ gegeben durch $\psi_1(d,t) := (d, \frac{1+t}{2})$ und $\psi_2(d,t) := (d, \frac{t}{2})$. Die Abbildungen $\psi_{1/2}$ stauchen den Zylinder $B^2 \times [0,1]$ also um den Faktor 2 in die obere/untere Hälfte des Zylinders.

Definition 3.4.2 *Für zwei Zöpfe z_1, z_2 mit n Fäden ist das Produkt $z_1 z_2 := \psi_1(z_1) \cup \psi_2(z_2)$.*

Mit anderen Worten, die beiden Zöpfe z_1 und z_2 werden untereinandergesetzt (und so gestaucht, dass sie in $B^2 \times [0,1]$ passen), wobei jeweils ein fallender Streckenzug aus z_2 sich an einen solchen aus z_1 anschließt. Der **triviale Zopf** mit n Fäden verbindet jeweils $x_i \times 1$ mit $x_i \times 0$ durch eine vertikale Strecke; wir bezeichnen diesen Zopf mit 1_n.

Satz 3.4.3 (und Definition) *Äquivalenz von Zöpfen ist eine Kongruenzrelation bezüglich der Multiplikation von Zöpfen. Die Menge $\mathcal{Z}_n$ der Äquivalenzklassen von Zöpfen mit n Fäden wird durch die Multiplikation von Zöpfen zu einer Gruppe, die n-te* ***Zopfgruppe****. Das neutrale Element dieser Gruppe ist der triviale Zopf 1_n. Es gilt ferner*

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_n \cong \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \quad | \quad & \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \textit{ für } |i-j| \geq 2, \\ & \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \textit{ für } i = 1, \ldots, n-2 \rangle \end{aligned}$$

Die in der zweiten Zeile aufgeführte Relation heißt ***Zopfrelation****.*

Beweis Es ist offensichtlich, dass horizontale Δ-Prozesse bzw. Höhenskalierung an Zöpfen z_1, z_2 auf ebensolche Prozesse im Produkt $z_1 z_2$ führen. Das Produkt von Zöpfen ist bis auf Höhenskalierung assoziativ: Im Produkt $(z_1 z_2) z_3$ treten gestauchte Kopien von z_1 in $B^2 \times [\frac{3}{4}, 1]$, von z_2 in $B^2 \times [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ und von z_3 in $B^2 \times [0, \frac{1}{2}]$ auf; durch Höhenskalierung kann man sie nach $B^2 \times [\frac{1}{2}, 1]$, $B^2 \times [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ bzw. $B^2 \times [o, \frac{1}{4}]$ bringen, was dem Produkt $z_1(z_2 z_3)$ entspricht. Offenbar ist 1_n bis auf Höhenskalierung ein neutrales Element der Multiplikation von Zöpfen mit n Fäden. Damit ist zunächst gezeigt, dass $\mathcal{Z}_n$ ein Monoid ist.

Es sei z ein Zopf mit n Fäden und $\mathcal{D}$ ein Diagramm dieses Zopfes. Durch Δ-Prozesse können wir erreichen, dass die Ecken der Streckenzüge und sowie die Doppelpunkte von $\mathcal{D}$ paarweise verschiedene Höhen haben. Wenn ein Diagramm eines Zopfes k Doppelpunkte aufweist, so kann man den Zopf offenbar als Produkt von k „Elementarzöpfen“ beschreiben, bei denen jeweils genau ein Paar benachbarter Fäden gekreuzt wird und alle anderen Fäden vertikal verlaufen; wenn der i-te Faden über (bzw. unter) den $(i+1)$-ten Faden kreuzt, bezeichnen wir diesen Zopf mit σ_i (bzw. σ_i^{-1}).[4]

Man sieht in Abbildung 3.16, dass σ_i^{-1} bis auf zwei horizontale Δ-Prozesse

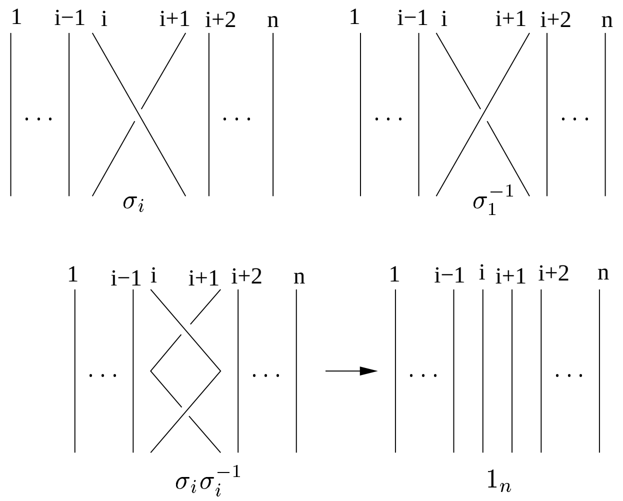


Abbildung 3.16: Erzeugende der Zopfgruppe

invers zu σ_i ist. Damit ist $\mathcal{Z}_n$ eine von $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ erzeugte Gruppe, und es bleibt nur noch zu zeigen, dass die angegebenen Relationen zur Beschreibung von $\mathcal{Z}_n$ geeignet sind. Offenbar ändert sich ein Wort in $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ nicht, wenn eine Höhenskalierung ausgeführt wird. Wir betrachten nun horizontale Δ-Prozesse entlang eines Dreiecks $\langle ABC \rangle$, ausgeführt an einem Zopf z mit $\langle AB \rangle \subset z$. Durch Unterteilung des Dreiecks können wir erreichen, dass sich das Diagramm von z auf eine der in Abbildung 3.17 angegebene Arten (bis auf Wahl des Exponenten ± 1 der σ_i, σ_{i+1}) ändert. Im ersten Fall ändert sich das z zugeordnete Wort

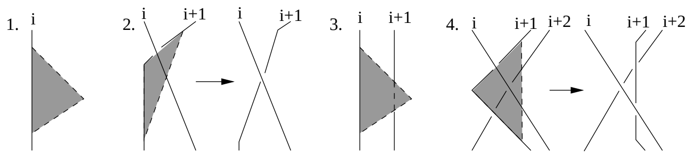


Abbildung 3.17: Wirkung horizontaler Δ-Prozesse

nicht. Im zweiten Fall könnte ein Teilwort $\sigma_i \sigma_j^{\pm 1}$ in $\sigma_j^{\pm 1} \sigma_i$ übergehen, falls an der Kreuzung $\sigma_j^{\pm 1}$ weder der i-te noch der $(i+1)$-te Faden beteiligt sind; dies ist genau dann der Fall, wenn $|j - i| \geq 2$. Im dritten Fall wird das Teilwort $\sigma_i \sigma_i^{-1}$ eingefügt, was am Gruppenelement nichts ändert. Im letzten Fall wird ein Teilwort $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i$ durch $\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ ersetzt. □

[4] Natürlich ist es Konvention, ob σ_i eine *Über*- oder *Unter*kreuzung des i-ten Fadens bezeichnet — manche Autoren benutzen die andere Konvention.

Bemerkung 3.4.4 Die Zopfgruppen werden häufig nach Emil Artin benannt. Im Englischen heißt Zopfgruppe *braid group*, im Französischen *groupe de tresses*. Trotz der ähnlichen Wortbildung sind die Knotengruppen und die Zopfgruppen völlig unterschiedlich konstruiert. Bei ersteren handelt es sich um eine Gruppe, die einer Klasse von Verkettungen zugeordnet ist, bei letzteren bilden Klassen von Zöpfen selbst eine Gruppe.

Übung 3.4.5 Man beweise (am besten graphisch!), dass der Zopf

$$z_n := \left(\prod_{i=1}^{n-1} \sigma_i\right)^n$$

im Zentrum von $\mathcal{Z}_n$ liegt. Übrigens ist für $n \geq 3$ das Zentrum von $\mathcal{Z}_n$ durch z_n erzeugt und isomorph zu $\mathbb{Z}$.

3.4.2 Der Satz von Markov und das Jones-Polynom

Offenbar besteht eine große Ähnlichkeit zwischen Zöpfen und Verkettungen. So entspricht die Zopfrelation offenbar dem Reidemeisterprozess Ω_3, während $\sigma_i\sigma_i^{-1} = 1$ dem Prozess Ω_2 entspricht. Diese Ähnlichkeiten sind jedoch nur oberflächlich. So ist zum Beispiel schon lange bekannt, wie man algorithmisch erkennen kann, ob zwei Zöpfe äquivalent sind (das ist das **Wortproblem** der Zopfgruppen). Man hat inzwischen sogar herausgefunden, dass dies durch einen endlichen Automaten möglich ist [55], was insbesondere bedeutet, dass das Wortproblem der Zopfgruppe in polynomialer Zeit lösbar ist. Von derartigen Erfolgen ist man im Falle von Knoten weit entfernt. Zwar kennt man einen Algorithmus, der erkennt, ob zwei Knoten zueinander äquivalent sind, doch ist dieser von eher theoretischer Natur, weil seine Laufzeit weit mehr als exponentiell mit der Anzahl der Überkreuzungen von Knotendiagrammen steigt.

Der Grund für diese Unterschiede liegt in dem so harmlos wirkenden Reidemeister-Prozess Ω_1, wie der **Satz von Markov** zeigt, den wir nun vorstellen wollen. Aus jedem Zopf $z \in \mathcal{Z}_n$ lässt sich eine Verkettung $\hat{z}$ gewinnen, indem man n Streckenzüge in $\mathbb{R}^3 \setminus B^2 \times [0,1]$ hinzufügt, welche jeweils $(x_i, 0)$ mit $(x_i, 1)$ verbinden und die sich überschneidungsfrei in einem Diagramm von z abbilden lassen; siehe Abbildung 3.18 links oben. Man nennt $\hat{z}$ **geschlossener Zopf**. Zwei verschiedene Zöpfe können zwei zueinander (als Verkettungen!) Δ-äquivalente geschlossene Zöpfe ergeben. So ist etwa der geschlossene Zopf in Abbildung 3.18 rechts oben durch einen Ω_1-Prozess aus $\hat{z}$ entstanden. Man sieht in Abbildung 3.18 unten, dass für zwei Zöpfe $z_1, z_2 \in \mathcal{Z}_n$ gilt $\widehat{z_1 z_2} \sim_\Delta \widehat{z_2 z_1}$.

Die in Abbildung 3.18 gezeigten Sachverhalte lassen sich auch algebraisch beschreiben. Die n-te Zopfgruppe $\mathcal{Z}_n$ ist in natürlicher Weise in $\mathcal{Z}_{n+1}$ eingebettet, nämlich durch den injektiven Homomorphismus $\iota_n \colon \mathcal{Z}_n \hookrightarrow \mathcal{Z}_{n+1}$, $\iota_n(\sigma_i) := \sigma_i \in \mathcal{Z}_{n+1}$ für $i = 1, \ldots, n-1$. Mit dieser Notation ist der in Abbildung 3.18 rechts oben gezeigte geschlossene Zopf aus $\iota_n(z)\sigma_n$ entstanden. Der folgende Satz von Markov besagt, dass die in Abbildung 3.18 gezeigten Änderungen bereits ausreichen, um die gesamte Knotentheorie mit Hilfe von Zöpfen umzuformulieren.

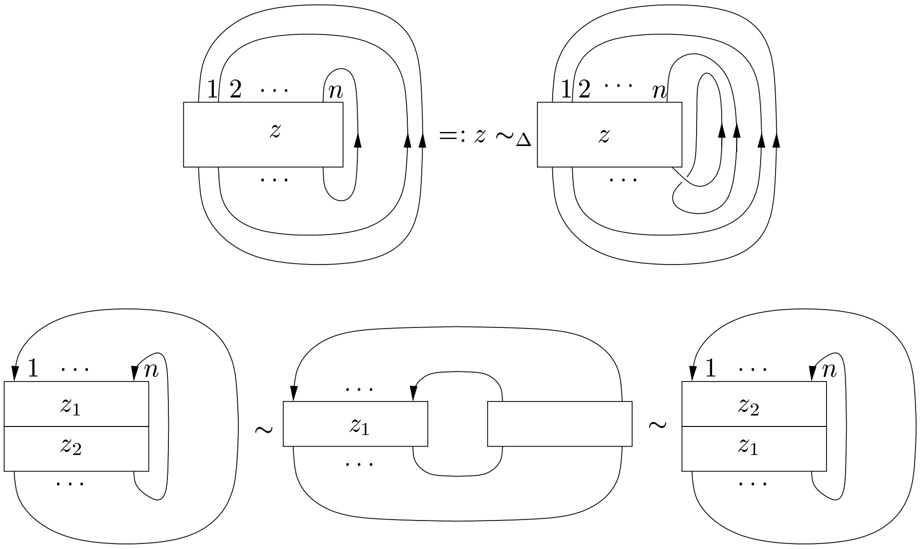


Abbildung 3.18: Geschlossene Zöpfe

Theorem 3.4.6 (Markov) *Jede Verkettung lässt sich als geschlossener Zopf darstellen. Zwei geschlossene Zöpfe $\widehat{z_1}, \widehat{z_2}$ sind genau dann als Verkettung Δ-äquivalent, wenn z_1 in z_2 durch eine endliche Kette der folgenden Umformungsprozesse und ihrer Inversen übergeht:*

1. *$z \mapsto \tilde{z}z\tilde{z}^{-1}$ für $z, \tilde{z} \in \mathcal{Z}_n$ (**Konjugation**).*

2. *$z \mapsto \iota_n(z)\sigma_n^{\pm 1}$ für $z \in \mathcal{Z}_n$ (**Markov-Prozess**).*

Einen modernen und gut verständlichen Beweis dieses Theorems findet man in [37], nebst einer Verallgemeinerung auf Zöpfe in $F \times I$ für 2-Mannigfaltigkeiten F verschieden von B^2. Da auch das Transformationsproblem („Sind zwei gegebene Worte in der Gruppe zueinander konjugiert?“) in $\mathcal{Z}_n$ eine seit langem bekannte algorithmische Lösung besitzt, steckt das eigentliche Problem der Knotentheorie offenbar im Markov-Prozess, also in dem Reidemeister-Prozess Ω_1.

Neuere Entwicklungen der Knotentheorie („Quanteninvarianten“) basieren auf Darstellungen der Zopfgruppen. Dazu betrachtet man Homomorphismen von $\mathcal{Z}_n$ in geeignete Gruppen von Matrizen über kommutativen Ringen, meistens Polynomringen. Jedem Zopf ist also eine Matrix zugeordnet, und man kann so etwas ähnliches wie die Spur dieser Matrix berechnen. Wenn man das geschickt macht, erhält man eine Invariante des *geschlossenen* Zopfes. Diese grobe Skizze wollen wir am Beispiel des *Jones-Polynoms* näher betrachten. Dazu benötigen wir das Tensorprodukt von Vektorräumen und linearen Abbildungen (siehe Anhang A).

Es sei $R := \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ der Ring der Polynome in $q^{\pm 1}$ mit ganzzahligen Koeffizienten (**Laurent-Polynome**). Wir betrachten den 2-dimensionalen R-Modul $V := R^2$ mit Basis v_1, v_2 und definieren $V_n := V^{\otimes n}$. Wir möchten einen Gruppenhomomorphismus $\rho_n\colon \mathcal{Z}_n \to \mathrm{Hom}_R(V_n, V_n)$ konstruieren. Dazu definieren wir eine R-lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} c\colon\ V_2 = V \otimes V & \to & V \otimes V = V_2 \\ v_1 \otimes v_1 & \mapsto & q^{-1}\, v_1 \otimes v_1 \\ v_1 \otimes v_2 & \mapsto & q^{-2}\, v_2 \otimes v_1 \\ v_2 \otimes v_1 & \mapsto & q^{-2}\, v_1 \otimes v_2 + q^{-2}(q - q^{-1})\, v_2 \otimes v_1 \\ v_2 \otimes v_2 & \mapsto & q^{-1}\, v_2 \otimes v_2. \end{array}$$

Bezüglich der Basis $v_1 \otimes v_1, v_1 \otimes v_2, v_2 \otimes v_1, v_2 \otimes v_2$ von V_2 hat c also die Matrixdarstellung $q^{-2}\begin{pmatrix} q & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & q-q^{-1} & \\ & & & q \end{pmatrix}$. Die Abbildung c ist invertierbar, also ein Isomorphismus. Für die Erzeugenden $\{\sigma_i\}$ der Zopfgruppe $\mathcal{Z}_n$ definieren wir $\rho_n(\sigma_i) := Id_{V_{i-1}} \otimes c \otimes Id_{V_{n-i-1}} \in End_{\mathbb{R}}(V_n)$. Es ist also

$$\rho_n(\sigma_i)(v_{k_1} \otimes \dots v_{k_n}) = v_{k_1} \otimes \dots v_{k_{i-1}} \otimes c(v_{k_i} \otimes v_{k_{i+1}}) \otimes v_{k_{i+2}} \otimes \dots \otimes v_{k_n}.$$

Man kann durch direktes Nachrechnen zeigen (siehe [26] S. 171f), dass c die Zopfrelation erfüllt:

$$(c \otimes Id_V) \circ (Id_V \otimes c) \circ (c \otimes Id_V) = (Id_V \otimes c) \circ (c \otimes Id_V)(c \otimes Id_V),$$

was $\rho_n(\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i) = \rho_n(\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1})$ nach sich zieht. Ferner gilt für $|i - j| \geq 2$ und oBdA $i < j$:

$$\begin{array}{rcl} \rho_n(\sigma_i\sigma_j) & = & \left(Id_{V_{i-1}} \otimes c \otimes Id_{V_{n-i-1}}\right) \circ \left(Id_{V_{j-1}} \otimes c \otimes Id_{V_{n-j-1}}\right) \\ & = & Id_{V_{i-1}} \otimes c \otimes Id_{V_{j-i-1}} \otimes c \otimes Id_{V_{n-j-1}} \\ & = & \left(Id_{V_{j-1}} \otimes c \otimes Id_{V_{n-j-1}}\right) \circ \left(Id_{V_{i-1}} \otimes c \otimes Id_{V_{n-i-1}}\right) \\ & = & \rho_n(\sigma_j\sigma_i). \end{array}$$

Es gelten also die Relationen der in Satz 3.4.3 angegebenen Präsentation von $\mathcal{Z}_n$, und damit ist ρ_n ein Gruppenhomomorphismus; man nennt dies auch eine **Darstellung** von $\mathcal{Z}_n$.

Aus dieser Darstellung der Zopfgruppen werden wir nun noch eine Invariante für Verkettungen machen. Dazu sei $\mu\colon V \to V$ ein Isomorphismus, gegeben durch $\mu(v_1) := qv_1$ und $\mu(v_2) := q^{-1}v_2$, und wir definieren

$$\begin{array}{rrcl} Tr_n\colon & Hom_R(V_n, V_n) & \to & R \\ & \alpha & \mapsto & tr(\mu^{\otimes n} \circ \alpha). \end{array}$$

Dabei bezeichnet $tr(\cdot)$ die gewöhnliche Spur von Abbildungen (also die Summe der Diagonalelemente einer Matrixdarstellung der Abbildung). Man nennt Tr_n auch eine **Quantenspur** oder **Markov-Spur**. Für einen Zopf $b \in \mathcal{Z}_n$ definieren das **Jones-Polynom** des geschlossenen Zopfes $\hat{b}$ als $\theta(\hat{b}) := Tr_n(\rho_n(b))$. Genauer gesagt müsste man noch eine Variablentransformation durchführen, um das Jones-Polynom zu gewinnen, aber das ist nicht von Belang.

Satz 3.4.7 *Das Jones-Polynom ist eine Invariante von Verkettungen.*

Beweis Wir wissen bereits, dass ρ_n eine Darstellung der n-ten Zopfgruppe ist, für alle n. Nach dem Satz von Markov (Theorem 3.4.6) bleibt also noch $\theta(\widehat{b_1 b_2}) = \theta(\widehat{b_2 b_1})$ sowie $\theta(\hat{b}) = \theta(\widehat{\iota_n(b)\sigma_n^{\pm 1}})$ für alle $b, b_1, b_2 \in \mathcal{Z}_n$ zu zeigen.

Wir zeigen $(\mu \otimes \mu) \circ c = c \circ (\mu \otimes \mu)$: Offenbar ist $(\mu \otimes \mu) \circ c(v_1 \otimes v_1) = c \circ (\mu \otimes \mu)(v_1 \otimes v_1) = q^2 c(v_1 \otimes v_1)$ und $(\mu \otimes \mu) \circ c(v_2 \otimes v_2) = c \circ (\mu \otimes \mu)(v_2 \otimes v_2) = q^{-2} c(v_2 \otimes v_2)$. Es gilt $\mu \otimes \mu(v_1 \otimes v_2) = v_1 \otimes v_2$ und analog für $v_2 \otimes v_1$. Weil die „gemischten Terme" $c(v_1 \otimes v_2)$ und $c(v_2 \otimes v_1)$ jeweils Linearkombinationen von $v_1 \otimes v_2$ und $v_2 \otimes v_1$ sind, gilt daher $(\mu \otimes \mu) \circ c(v_1 \otimes v_2) = c \circ (\mu \otimes \mu)(v_1 \otimes v_2) = c(v_1 \otimes v_2)$ und analog für $v_2 \otimes v_1$. Es folgt $\rho_n(\sigma_i) \circ \mu^{\otimes n} = \mu^{\otimes n} \circ \rho_n(\sigma_i)$ und damit

$$\begin{aligned} Tr_n(\rho_n(b_1 b_2)) &= tr(\rho_n(b_1) \circ \rho_n(b_2) \circ \mu^{\otimes m}) \\ &= tr(\rho_n(b_1) \circ \mu^{\otimes m} \circ \rho_n(b_2)) \\ &= tr(\rho_n(b_2) \circ \rho_n(b_1) \circ \mu^{\otimes m}) \quad \text{(Spureigenschaft!)} \\ &= Tr_n(\rho_n(b_2 b_1)) \end{aligned}$$

Wir haben also die Spureigenschaft $Tr_n(\rho_n(b_1 b_2)) = Tr_n(\rho_n(b_2 b_1))$ durch Verwendung der entsprechenden Eigenschaft der *gewöhnlichen* Spur von Matrizen und durch die Vertauschbarkeit von $\mu \otimes \mu$ mit c nachgewiesen.

Wir berechnen $Tr_n(\rho_{n+1}(\iota_n(b)\sigma_n^{\pm 1}))$. Als Abkürzung schreiben wir $v_{i_1,\ldots,i_n}$ statt $v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}$. Ferner sei $a_{k_1 \ldots k_n}^{i_1 \ldots i_n} \in R$ definiert durch

$$\rho_n(b) \circ \mu^{\otimes n}(v_{k_1,\ldots,k_n}) =: a_{k_1 \ldots k_n}^{i_1 \ldots i_n} \; v_{i_1,\ldots,i_n}$$

mit der Summenkonvention für Tensoren (siehe Anhang A). Dann gilt also $\theta(\hat{b}) = tr(\rho_n(b) \circ \mu^{\otimes n}) = a_{i_1 \ldots i_n}^{i_1 \ldots i_n}$ (wieder mit Summenkonvention). In der folgenden Berechnung von $Tr_n(\rho_{n+1}(\iota_n(b)\sigma_n^{\pm 1}))$ unterscheiden wir vier Typen von Summanden, nämlich die zu

$$v_{i_1,\ldots,i_{n-1},1,1}, \quad v_{i_1,\ldots,i_{n-1},1,2}, \quad v_{i_1,\ldots,i_{n-1},2,1} \text{ und } v_{i_1,\ldots,i_{n-1},2,2}$$

gehörenden Diagonalterme (in dieser Reihenfolge). In den Summanden steht zunächst der Faktor, der durch Anwendung von $\rho_{n+1}(\iota_n(b))$ entsteht, dann der von $\rho_{n+1}(\sigma_n)$, und schließlich der Faktor, der durch Anwendung von μ auf den $(n+1)$-ten Faden entsteht.

$$\begin{aligned} Tr_n(\rho_{n+1}(\iota_n(b)\sigma_n^{\pm 1}) &= a_{i_1 \ldots i_{n-1} 1}^{i_1 \ldots i_{n-1} 1} \cdot q^{-1} \cdot q \\ &\quad + 0 \quad (\text{stammt von } v_{i_1,\ldots,i_{n-1},1,2}) \\ &\quad + a_{i_1 \ldots i_{n-1} 2}^{i_1 \ldots i_{n-1} 2} \cdot (q^{-2}(q - q^{-1})) \cdot q \\ &\quad + a_{i_1 \ldots i_{n-1} 2}^{i_1 \ldots i_{n-1} 2} \cdot q^{-1} \cdot q^{-1} \\ &= a_{i_1 \ldots i_{n-1} 1}^{i_1 \ldots i_{n-1} 1} + a_{i_1 \ldots i_{n-1} 2}^{i_1 \ldots i_{n-1} 2} \\ &= Tr_n(\rho_n(b)). \end{aligned}$$

Aus dem Satz von Markov folgt damit, dass das Jones-Polynom $\theta(\cdot)$ eine Invariante von Verkettungen ist. $\square$

Die Abbildungen c und μ scheinen vom Himmel zu fallen; jedoch steckt dahinter die inzwischen sehr weit ausgebaute Theorie der **Quantengruppen**, die in den letzten Jahrzehnten ein sehr aktives Forschungsgebiet war; siehe zum Beispiel [26] und [71].

Wie man sieht, ist der Nachweis der Invarianz des Jones-Polynoms recht kompliziert. Doch erfreulicherweise ist die *Berechnung* des Polynoms aufgrund des folgenden Lemmas viel leichter.

Lemma 3.4.8 (und Definition) *Es seien* $b_1, b_2 \in \mathcal{Z}_n$*, und es sei* $b_+ := b_1\sigma_i b_2$*,* $b_- := b_1\sigma_i^{-1}b_2$ *und* $b_0 := b_1 b_2$*. Dann gilt*

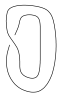
$$q^2\theta(\widehat{b_+}) - q^{-2}\theta(\widehat{b_-}) = (q - q^{-1})\theta(\widehat{b_0}).$$

Man nennt b_+, b_-, b_0 *ein* ***Skein-Tripel****.*

Beweis Es genügt zu zeigen, dass $q^2c - q^{-2}c^{-1} = (q-q^{-1})\, Id_{V_2}$. Man rechnet leicht nach, dass c^{-1} durch die Matrix $q^2\begin{pmatrix} q^{-1} & & & \\ & -q+q^{-1} & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & q^{-1}\end{pmatrix}$ beschrieben wird, und daraus folgt die Behauptung. $\square$

Beispiel 3.4.9 Die im vorigen Lemma bewiesene Gleichung heißt **Skein-Relation**. Wir berechnen mit ihrer Hilfe das Jones-Polynom von Hopf-Link und Kleeblattschlinge. Wir arbeiten in vier Schritten.

1. Die triviale Verkettung $\widehat{1_n}$ hat das Jones-Polynom $\theta(\widehat{1_n}) = tr(\mu^{\otimes n}) = (tr(\mu))^n = (q+q^{-1})^n$.

2. Wir betrachten $\sigma_1 \in \mathcal{Z}_2$. Offenbar ist $\widehat{\sigma_1} =$  äquivalent zum trivialen Knoten, also ist $\theta(\widehat{\sigma_1}) = q + q^{-1}$.

3. Wir betrachten das Skein-Tripel $b_+ = \sigma_1^2$, $b_- = \sigma_1\sigma_1^{-1} = 1_2$, $b_0 = \sigma_1$. Dann gilt
$$\theta(\widehat{b_+}) = q^{-2}\left(q^{-2}\theta(\widehat{b_-}) + (q-q^{-1})\theta(\widehat{b_0})\right),$$
als $\theta(\widehat{b_+}) = 1 + q^{-2} + q^{-4} + q^{-6}$.

   Der geeignet orientierte Hopf-Link ist äquivalent zu $\widehat{b_+}$; wenn man die Orientierung einer Komponente umkehrt, die andere Komponente festhält, so erhält man hingegen $\widehat{b_+^{-1}}$. Man erkennt an der obigen Rechnung, dass $\theta(\widehat{b_+^{-1}}) = 1 + q^2 + q^4 + q^6$. Der Hopf-Link ist also nicht-trivial, und es gibt zwei nicht-äquivalente Möglichkeiten, den Hopf-Link zu orientieren. Das konnte übrigens schon Gauß mit seiner Verkettungszahl beweisen.

4. Zum Schluss betrachten wir das Skein-Tripel $z_+ = \sigma_1^3$, $z_- = \sigma_1\sigma_1^{-1}\sigma_1 = \sigma_1$, $z_0 = \sigma_1^2$. Wir erhalten
$$\theta(\widehat{z_+}) = q^{-2}\left(q^{-2}\theta(\widehat{z_-}) + (q-q^{-1})\theta(\widehat{z_0})\right) = q^{-1} + q^{-3} + q^{-5} - q^{-9}.$$

   Das Spiegelbild von $\widehat{z_+}$ ist $\widehat{z_+^{-1}}$, und dieses hat das Jones-Polynom $q + q^3 + q^5 - q^9$.

   Schlussfolgerung: Die geschlossenen Zöpfe $\widehat{z_+}$ und $\widehat{z_+^{-1}}$ sind die beiden Kleeblattschlingen. Weil ihre Jones-Polynome nicht mit dem ihres jeweiligen Spiegelbilds übereinstimmen, sind sie nicht amphichiral, d.h. nicht zu ihrem Spiegelbild äquivalent. Das kann man natürlich auch wie in Übung 3.2.20 unter Verwendung des peripheren Systems beweisen.

> Doch das ist aufgrund der nötigen gruppentheoretischen Hilfsmittel sehr aufwändig. Das Jones-Polynom war die erste Verkettungsinvariante, mit der man auf einfache Weise nicht-amphichirale Knoten erkennen kann.

Das Jones-Polynom findet übrigens sogar Anwendungen in der Physik: Manche Theorien der Quantengravitation lassen sich mittels des Jones-Polynoms lösen [9]. Es gibt noch andere Möglichkeiten, das Jones-Polynom zu definieren, und diese wiederum steht in Beziehung zur statistischen Mechanik (*Ising-Modell* des Magnetismus [27]).

Der Ansatz, Zöpfe mit Hilfe von Darstellungen zu untersuchen, ist übrigens keine Einschränkung: Man weiß seit wenigen Jahren, dass Zopfgruppen linear sind, dass es also eine injektive Abbildung von $\mathcal{Z}_n$ in die Gruppe der linearen Selbstabbildungen von Vektorräumen genügend hoher Dimension gibt; siehe [6, 35]. Aus Zeitgründen können wir auf die folgenden Aspekte nicht näher eingehen, möchten sie aber nicht unerwähnt lassen. Die n-te Zopfgruppe lässt sich auch anders beschreiben, nämlich als die Gruppe der Isotopieklassen von Automorphismen (=Selbsthomöomorphismen) der n-fach punktierten Scheibe. Damit stellen die Zopfgruppen einen Spezialfall der so genannten **Abbildungsklassengruppen** dar. Es ist schon lange bekannt, dass die Zopfgruppen torsionsfrei sind, also keine Elemente endlicher Ordnung enthalten. Jüngere Arbeiten zeigen, übrigens ursprünglich ausgehend von der Untersuchung mengentheoretischer Axiomensysteme (*large cardinals* [13]), dass Zopfgruppen eine *linksinvariante Ordnung* besitzen [16], [55]; das ist eine noch stärkere Eigenschaft als Torsionsfreiheit.

Kapitel 4

Theorie der Normalflächen

In diesem Kapitel werden wir die Theorie der *Normalflächen* behandeln. Auf ihrer Grundlage wurden einige bedeutende Ergebnisse der dreidimensionalen Topologie bewiesen, und sie ermöglicht auch eine algorithmische Herangehensweise an topologische Probleme. Beispielsweise führte eine Erweiterung der Normalflächentheorie auf einen Algorithmus, der erkennt, ob eine gegebene 3-Mannigfaltigkeit homöomorph zu S^3 ist. Während das analoge Problem in Dimension 2 schon lange gelöst ist (siehe Unterabschnitt 2.3), kann man zeigen, dass es keinen Algorithmus gibt, der S^n für $n \geq 5$ zuverlässig erkennt — in der Erkennung von Sphären sind also algorithmische Entscheidungsprobleme verborgen.

Es gibt keinen Algorithmus, der zu zwei vorgegebenen kompakten 4-Mannigfaltigkeiten zuverlässig erkennt, ob sie homöomorph sind. Man ist sich inzwischen weitgehend sicher, dass das entsprechende „Klassifikationsproblem“ in Dimension 3 eine algorithmische Lösung besitzt; allerdings sind dafür neuere Arbeiten von Grisha Perelman [46] über Thurstons „Geometrisierungsvermutung“ entscheidend, die noch geprüft werden. Klassisch ist jedoch der auf Wolfgang Haken zurückgehende Algorithmus, der auf der Normalflächentheorie basiert und das Klassifikationsproblem zwar nicht für alle kompakten 3-Mannigfaltigkeiten, aber doch für eine sehr große Unterklasse kompakter 3-Mannigfaltigkeiten löst. Er ist in [42] detailliert beschrieben. Damit steht auch ein (theoretischer) Algorithmus zur Verfügung, der erkennt, ob zwei Verkettungen zueinander Δ-äquivalent sind.

Obwohl der Anwendungsbereich von Normalflächen also weit über die Knotentheorie hinaus gehen, stammt das motivierende Problem dieses Kapitels wieder aus der Knotentheorie, definiert im folgenden Abschnitt: Unser Ziel ist ein Algorithmus zur Konstruktion so genannter Seifert-Flächen von minimalem Geschlecht, wodurch man auch den trivialen Knoten algorithmisch erkennen kann. Weitere Anwendungen der Normalflächentheorie folgen im nächsten Kapitel. Wir werden nicht alle Details erklären können; als Ergänzung sei daher [42] oder andere Literatur wärmstens empfohlen!

4.1 Seifert-Flächen

Es sei $K \subset S^3$ ein (natürlich zahmer) orientierter Knoten. Eine stückweise linear eingebettete wegzusammenhängende orientierte Fläche $F \subset S^3$ heißt **Seifert-Fläche** von K, falls der Rand von F in seiner induzierten Orientierung mit K übereinstimmt.

Bemerkung 4.1.1 Nicht immer verlangt man von einer Seifert-Fläche, orientierbar zu sein, obwohl diese Voraussetzung klassisch ist. Orientierbarkeit verlangt man vor allem deshalb, weil eingebette orientierbare Flächen in orientierbaren 3-Mannigfaltigkeiten zweiseitig sind, was in Anwendungen von Seifert-Flächen (siehe zum Beispiel [10]) sehr nützlich ist. Da das Hauptthema dieser Vorlesung nicht Knotentheorie ist, werden wir hier solche Anwendungen nicht betrachten.

Satz 4.1.2 *Jeder orientierte Knoten besitzt eine Seifert-Fläche.*

Beweis Es sei $\mathcal{D}(K,p)$ ein Diagramm eines orientierten Knotens K. Wir betrachten $p(K)$ als orientierten Graph: Die Eckenmenge ist die Menge der Doppelpunkte des Diagramms, die Kanten bestehen aus den Nicht-Doppelpunkten von $p(K)$. An jede Ecke von $p(K)$ laufen (mit Vielfachheit) zwei Kanten herein und zwei heraus.

Wir ändern nun $p(K)$ an jeder Ecke so wie in Abbildung 4.1 oben vorgegeben. Dadurch geht $p(K)$ über in paarweise disjunkte einfache geschlossene orientierte Wege in $\mathbb{R}^2$, welche man als **Seifert-Zyklen** bezeichnet. Ein Beispiel sieht man in Abbildung 4.1 unten. Jeder Seifert-Zyklus Z berandet in $\mathbb{R}^2$ eine abgeschlossene Scheibe D'_Z. Wir orientieren D'_Z so, dass der Durchlaufsinn von $\partial D'_Z$ mit dem Durchlaufsinn von Z übereinstimmt. Wir wählen nun zu jeder dieser Scheiben D'_Z in verschiedenen Höhen (bzgl. der Projektionsrichtung p) paarweise disjunkte abgeschlossene orientierte Scheiben $D_Z \subset \mathbb{R}^3$, mit $p(D_Z) = D'_Z$. Das können wir so tun, dass für zwei Seifert-Zyklen $Z, \tilde{Z}$ mit $D'_Z \subset D'_{\tilde{Z}}$ stets D_Z bezüglich der Projektionsrichtung höher als $D_{\tilde{Z}}$ liegt. Über jeder Ecke von $p(K)$ verbinden wir nun die Scheiben D_Z durch halbgedrehte Streifen; je nach Art der Überkreuzung und Lage der Seifert-Zyklen entstehen die in Abbildung 4.2 dargestellten vier Fälle. Dabei nutzt man in den beiden rechts abgebildeten Fällen die Wahl unterschiedlicher Höhen der D_Z. Offenbar entsteht eine eingebettete Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$, so dass ∂F dasselbe Diagramm wie K besitzt, also zu K Δ-äquivalent ist. Weil K aus nur einer Komponente besteht, ist $p(K)$ zusammenhängend und daher auch F zusammenhängend. Man erkennt in Abbildung 4.2 ferner, dass sich die Orientierungen der Scheiben D_Z zu einer Orientierung von F zusammensetzen. Also ist F eine Seifertfläche von K. □

Man beachte, dass der Existenzbeweis der Seifert-Flächen konstruktiv ist: Wenn ein Diagramm eines Knotens gegeben ist, kann man eine Seifertfläche ablesen. Doch leider hängt die konstruierte Fläche ganz erheblich vom Diagramm ab. Man interessiert sich daher für solche Seifert-Flächen, die „besonders einfach“ sind, nämlich *von minimalem Geschlecht*. Unter Rückgriff auf die Klassifikation von Flächen können wir dadurch eine weitere Invariante von Knoten definieren.

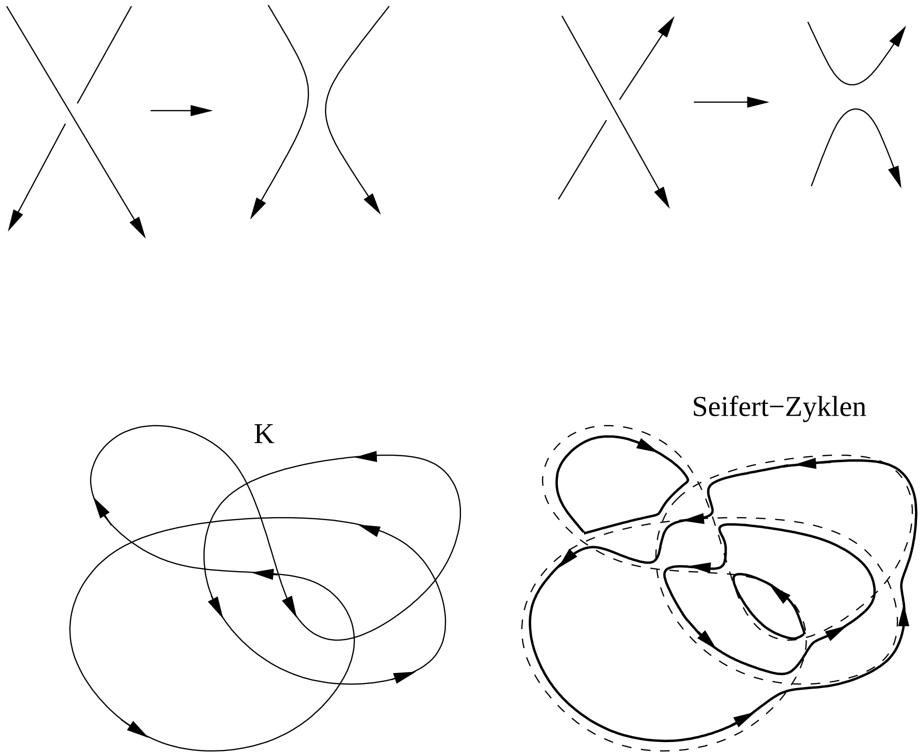


Abbildung 4.1: Konstruktion der Seifert-Zyklen

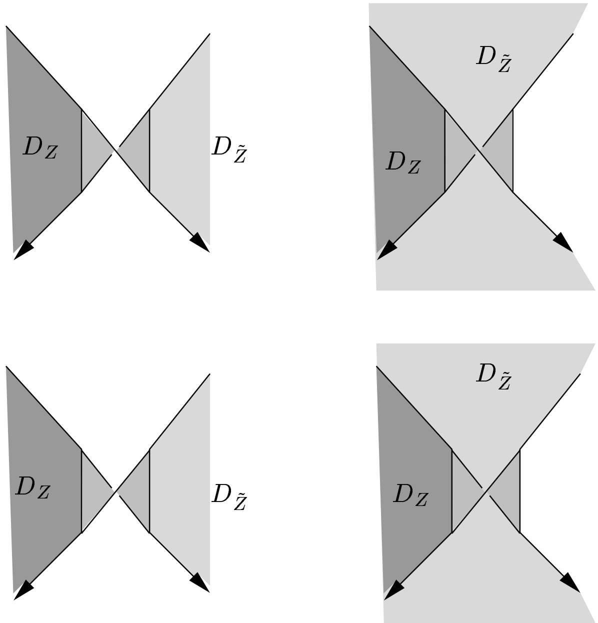


Abbildung 4.2: Konstruktion einer Seifert-Fläche

Definition 4.1.3 *Es sei K ein orientierter Knoten. Das* ***Geschlecht*** *von K ist*

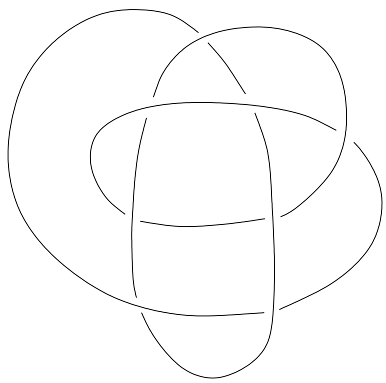
$$g(K) := \min\{g(F)\colon\ F \text{ ist Seifert-Fläche von } K\}$$

Man sieht leicht, dass $g(K)$ eine Invariante bezüglich Δ-Äquivalenz ist: Wenn K durch einen Δ-Prozess oder einen inversen Δ-Prozess in einen Knoten K' übergeht, so geht gleichzeitig jede Seifert-Fläche von K in eine Seifert-Fläche von K' über. Es gibt für einen Knoten im Allgemeinen mehrere Isotopieklassen von Seifert-Flächen von minimalem Geschlecht.

Da man an einem Diagramm $\mathcal{D}$ von K wie im Beweis von Satz 4.1.2 eine Seifert-Fläche $F_\mathcal{D}$ ablesen kann, erhält man aus jedem Diagramm von K eine obere Schranke für $g(K)$. Man kann beweisen, dass $g(F_\mathcal{D}) = g(K)$, falls sich in dem Diagramm Über- und Unterkreuzungen abwechseln; ein solches Diagramm heißt **alternierend**. Es gibt jedoch nicht zu jeder Verkettung ein alternierendes Diagramm, und im Allgemeinen gibt es kein Diagramm von K, an welchem man eine Seifert-Fläche von *minimalem* Geschlecht ablesen kann.

Übung 4.1.4

1. Das beigefügte Diagramm $\mathcal{D}$ zeigt einen Knoten K, der in Knotentabellen (z.B. im Anhang von [10]) den Namen 8_{20} trägt. Wie man sieht, ist es nicht alternierend. Man kann zeigen, dass $\mathcal{D}$ unter allen Diagrammen von K die minimale Anzahl von Doppelpunkten hat, und dass K *keine* alternierenden Diagramme besitzt. Bestimme $g(F_\mathcal{D})$. Man kann zeigen, dass $g(8_{20}) = g(F_\mathcal{D}) - 1$.



2. Die **Kreuzungszahl** $cr(K)$ eines Knotens K ist die minimale Anzahl von Doppelpunkten unter allen Diagrammen von K. Offenbar ist $cr(K) = 0$ genau dann wenn K äquivalent zum trivialen Knoten ist. Beweise eine obere Schranke für $g(K)$, ausgedrückt in $cr(K)$.

Die einzige Fläche vom Geschlecht 0 mit einer Randkomponente ist $\Sigma_0^1 \approx \overline{B^2}$. Wenn also $K \subset S^3$ ein Knoten ist, so ist $g(K) = 0$ genau dann, wenn K der Rand einer in S^3 stückweise linear eingebetteten Scheibe D ist. Da D stückweise linear eingebettet ist, ist D in Dreiecke zerlegt; man kann nun K durch Δ-Prozesse entlang dieser Dreiecke ziehen, bis man K in den Rand eines einzelnen Dreiecks umgeformt hat. Es gilt also

Satz 4.1.5 *Ein Knoten ist trivial genau dann wenn er vom Geschlecht* 0 *ist.* $\square$

Das Geschlecht ist also theoretisch eine sehr starke Invariante. Doch wie sollte man das Geschlecht algorithmisch bestimmen? Bisher haben wir ja nur eine algorithmisch bestimmbare obere Schranke für das Geschlecht kennen gelernt. Ein Algorithmus, der dieses Problem löst, und der gemäß des vorigen Satzes auch geeignet ist, den trivialen Knoten zu erkennen, wird das Hauptthema der folgenden Abschnitte sein. Dabei werden wir mit dem Knotenaußenraum $M^K = S^3 \setminus U(K)$ arbeiten.

Wir werden im Rest dieses Unterabschnitts ohne Beweis die Begriffe „Seifertfläche" und „peripheres System" im Knotenaußenraum beschreiben. Die reguläre Umgebung $U(K) \subset S^3$ von K ist homöomorph zum Volltorus $V := \overline{B}^2 \times S^1$. Man kann zeigen, dass für eine eigentlich eingebettete abgeschlossene Scheibe $D \subset V$ entweder $(D, \partial D)$ zu einer Scheibe in ∂V oder zu $(\overline{B}^2 \times \{p\}, S^1 \times \{p\})$ (für einen Punkt $p \in S^1$) in $(V, \partial V)$ relativ isotop ist — siehe Übung 4.3.7. Es gibt also eine bis auf Isotopie eindeutige einfach geschlossene Kurve $m_K \subset \partial U(K)$, welche eine Scheibe in $U(K)$, aber keine Scheibe in $\partial U(K)$ berandet. Eine solche Kurve m_K heißt **Meridian** von K. Die Wahl einer Orientierung von K induziert durch die Orientierung von S^3 einen Durchlaufsinn auf m_K. Eine Seifertfläche entspricht nun einer eigentlich eingebetteten orientierbaren zusammenhängenden Fläche $F \subset M^K$, so dass $\partial F \cap m_K$ aus genau einem Punkt besteht. Die Randkurven von zwei Seifertflächen $F_1, F_2 \subset M^K$ sind zueinander isotop in ∂M^K (selbst wenn F_1 in M^K nicht zu F_2 isotop ist!), was man mit Methoden der algebraischen Topologie zeigen kann. Die Randkurve einer Seifertfläche heißt **Longitude** l_K von K. Die Longitude ist orientiert, „parallel" zur Orientierung von K, also so, dass sie zu K in $U(K)$ homotop ist.

Es sei $x_0 \in M_K$ ein fest gewählter Punkt in M_K. Ferner seien m_K und l_K Meridian und Longitude von K, so dass $m_K \cap l_K = \{p\}$ ein einzelner Punkt ist. Wir wählen einen Weg α von x_0 nach p. Dadurch erhalten wir Elemente $m := \alpha \cdot m_K \cdot \alpha^{-1}$ und $l := \alpha \cdot l_K \cdot \alpha^{-1}$ von $\pi_1(M^K)$. Weil l_K und m_K bis auf Isotopie eindeutig bestimmt sind, hängen l und m nur noch von der Wahl von α ab. Eine andere Wahl von α ändert l und m nur bis auf Konjugation mit einem gemeinsamen Element von $\pi_1(M^K)$. Bezüglich der in Unterabschnitt 3.2.5 definierten Äquivalenzrelation auf $\pi_1(M^K) \times \pi_1(M^K)$ ist also die Äquivalenzklasse $[m, l]$ von (m, l) eindeutig durch K bestimmt. Es stellt sich heraus, dass $(\pi_1(M^K), [m, l])$ das periphere System von K ist.

4.2 Konstruktionswerkzeuge für Flächen in triangulierten 3-Mannigfaltigkeiten

4.2.1 Normalkurven

Eine **normale Isotopie** in einem Raum X mit Triangulation $\mathcal{T}$ ist eine Isotopie in X, die jedes Simplex von $\mathcal{T}$ als Menge festlässt. Es sei σ ein 2-dimensionales Simplex mit Kanten e_1, e_2, e_3. Ein **Normalbogen** α ist eine in σ eigentlich eingebettete Strecke, so dass $\partial\alpha$ keine Ecke von σ enthält und α zwei *verschiedene* Kanten von σ verbindet.

Satz 4.2.1 (Jordan-Schönflies) *Jede eigentliche Einbettung eines abgeschlossenen Intervalls in $\overline{B^2}$ ist zahm und zerlegt $\overline{B^2}$ in zwei Scheiben. Jede Einbettung von S^1 in S^2 ist zahm und zerlegt S^2 in zwei Scheiben.*

Einen Beweis des Satzes findet man in den meisten Standardwerken der Topologie. Es folgt aus dem Satz von Jordan-Schönflies, dass es bis auf normale Isotopie nur einen Normalbogen gibt, der e_1 mit e_2 verbindet. Es gibt in σ also drei **Typen** (:= normale Isotopieklassen) von Normalbögen, nämlich solche, die e_1 mit e_2, e_2 mit e_3 bzw. e_1 mit e_3 verbinden.

Es sei $X \subset \sigma$ eine Menge paarweise disjunkter Normalbögen. Dabei sei $b_{i,j}$ die Anzahl der Bögen, die e_i mit e_j verbinden, und n_i sei die Anzahl der Randpunkte von X in e_i. Offensichtlich ist $n_1 + n_2 + n_3$ eine gerade natürliche Zahl, denn jeder Bogen in X hat zwei Randpunkte. Ferner gilt

$$\begin{aligned} n_1 &= b_{1,2} + b_{1,3} \\ n_2 &= b_{1,2} + b_{2,3} \\ n_3 &= b_{1,3} + b_{2,3}, \end{aligned}$$

und nach $b_{i,j}$ aufgelöst

$$\begin{aligned} b_{1,2} &= \frac{n_1 + n_2 - n_3}{2} \\ b_{1,3} &= \frac{n_1 + n_3 - n_2}{2} \\ b_{2,3} &= \frac{n_2 + n_3 - n_1}{2}. \end{aligned}$$

Weil die $b_{i,j}$ natürliche Zahlen (inklusive Null) sind, gilt die **Dreiecksungleichung**

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 &\geq n_3 \\ n_1 + n_3 &\geq n_2 \\ n_2 + n_3 &\geq n_1. \end{aligned}$$

Es seien nun $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}_0$, welche die Dreiecksungleichung erfüllen, so dass $n_1 + n_2 + n_3$ gerade ist. Dann gibt es eine Menge X von paarweise disjunkten normalen Bögen in σ, so dass jeweils n_i Randpunkte von X in e_i liegen: Man berechnet dazu Zahlen $b_{i,j}$ gemäß obiger Gleichung. Wegen der Voraussetzung an n_1, n_2, n_3 sind die $b_{i,j}$ in $\mathbb{N}_0$. Wir können sie also als Anzahl der Bögen von e_i nach e_j auffassen und erhalten so X Da die $b_{i,j}$ durch n_1, n_2, n_3 eindeutig bestimmt sind, ist auch X bis auf normale Isotopie eindeutig durch n_1, n_2, n_3 bestimmt.

Es sei Σ eine Fläche mit einer Triangulation $\mathcal{T}$. Eine **Normalkurve** ist eine in Σ eigentlich eingebettete 1-Mannigfaltigkeit (nicht notwendig zusammenhängend, möglicherweise leer), deren Schnitt mit jedem 2-Simplex von $\mathcal{T}$ aus paarweise disjunkten Normalbögen besteht. Beispiel siehe Abbildung 4.3.

Es sei $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ die Menge der normalen Isotopieklassen von Normalkurven. Falls keine Missverständnisse zu befürchten sind, reden wir von Normalkurven als *Elementen* von $\mathcal{C}(\mathcal{T})$, nicht als *Repräsentanten* von Elementen von $\mathcal{C}(\mathcal{T})$. Auf $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ möchten wir eine Verknüpfung $+$ durch erklären, durch die $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ zu einer kommutativen Halbgruppe mit der leeren Kurve als neutralem Element wird. Es seien $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(\mathcal{T})$ Normalkurven. Wenn σ ein 2-Simplex von $\mathcal{T}$ mit Kanten e_1, e_2, e_3 ist, so sei $n_i(C_j)$ die Anzahl der Schnittpunkte von C_j mit e_i. Weil $C_j \cap \sigma$ eine disjunkte Vereinigung von Normalbögen ist, ist

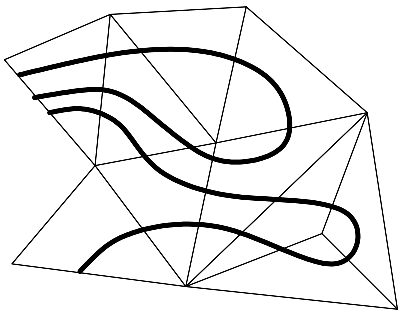


Abbildung 4.3: Beispiel einer Normalkurve

$n_1(C_j) + n_2(C_j) + n_3(C_j)$ gerade, und $n_1(C_j), n_2(C_j), n_3(C_j)$ erfüllt die Dreiecksungleichung. Wegen der Linearität der Dreiecksungleichung erfüllt also auch $n_1(C_1) + n_1(C_2), n_2(C_1) + n_2(C_2), n_3(C_1) + n_3(C_2)$ die Dreiecksungleichung, und die Summe der drei Zahlen ist gerade. Es gibt also eine bis auf normale Isotopie eindeutige Menge paarweise disjunkter Normalbögen in σ, die e_i in $n_i(C_1) + n_i(C_2)$ Punkten schneiden. So verfährt man in allen 2-Simplexen von $\mathcal{T}$ und erhält so eine Normalkurve, deren normale Isotopieklasse eindeutig bestimmt ist und mit $C_1 + C_2 \in \mathcal{C}(\mathcal{T})$ bezeichnet wird. Eine Normalkurve C heißt **Fundamentalkurve**, falls sie sich nicht als nicht-triviale Summe schreiben lässt, d.h. falls es keine Normalkurven $C_1, C_2 \neq \emptyset$ gibt mit $C_1 + C_2 = C$.

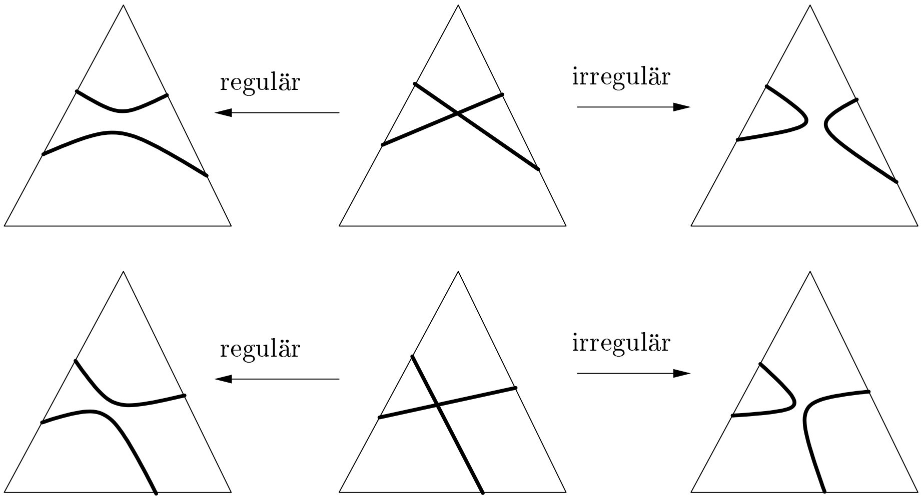


Abbildung 4.4: Umschalten

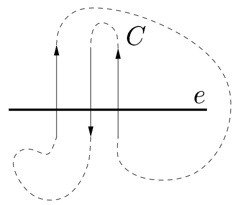
Die Addition von Normalkurven $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(\mathcal{T})$ lässt sich geometrisch interpretieren, was für die praktische Arbeit mit Normalkurven von entscheidender Bedeutung ist. Durch normale Isotopie von C_1 können wir annehmen, dass $C_1 \cap C_2 \cap \mathcal{T}^1 = \emptyset$, also dass sich C_1 und C_2 nur im Inneren von 2-Simplexen schneiden. Es sei $\phi\colon \sigma^2 \hookrightarrow \Sigma$ ein 2-Simplex von $\mathcal{T}$. Wir können durch normale

Isotopie von C_1 und C_2 erreichen, dass $\phi^{-1}(C_1)$ und $\phi^{-1}(C_2)$ aus Strecken in $\sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$ besteht, ohne dabei $(C_1 \cup C_2) \cap \mathcal{T}^1$ zu ändern. So verfahren wir in allen 2-Simplexen von $\mathcal{T}$. Zwei Strecken schneiden sich in höchstens einem Punkt. Also schneidet jeder Normalbogen α_1 von C_1 einen Normalbogen α_2 von C_2 in höchstens einem Punkt. Wenn wir den Schnittpunkt aus α_1 und α_2 entfernen, erhalten wir vier halboffene Strecken. Diese können wir jeweils auf zwei Arten zu zwei disjunkt eingebetten Bögen verbinden; diesen Vorgang nennt man **Umschalten** (englisch *switch*). Abbildung 4.4 zeigt jeweils beide möglichen Umschaltungen für die beiden möglichen Lagen von α_1 und α_2. Wie man sieht gibt es jeweils genau eine Umschaltung, die zwei Normalbögen ergibt; diese Umschaltung nennen wir **regulär**, die andere **irregulär**. Wenn wir an allen Schnittpunkten von C_1 mit C_2 simultan regulär umschalten, entsteht eine Normalkurve C (Details: Übung oder [42]). Da nach Konstruktion $C \cap \mathcal{T}^1 = (C_1 \cup C_2) \cap \mathcal{T}^1$ gilt, folgt $C = C_1 + C_2$. Für die folgenden Übungen ist die Verwendung des Umschaltens sehr hilfreich.

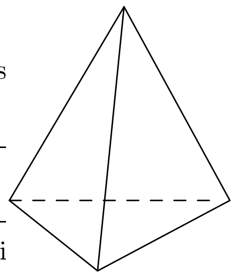
Übung 4.2.2

1. Zeige: Wenn eine Normalkurve C eine Kante e von $\mathcal{T}$ zweimal in derselben Richtung schneidet, so ist sie nicht fundamental. Folgere, dass $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ als Halbgruppe endlich erzeugt ist.

   Hinweis: Überzeuge dich, dass das nebenstehende Bild allgemein genug ist. Schneide die an e stoßenden normalen Bögen von C auf und verbinde sie neu, so dass zwei sich schneidende Normalkurven entstehen.

2. Es sei nun $\Sigma = S^2$, und $\mathcal{T}$ sei eine Triangulation von S^2 mit 4 Dreiecken (das entspricht dem Rand eines Tetraeders).

   (a) Bestimme die Fundamentalkurven bzgl. $\mathcal{T}$.

   (b) Finde zwei Fundamentalkurven C_1, C_2, so dass $C_1 + C_2$ zusammenhängend ist.

   (c) Wieviele Schnittpunkte mit $\mathcal{T}^1$ können zusammenhängende Normalkurven haben?

   (d) Konstruiere eine nicht notwendig zusammenhängende Normalkurve, die sich auf zwei wesentlich verschiedene Arten als Summe von Fundamentalkurven schreiben lässt.

4.2.2 Normale und pränormale Flächen

Eine Normalkurve ist bereits durch ihren Schnitt mit dem 1-Gerüst einer Triangulation bestimmt. Wir werden hier eine Klasse eingebetteter Flächen mit ähnlichen Eigenschaften betrachten. Dazu sei M eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit mit einer Triangulation $\mathcal{T}$.

Definition 4.2.3 *Eine eigentlich eingebettete Fläche $F \subset M$ (möglicherweise leer, nicht notwendig zusammenhängend) zu $\mathcal{T}$ heißt **pränormal**, falls sie jedes*

2-Simplex von $\mathcal{T}$ in paarweise disjunkten Normalbögen und jedes 3-Simplex von $\mathcal{T}$ in paarweise disjunkt zahm eingebetteten Scheiben schneidet.

Wir zeigen, dass eine pränormale Fläche $F \subset M$ bereits bis auf normale Isotopie durch $F \cap \mathcal{T}^1$ bestimmt ist. Wie im Fall von Normalkurven sind die Normalbögen und damit $F \cap \mathcal{T}^2$ bis auf normale Isotopie durch $F \cap \mathcal{T}^1$ bestimmt. Es bleibt zu zeigen, dass der Schnitt von F mit jedem Tetraeder t bereits durch $F \cap \partial t$ bis auf normale Isotopie bestimmt ist. Hierzu zitieren wir eine Formulierung des Satzes von Alexander-Schönflies [64].

Satz 4.2.4 (Alexander-Schönflies) *Jede zahme eigentliche Einbettung von $\overline{B^2}$ in $\overline{B^3}$ zerlegt $\overline{B^3}$ in zwei Bälle. Ebenso zerlegt jede zahme Einbettung von S^2 in S^3 die 3-Sphäre in zwei Bälle.*

Man beachte, dass die Voraussetzung *zahm* im Satz von Alexander-Schönflies von entscheidender Bedeutung gibt, denn es gibt eigentlich eingebettete Scheiben in $\overline{B^3}$, die $\overline{B^3}$ nicht in zwei Bälle zerlegen. Eine Verallgemeinerung des Satzes von Alexander-Schönflies in beliebigen Dimensionen wurde von Brown [7] bewiesen.

Es folgt aus dem Satz von Alexander-Schönflies, dass je zwei zahme eigentlich eingebettete Scheiben $D_1, D_2 \subset \overline{B^3}$ mit $\partial D_1 = \partial D_2$ zueinander isotop sind, wobei während der Isotopie $\partial D_1 = \partial D_2$ fest bleibt. Da $t \approx \overline{B^3}$ folgt unsere Behauptung, dass der Schnitt von F mit jedem Tetraeder t bereits durch $F \cap \partial t$ bis auf normale Isotopie bestimmt ist. Also ist eine pränormale Fläche bereits bis auf normale Isotopie durch ihren Schnitt mit $\mathcal{T}^1$ bestimmt.

Wir können nun die Summe zweier pränormaler Flächen $F_1, F_2 \subset M$ wie folgt definieren. Durch normale Isotopie können wir voraussetzen, dass sich F_1 und F_2 nur außerhalb von $\mathcal{T}^1$ schneiden (also $F_1 \cap F_2 \cap \mathcal{T}^1 = \emptyset$). Wie bei Normalkurven zeigt man, dass man $(F_1 \cup F_2) \cap \mathcal{T}^1$ in jedem 2-Simplex von $\mathcal{T}^1$ durch paarweise disjunkte Normalbögen fortsetzen kann, und zwar bis auf normale Isotopie eindeutig. Dadurch entsteht im Rand jedes 3-Simplexes t von $\mathcal{T}$ eine Normalkurve, deren Komponenten zahme Scheiben in t beranden. Diese bilden zusammen eine pränormale Fläche, die nach dem vorigen Absatz bis auf normale Isotopie eindeutig ist. Wir bezeichnen diese Fläche als $F_1 + F_2$.

Einen Makel hat diese Definition von $F_1 + F_2$ für pränormale Flächen: Man kann zwar noch konkret beschreiben, wie die Normalbögen von $F_1 + F_2$ aus denen von F_1 und F_2 entstehen (nämlich durch Umschalten wie bei Normalkurven) — doch die Umschaltungen setzen sich nicht entlang der Schnittkurven $F_1 \cap F_2$ fort, wie man in Abbildung 4.5 sieht. Wir verschärfen daher die Definition und gehen zu *Normalflächen* über. Wir werden im nächsten Abschnitt die Addition von pränormalen Flächen einschränken zu einer *partiellen* Addition von Normalflächen, und werden zeigen, dass die Menge der Isotopieklassen von Normalflächen bezüglich dieser partiellen Addition endlich erzeugt ist.

Definition 4.2.5 *Eine pränormale Fläche $F \subset M$ heißt **Normalfläche**, wenn für jedes 3-Simplex t von $\mathcal{T}$ der Schnitt $F \cap \partial t$ eine fundamentale Normalkurve in ∂t ist.*

In Übung 4.2.2.2a wurde hoffentlich gezeigt, dass es in t sieben Typen (:= normale Isotopieklassen) von Scheiben gibt, deren Rand eine Fundamentalkurve ist (siehe Abbildung 4.6), nämlich vier „normale Dreiecke“ (an jeder Ecke

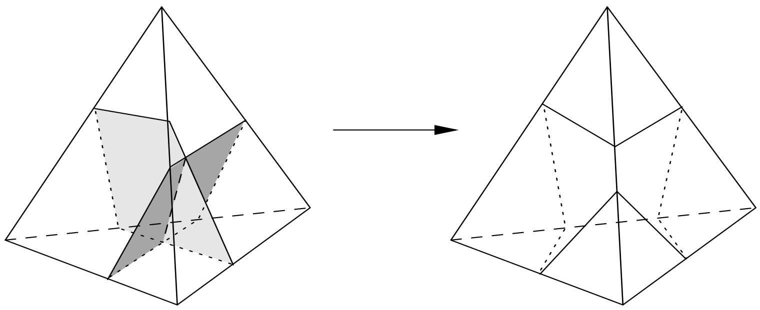
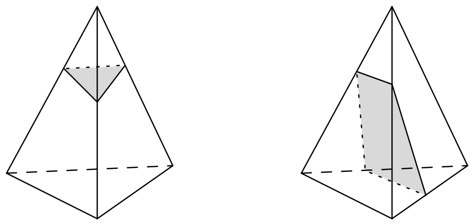


Abbildung 4.5: Ein normales Oktagon – Lösung zu Übung 4.2.2.2d



normales Dreieck normales Viereck

Abbildung 4.6: Fundamentalkurven im Rand eines Tetraeders.

von t eines) und drei „normale Vierecke“ (jedes trennt jeweils ein Paar gegenüberliegender Kanten von t). Man kann also auch definieren, dass eine Normalfläche eine aus Kopien normaler Drei- und Vierecke bestehende pränormale Fläche ist. Und noch eine dritte Definition ist möglich (und wird verwendet): Eine Normalfläche F ist eine pränormale Fläche, so dass für jedes Tetraeder t jede Zusammenhangskomponente C von $F \cap \partial t$ jede Kante von t nur in höchstens einem Punkt schneidet. Diese Definition ist in Beweisen besonders nützlich (z.B. Theorem 4.3.9).

Übung 4.2.6 Konstruiere eine triangulierte Fläche Σ und eine Normalkurve $C \subset \Sigma$, so dass $C+C$ eine zusammenhängende Kurve ist. Charakterisiere Kurven mit dieser Eigenschaft.
Analog: Beschreibe eine triangulierte 3-Mannigfaltigkeit mit einer Normalfläche F, so dass $F+F$ zusammenhängend ist.

4.2.3 Algebraische Beschreibung von Normalflächen

Es sei n die Anzahl der Tetraeder (=3-Simplexe) der Triangulation $\mathcal{T}$ von M. Eine Normalfläche F bestehe aus Kopien normaler Drei- und Vierecke. Von diesen gibt es in jedem Tetraeder 7 Typen; es gibt also insgesamt $7n$ Typen von normalen Drei- und Vierecken. Wir ordnen jedem Standarderzeugenden des Gitters $\mathbb{Z}^{7n}$ jeweils einem dieser Typen zu. Diese Zuordnung ist beliebig, sei aber von nun an fest gewählt. An dieser Stelle sei betont, dass der Begriff der Normalflächen und mithin auch alle Daten in der im Folgenden dargestellten algebraischen Beschreibung von der Wahl der Triangulation abhängen — eine andere Triangulation von $\mathcal{T}$ ergibt wesentlich andere Normalflächen.

Bis auf normale Isotopie ist F durch die Angabe bestimmt, wie viele Kopien von jedem einzelnen normalen Drei- und Viereckstyp in F auftreten. Über die Zuordnung der Typen zu den Standarderzeugenden von $\mathbb{Z}^{7n}$ definieren die Anzahlen der Kopien einen Vektor $\mathfrak{v}(F) \in \mathbb{N}_0^{7n}$. Wir werden nun charakterisieren, welche Elemente $\mathfrak{v} \in \mathbb{N}_0^{7n}$ den Normalflächen zugeordnet sind.

Es sei t ein Tetraeder von $\mathcal{T}$, und es seien v_i, v_j und v_k die Einträge von $\mathfrak{v}$, welche zu den drei Typen normaler Vierecke in t gehören. Man sieht, dass zwei normale Vierecke nur dann disjunkt in t eingebettet werden können, wenn sie zueinander normal isotop sind, also demselben Typ angehören. Also kann $\mathfrak{v}$ nur dann zu einer eingebetteten Fläche gehören, wenn höchstens eines der v_i, v_j, v_k von Null verschieden ist. Dies muss für alle Tetraeder gelten. Diese Bedingung heißt **Viereckbedingung**. Wenn $\mathfrak{v}$ die Viereckbedingung erfüllt, so kann man offenbar seine Einträge durch paarweise disjunkt eingebettete normale Drei- und Vierecke in den Tetraedern von $\mathcal{T}$ realisieren.

Es sei nun σ ein 2-Simplex von $\mathcal{T}$, welches nicht im Rand von M liegt. Dann stoßen an σ zwei Tetraeder t_1, t_2 von $\mathcal{T}$ an. Es sei ferner α ein Normalbogen in σ. Für $i = 1, 2$ gibt es jeweils genau einen Typ normaler Dreiecke in t_i und genau einen Typ normaler Vierecke in t_i, die eine Kopie von α im Rand enthalten (siehe Abbildung 4.7). Es sei v_{a_i} bzw. v_{b_i} der Eintrag von $\mathfrak{v}$, der diesem normalen Drei- bzw. Viereck entspricht. Eine Normalfläche F ist per

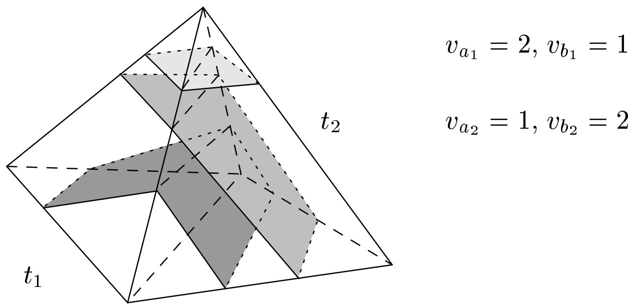


Abbildung 4.7: Die Normalgleichungen

definitionem eigentlich eingebettet, ihr Rand liegt also in ∂M. Da σ nicht im Rand von M liegt, muss an jede Kopie von α in F sowohl eine Komponente von $F \cap t_1$ als auch eine Komponente von $F \cap t_2$ anstoßen. Wenn also $\mathfrak{v}$ einer Normalfläche zugeordnet ist, so muss gelten

$$v_{a_1} + v_{b_1} = v_{a_2} + v_{b_2}.$$

Eine solche Gleichung muss für alle Typen von Normalbögen in allen nicht im Rand von M liegenden 2-Simplexen gelten. Dies führt auf ein lineares Gleichungssystem, die **Normalgleichungen** (im Englischen auch manchmal *matching equations*).

Lemma 4.2.7 *Zu einem Vektor $\mathfrak{v} \in \mathbb{N}_0^{7n}$ gibt es genau dann eine Normalfläche $F \subset M$ mit $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}(F)$, wenn $\mathfrak{v}$ die Viereckbedingung und die Normalgleichungen erfüllt.*

Beweis Wenn F existiert, so erfüllt nach dem oben gesagten $\mathfrak{v}(F)$ die Vierecksbedingung und die Normalgleichungen. Es sei nun $\mathfrak{v} \in \mathbb{N}_0^{7n}$ eine Lösung der Normalgleichungen, welche die Vierecksbedingung erfüllt. Wegen der Vierecksbedingung können wir $\mathfrak{v}$ in jedem Tetraeder von $\mathcal{T}$ durch disjunkt eingebettete normale Drei- und Vierecke realisieren. Wegen der Normalgleichungen können wir diese normalen Drei- und Vierecke so wählen, dass sie an der gemeinsamen Seitenfläche von benachbarten Tetraedern dieselben Normalbögen in ihrem Rand haben. Dadurch fügen sie sich zu einer Fläche F zusammen, deren Rand aus Normalbögen in solchen 2-Simplexen besteht, die nicht im Rand zweier Tetraeder enthalten ist — also in einem 2-Simplex in ∂M. Also erweist sich F als eigentlich eingebettet, und ist aus normalen Drei- und Vierecken zusammengesetzt; damit ist F eine Normalfläche, und $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}(F)$ gilt nach Konstruktion. Für Details siehe [42]. □

Es seien $F_1, F_2 \subset M$ zwei Normalflächen. Weil $\mathfrak{v}(F_1)$ und $\mathfrak{v}(F_2)$ beide die Normalgleichungen erfüllen und diese Gleichungen linear sind, erfüllt auch $\mathfrak{v}(F_1)+\mathfrak{v}(F_2)$ die Normalgleichungen. Allerdings erfüllt $\mathfrak{v}(F_1) + \mathfrak{v}(F_2)$ nicht immer die Vierecksbedingung. Wenn wir jedoch an F_1 und F_2 die zusätzliche Voraussetzung stellen, dass $\mathfrak{v}(F_1) + \mathfrak{v}(F_2)$ die Vierecksbedingung erfüllt, so gibt es nach dem vorigen Lemma eine bis auf normale Isotopie eindeutige Normalfläche F mit $\mathfrak{v}(F) = \mathfrak{v}(F_1) + \mathfrak{v}(F_2)$. Wir schreiben dann $F = F_1 + F_2$.

Die Summe $F_1 + F_2$ von Normalflächen lässt sich analog zu der Addition von Normalflächen anschaulich interpretieren, nämlich wieder durch „Umschalten“von $F_1 \cup F_2$ entlang $F_1 \cap F_2$. Dazu fassen wir wieder jedes Tetraeder als Teilmenge des euklidischen Raumes auf und setzen durch normale Isotopie von F_1 und F_2 voraus, dass alle normalen Drei- und Vierecke, aus denen F_1 und F_2 bestehen, flach sind. Dadurch schneiden jedes normale Drei- und Viereck aus F_1 die normalen Drei- und Vierecke aus F_2 jeweils in höchstens einer Linie. Wenn man an einer solchen Linie aufschneidet, so gibt es genau zwei Möglichkeiten, die entstehenden Teile wieder zusammenzukleben — diese heißen *Umschaltungen*, siehe Abbildung 4.8. Man kann nun relativ leicht zeigen, dass stets *genau*

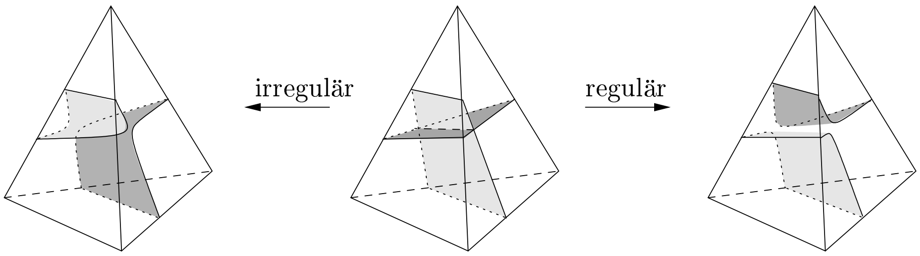


Abbildung 4.8: Umschalten normaler Drei- und Vierecke

eine Umschaltung wieder auf normale Drei- und Vierecke führt; wir nennen sie die *reguläre Umschaltung.* Wie man in Abbildung 4.5 sehen kann, ist dafür die Voraussetzung entscheidend, dass $\mathfrak{v}(F_1) + \mathfrak{v}(F_2)$ die Vierecksbedingung erfüllt, dass also in einem Tetraeder jeweils nur *ein* Typ von normalen Vierecken in F_1 und F_2 auftritt.

Das reguläre Umschalten setzt sich entlang der Schnittkurven $F_1 \cap F_2$ fort. Global kann man sich die Addition von F_1 und F_2 also wie folgt vorstellen.

Zunächst zerschneidet man F_1 und F_2 an einer regulären Umgebung $U(F_1 \cap F_2)$ der Schnittkurven. Die Komponenten von $(F_1 \cup F_2) \setminus U(F_1 \cap F_2)$ nennen wir

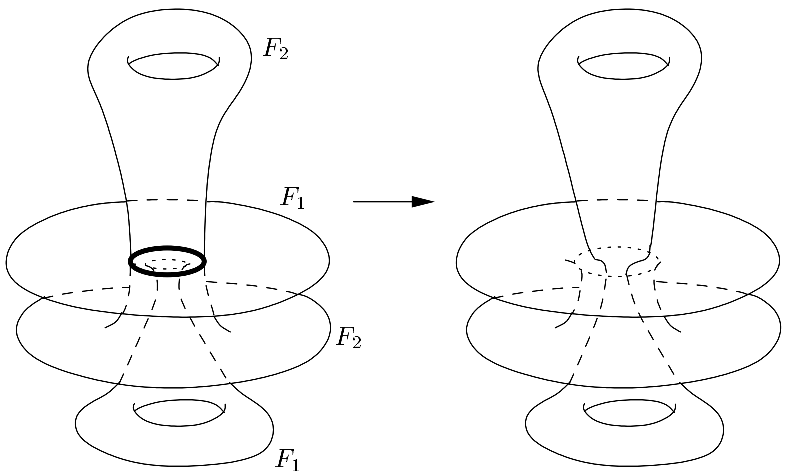


Abbildung 4.9: Globales Umschalten

Flicken oder **Patches**. Jeder Flicken ist entweder in F_1 oder in F_2 enthalten. Entlang jeder Schnittkurve werden die anstoßenden Flicken durch Streifen bzw. Annuli verbunden. Für das Umschalten gibt es jeweils zwei Möglichkeiten. Wie oben gesehen führt genau eine davon auf eine Normalfläche — und diese ist $F_1 \cup F_2$. Abbildung 4.9 zeigt ein Beispiel: Sowohl F_1 als auch F_2 sind Tori mit Loch (also homöomorph zu Σ_1^1), und wenn entlang der fett gezeichneten Schnittkurve so wie gezeigt umgeschaltet wird, entsteht ein Annulus und eine Σ_2^0. Die andere Umschaltung würde auf zwei disjunkte Tori mit Loch führen.

Die geometrische Interpretation ist sehr hilfreich für viele Beweistechniken. Man beachte, dass eine solche Interpretation für die Addition pränormaler Flächen nicht möglich ist, da hier reguläres Umschalten nur in $\mathcal{T}^2$ definiert ist, sich aber im Allgemeinen nicht entlang der Schnittkurven der zu addierenden Flächen fortsetzt. Wenn aus $F_1 \cup F_2$ durch Umschalten eine neue Fläche F entsteht, so kann leicht zeigen (Übung!) dass $\chi(F) = \chi(F_1) + \chi(F_2)$. Die Euler-Charakteristik ist also insbesondere additiv bezüglich der Addition von Normalflächen. Auch dies ist ein oft benutztes Beweishilfsmittel.

Definition 4.2.8 *Eine Normalfläche $F \subset M$ heißt* ***Fundamentalfläche****, falls sie sich nicht als nicht-triviale Summe schreiben lässt, d.h. falls es keine Normalflächen $F_1, F_2 \neq \emptyset$ gibt mit $F_1 + F_2 = F$.*

Wie in den nächsten Abschnitten klar werden wird, sind die Fundamentalflächen eine sehr reichhaltige Klasse von Flächen. Wenn beispielsweise M ein Knotenaußenraum ist, so findet man unter den Fundamentalflächen eine Seifertfläche von minimalem Geschlecht. Der Schlüssel zu allen algorithmischen Anwendungen der Normalflächentheorie ist das folgende Theorem von Wolfgang Haken.

Theorem 4.2.9 *Zu jeder Triangulation $\mathcal{T}$ einer kompakten 3-Mannigfaltigkeit gibt es nur endlich viele Fundamentalflächen, und sie lassen sich algorithmisch konstruieren.*

Beweis Die Normalgleichungen bilden ein lineares Gleichungssystem mit ganzzahligen Koeffizienten. Genauer gesagt gibt es in jeder Normalgleichung genau vier Koeffizienten vom Betrag 1, und alle anderen sind Null. Wir suchen nach Lösungen in $\mathbb{N}_0^{7n}$. Dies ist ein Problem der Ganzzahligen Programmierung (für einen Überblick, siehe zB. [59]). Man kann zeigen, dass die Menge aller nichtnegativen ganzzahligen Lösungen eines linearen Gleichungssystems mit ganzzahligen Koeffizienten additiv endlich erzeugt ist. Ein minimales Erzeugendensystem heißt *minimale Hilbertbasis* und ist eindeutig bestimmt. Es gibt allgemeine Abschätzungen für die Maximumnorm der Elemente einer minimalen Hilbertbasis.

Im Fall der Normalgleichungen ergibt sich die Aussage, dass alle nichtnegativen ganzzahligen Lösungen sich in der Form $\sum n_i \mathfrak{v}_i$ darstellen lassen, mit $n_i \in \mathbb{N}_0$ und Lösungen der Normalgleichung $\mathfrak{v}_i \in \mathbb{N}^{7n}$ mit $\|\mathfrak{v}_i\|_{max} \leq 7n \cdot 2^{7n}$. Manche nichtnegativen ganzzahligen Lösungen der Normalgleichungen mit Maximumnorm $\leq 7n \cdot 2^{7n}$ lassen sich möglicherweise noch als nichttriviale Summe anderer solcher Lösungen schreiben — man lässt sie einfach weg und erhält so die minimale Hilbertbasis $\mathcal{H}$ der Normalgleichungen.[1] Es sei nun $F \subset M$ eine Normalfläche. Wir wollen zeigen, dass F genau dann eine Fundamentalfläche ist, wenn $\mathfrak{v}(F) \in \mathcal{H}$. Daraus folgt unmittelbar das Theorem.

Wenn F nicht fundamental ist, so gibt es $F_1, F_2 \neq \emptyset$ mit $F = F_1 + F_2$. Damit gilt auch $\mathfrak{v}(F) = \mathfrak{v}(F_1) + \mathfrak{v}(F_2)$. Da $\mathfrak{v}(F_1), \mathfrak{v}(F_2) \neq 0$ die Normalgleichungen erfüllen, ist also $\mathfrak{v}(F) \notin \mathcal{H}$.

Wenn umgekehrt $\mathfrak{v}(F)$ kein Element der minimalen Hilbertbasis ist, so gibt es nichtnegative ganzzahlige Lösungen $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2 \neq 0$ der Normalgleichungen mit $\mathfrak{v}(F) = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2$. Der Vektor $\mathfrak{v}(F)$ erfüllt die Vierecksbedingung. Sie besagt, dass bei gewissen Tripeln von Einträgen von $\mathfrak{v}(F)$ jeweils höchstens ein Eintrag von Null verschieden ist. Da $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2$ nichtnegativ sind, ihre Summe aber $\mathfrak{v}(F)$ ergibt, so sind mindestens diejenigen Einträge von $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2$ Null, für die der entsprechende Eintrag von $\mathfrak{v}(F)$ Null ist. Also erfüllen auch $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2$ die Vierecksbedingung. Daher gibt es Normalflächen $F_1, F_2 \neq \emptyset$ mit $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}(F_1)$ und $\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{v}(F_2)$, und damit $F = F_1 + F_2$. Also ist F keine Fundamentalfläche. □

Aus dem vorigen Beweis (der sich von dem ursprünglichen Beweis Hakens unterscheidet) ergibt sich eine Abschätzung für die Anzahl der in Fundamentalflächen auftretenden normalen Drei- und Vierecke sowie für die Anzahl der Schnittpunkte mit $\mathcal{T}^1$. Diese Abschätzungen wurden in jüngerer Zeit mehrfach für Analysen topologischer Probleme genutzt, zB. in [19, 20], [29]–[33].

4.3 Normalisierung inkompressibler Flächen

Im nächsten Abschnitt wollen wir zeigen, dass jede Seifertfläche von minimalem Geschlecht isotop zu einer Normalfläche ist. Tatsächlich werden wir einen allgemeineren Satz beweisen. Wir werden in diesem Abschnitt einige Zusatzeigenschaften mancher 3-Mannigfaltigkeiten und mancher eigentlich eingebetteter Flächen beschreiben, die im Beweis entscheidend sind. In diesem Abschnitt sei M eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit. Wenn jede zahm eingebettete 2-Sphäre $S \subset M$ der Rand eines in M eingebetteten 3-Balles ist, so heißt M **irreduzibel**.

[1] Es gibt auch schnellere Wege, die minimale Hilbertbasis zu konstruieren.

Beispiel 4.3.1

1. Der Satz von Alexander-Schönflies [64] besagt: Wenn $S \subset S^3$ eine zahme eingebettete 2-Sphäre mit einer offenen regulären Umgebung $U(S) \subset S^3$ ist, so ist $S^3 \backslash U(S)$ eine disjunkte Vereinigung von zwei 3-Bällen. Insbesondere sind S^3, B^3 und $\overline{B^3}$ alle irreduzibel. Man beachte, dass nicht-zahme (wilde) eingebettete 2-Sphären die S^3 nicht in Bälle zerlegen.

2. Für einen Knoten $K \subset S^3$ ist auch der Knotenaußenraum M^K irreduzibel, denn wenn $S \subset M^K \subset S^3$ eine zahme eingebettete 2-Sphäre ist, so zerlegt S die 3-Sphäre in *zwei* Bälle — der eine enthält K (denn K ist zusammenhängend!), der andere ist demnach in M^K enthalten.

3. Wenn $M = S^2 \times S^1$ und $S = S^2 \times \{p\}$ für einen Punkt $p \in S^1$, dann ist $M \setminus S \approx S^2 \times]0,1[$ und damit nicht homöomorph zu einem Ball. Insbesondere ist $S^2 \times S^1$ nicht irreduzibel (ist also **reduzibel**).

4. Wenn $M = M_1 \# M_2$ eine zusammenhängende Summe ist (siehe Kapitel 2.2.3) und $M_1, M_2 \not\approx S^3$, so ist M reduzibel. Die 2-Sphäre in M, entlang der $M_1 \setminus B^3$ und $M_2 \setminus B^3$ miteinander verklebt sind, berandet dann nämlich keinen Ball in M.

Das folgende Lemma zeigt, wie die Existenz von Bällen typischerweise genutzt wird.

Lemma 4.3.2 *Es seien $D_1, D_2 \subset M$ eingebettete abgeschlossene Scheiben, die einen gemeinsamen Rand haben und ansonsten disjunkt sind (also $D_1 \cap D_2 = \partial D_1 = \partial D_2$). Ferner sei $B \subset M$ ein eingebetteter abgeschlossener 3-Ball mit $\partial B = D_1 \cup D_2$. Dann kann D_1 in D_2 umgeformt werden durch eine Isotopie in B, welche $\partial D_1 = \partial D_2$ fest lässt.*

Beweis Es sei $\phi\colon B \approx \overline{B^3}$. Dann ist $\phi(D_1 \cup D_2) = S^2 = \partial \overline{B^3}$. Nach dem Satz von Jordan-Schönflies gibt es einen Homöomorphismus $\psi\colon S^2 \approx S^2$, welcher D_1 auf die Nordhemisphäre abbildet, also $\psi(D_1) = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2\colon x_3 \geq 0\}$. Man kann als Übung zeigen, dass ψ zu einem Homöomorphismus $\tilde{\psi}\colon \overline{B^3} \approx \overline{B^3}$ fortgesetzt werden kann (*Hinweis:* Nutze $\overline{B^3} \approx S^2 \times [0,1]/\!\sim$ mit $(x,1) \sim (y,1)$ für alle $x, y \in S^2$; siehe Übung 1.6.3.2).

Offenbar gibt es eine Isotopie $H\colon \overline{B^2} \times [0,1] \to \overline{B^3}$, die die Nordhemisphäre $\{(x_1, x_2, x_3) \in S^2\colon x_3 \geq 0\}$ zur Südhemisphäre $\{(x_1, x_2, x_3) \in S^2\colon x_3 \leq 0\}$ bewegt. Dann ist $\phi^{-1} \circ \tilde{\psi}^{-1} \circ H\colon \overline{B^2} \times [0,1] \to B$ die gewünschte Isotopie, die D_1 nach D_2 bewegt. □

Als nächstes befassen wir uns mit Eigenschaften von zahmen eigentlich eingebetteten zusammenhängenden Flächen $F \subset M$. Eine eingebettete abgeschlossene Scheibe $D \subset M$ mit $\partial D = F \cap D$ heißt **Kompressionsscheibe** von F, wenn es eine Einbettung $\phi\colon \overline{B^2} \times [-1,1] \hookrightarrow M$ gibt mit $\phi(\overline{B^2} \times 0) = D$ und $F \cap \mathit{Bild}(\phi) = \phi(S^1 \times [-1,1])$, so dass keine Zusammenhangskomponente von $F \setminus \phi(S^1 \times [-1,1])$ eine Scheibe ist. In Abbildung 4.10 sind die zwei typischen Beispiele von Kompressionsscheiben dargestellt: Im ersten Fall wird die Fläche durch den Rand der Kompressionsscheibe nicht zerlegt, im zweiten Fall wird sie zerlegt. Die Existenz der Produktumgebung von D stellt unter anderem sicher,

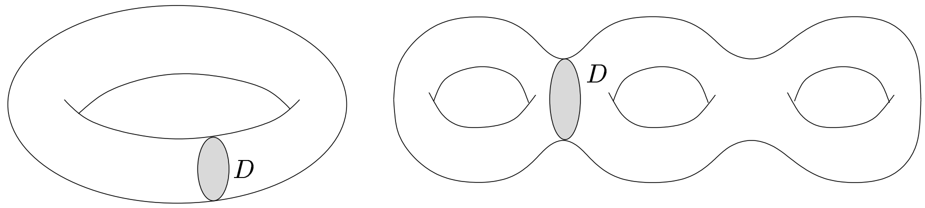


Abbildung 4.10: Kompressionsscheiben D eingebetteter Flächen

dass D zahm eingebettet ist. Die Fläche F heißt **inkompressibel**, wenn es zu F keine Kompressionsscheibe gibt. Man beachte, dass nach dem Satz von Jordan-Schönflies *jede* zahme eigentliche Einbettung der 2-Sphäre, der abgeschlossenen Scheibe oder der projektiven Ebene inkompressibel ist, denn jede geschlossene Kurve in diesen drei Flächen berandet eine Scheibe. Aus diesem Grund schließen manche Autoren die S^2, $\overline{B^2}$ und $P^2_{\mathbb{R}}$ ausdrücklich aus der Definition inkomressibler Flächen aus.

Man kann zeigen, dass jede in S^3 eingebettete geschlossene Fläche $\not\approx S^2$ nicht inkompressibel (also *kompressibel*) ist. Viele Beweistechniken in der dreidimensionalen Topologie funktionieren nur für solche 3-Mannigfaltigkeiten, in denen inkompressible Flächen $\not\approx S^2$ existieren — dazu werden wir in späteren Abschnitten weitere Anmerkungen geben. In Beweisen wird Inkompressibilität vorausgesetzt, um Lemma 4.3.2 anwenden zu können: Wenn $D_1 \subset M$ eine abgeschlossene Scheibe mit $\partial D_1 = F \cap D_1$ ist und F inkompressibel ist, so berandet ∂D_1 auch eine Scheibe $D_2 \subset F$; Lemma 4.3.2 führt dann auf eine Isotopie von F, falls M irreduzibel ist.

Bei den Begriffen *irreduzibel* und *inkompressibel* spielte der Rand von M keine Rolle. Wir müssen nun noch analoge Begriffe bereitstellen, die den Rand miteinbeziehen. Es sei M eine zusammenhängende kompakte 3-Mannigfaltigkeit und $X \subset \partial M$ eine abgeschlossene Teilmenge von ∂M (in unseren Anwendungen handelt es sich hierbei um das 1-Gerüst einer Triangulation oder um den Meridian eines Knotens). Dann heißt M **∂-irreduzibel** relativ zu X, wenn für jede zahme eigentlich eingebettete abgeschlossene Scheibe $D \subset M \setminus X$ eine Scheibe $D' \subset \partial M \setminus X$ mit $\partial D = \partial D'$ existiert, so dass $D \cup D'$ einen 3-Ball in M berandet. Wenn $X = \emptyset$, so sagen wir einfach, M sei ∂–irreduzibel. Natürlich ist jede 3–Mannigfaltigkeit ohne Rand ∂–irreduzibel.

Beispiel 4.3.3

1. Es folgt wieder aus dem Satz von Alexander-Schönflies, dass $\overline{B^3}$ ∂-irreduzibel ist.

2. Mit Ausnahme von $\overline{B^3}$ sind alle Henkelkörper (siehe Beispiel 2.2.5) irreduzibel, aber nicht ∂-irreduzibel.

Übung 4.3.4 Zeige, dass eine kompakte zusammenhängende irreduzible 3-Mannigfaltigkeit genau dann ∂-irreduzibel ist, wenn $\partial M \subset M$ inkompressibel ist.

Lemma 4.3.5 *Es sei M^K ein Knotenaußenraum mit einer Triangulation $\mathcal{T}$, und es sei ein Meridian m_K in $\mathcal{T}^1 \cap \partial M^K$ enthalten. Dann ist M^K irreduzibel und ∂-irreduzibel relativ zu m_K.*

Beweis Wie in Beispiel 4.3.1.2 gezeigt, ist M^K irreduzibel. Es sei $D \subset M^K \backslash m_K$ eine zahme eigentlich eingebettete abgeschlossene Scheibe. Wenn ∂D in $\partial M^K \setminus m_K$ keine Scheibe berandet, dann ist ∂D in ∂M^K isotop zu m_K, denn $\partial M^K \backslash m_K$ ist ein Annulus. Also berandet ∂D eine Meridianscheibe $D' \subset U(K) \subset S^3$ von K. Der Knoten K schneidet die 2-Sphäre $D \cup D' \subset S^3$ transversal in genau einem Punkt (nämlich in $K \cap D'$). Das ist aber unmöglich, weil $S^3 \setminus (D \cup D')$ nach dem Satz von Alexander-Schönflies zwei Zusammenhangskomponenten besitzt.

Folglich ist ∂D der Rand einer Scheibe $D'' \subset \partial M_K \setminus m_K$. Weil $S^3 \setminus (D \cup D'')$ nach dem Satz von Alexander-Schönflies in zwei Bälle zerfällt und weil M^K zusammenhängend ist, ist einer dieser Bälle in M^K enthalten. □

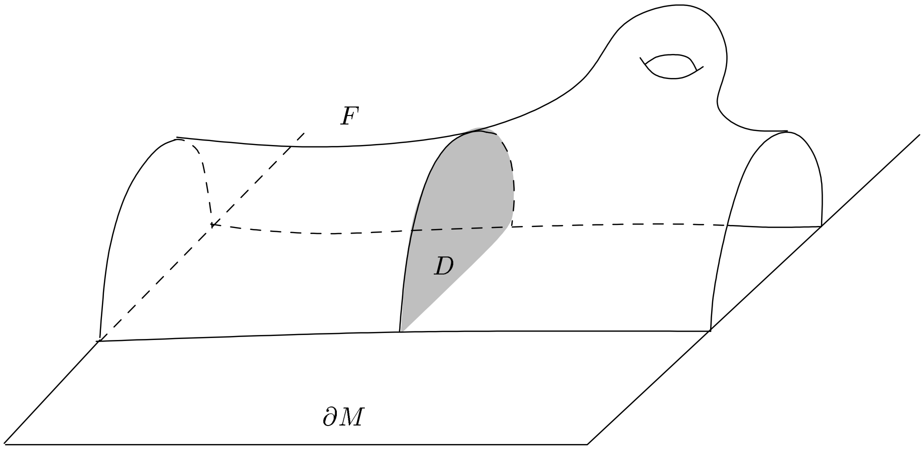


Abbildung 4.11: Eine ∂-Kompressionsscheibe D einer Fläche F

Es seien M, $X \subset \partial M$ wie oben, und es sei $F \subset M$ eine zahme eigentlich eingebettete zusammenhängende Fläche. Es sei $D \subset M \setminus X$ wie in Abbildung 4.11 eine eingebettete abgeschlossene Scheibe, so dass $\partial D \subset F \cup \partial M$, wobei jeweils $D \cap F = \partial D \cap F$ und $D \cap \partial M = \partial D \cap \partial M$ ein zusammenhängender Weg (ein *Bogen*) ist. Ferner sei $\phi\colon \overline{B^2} \times [-1,1] \hookrightarrow M \setminus X$ eine Einbettung mit $\phi(\overline{B^2} \times 0) = D$ und $(F \cup \partial M) \cap Bild(\phi) = \phi(S^1 \times [-1,1])$. Dann heißt D eine **∂-Kompressionsscheibe** relativ zu X, wenn $F \setminus \phi(S^1 \times [-1,1])$ aus zwei Komponenten besteht, von denen keine eine zu X disjunkte Scheibe ist. Wenn F keine ∂-Kompressionsscheibe relativ zu X besitzt, so heißt F **∂-inkompressibel** relativ zu X.

Lemma 4.3.6 *Es sei M^K ein Knotenaußenraum mit einer Triangulation $\mathcal{T}$, und es sei ein Meridian m_K in $\mathcal{T}^1 \cap \partial M^K$ enthalten. Es sei $F \subset M^K$ eine Seifert-Fläche von minimalem Geschlecht. Dann ist F inkompressibel und ∂-inkompressibel relativ zu m_K.*

Beweis Wir zeigen, dass F inkompressibel ist. Es sei $D \subset M^K$ eine eigentlich eingebettete abgeschlossene Scheibe und $\phi\colon \overline{B^2} \times [-1,1] \hookrightarrow M^K$ mit $\phi(\overline{B^2} \times 0) = D$ wie in der Definition von Kompressionsscheiben. Wie in Abbildung 4.12 verdeutlicht definieren wir

$$F_D := \big(F \setminus \phi(S^1 \times [-1,1])\big) \cup \phi(\overline{B^2} \times \{-1,1\}).$$

Wir sagen, dass F_D aus F durch **Eingriff** an D entstanden ist (englisch *surgery*). Bei diesem Eingriff wird aus F ein Annulus entlang ∂D entfernt und stattdessen zwei Kopien von D eingeklebt. Weil die Euler-Charakteristik des Annulus verschwindet, ist $\chi(F_D) = \chi(F) + 2$.

Weil F orientierbar ist, ist auch F_D orientierbar. Wie man in Abbildung 4.10 sieht, kann F_D aus einer oder zwei Zusammenhangskomponenten bestehen; in jedem Fall sei F' die Zusammenhangskomponente von F_D, die ∂F enthält. Dann ist $F' \subset M^K$ eine Seifert-Fläche von K. Es sei $F'' = F_D \setminus F'$; das ist eine zusammenhängende Fläche oder die leere Menge. Es gilt $\chi(F) + 2 = \chi(F_D) =$

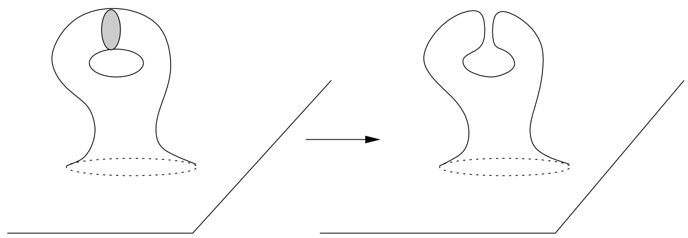


Abbildung 4.12: Eingriff an einer Scheibe

$\chi(F') + \chi(F'')$. Weil F eine Seifertfläche von minimalem Geschlecht ist, muss gelten $\chi(F') \leq \chi(F)$. Also ist $\chi(F'') \geq 2$. Weil F'' zusammenhängend ist, muss nach der Klassifikation von Flächen gelten $F'' \approx S^2$. Demnach ist

$$F'' \setminus \phi(\overline{B^2} \times [-1,1]) \subset F$$

eine Scheibe. Folglich ist D keine Kompressionsscheibe.

Wir zeigen nun, dass F ∂-inkompressibel relativ zu m_K ist. Angenommen, es gäbe eine ∂-Kompressionsscheibe $D \subset M^K$ relativ zu m_K. Dann sei $\phi\colon \overline{B^2} \times [-1,1] \hookrightarrow M^K \setminus m_K$ eine Aufdickung von D wie in der Definition von ∂-Kompressionsscheiben. Durch Eingriff von F an D entsteht die orientierbare Fläche $F_D := \Big(F \setminus \phi(\overline{B^2} \times [-1,1])\Big) \cup \phi(\overline{B^2} \times \{-1,1\})$. Der Eingriff besteht im Entfernen einer abgeschlossenen Scheibe entlang $\partial D \cap F$ und Hinzufügen zweier Kopien von D. Also ist $\chi(F_D) = \chi(F) + 1$. Es gilt $\partial F_D \cap m_K = \partial F \cap m_K$, denn D ist zu m_K disjunkt. Wenn ∂F_D zusammenhängend wäre, so wäre demnach F_D eine Seifert-Fläche; aber wegen $\chi(F_D) = \chi(F) + 1$ wäre dies ein Widerspruch zum minimalen Geschlecht von F. Also besteht ∂F_D aus zwei Komponenten; die Komponente, die den Meridian m_K (in genau einem Punkt) schneidet, heiße α, die andere β.

Weil $\partial M^K \setminus (m_K \cup \alpha)$ eine Scheibe ist, berandet β nach dem Satz von Jordan-Schönflies eine zu $m_K \cup \alpha$ disjunkte abgeschlossene Scheibe D'. Zusammen mit einer in das Innere von M^K verschobenen Kopie von D' erhalten wir aus F_D eine orientierbare zahme eigentlich eingebettete Fläche F'_D, so dass $\partial F'_D$ den Meridian m_K in genau einem Punkt schneidet. Daher ist eine Zusammenhangskomponente von F'_D eine Seifert-Fläche. Doch wegen $\chi(F'_D) = \chi(F_D) + 1 = \chi(F) + 2$ folgt daraus wieder, dass die andere Zusammenhangskomponente von F'_D eine 2-Sphäre ist. Dies ist nur möglich, wenn ∂D von F eine zu m_K disjunkte Scheibe abschneidet, wenn also D keine Kompressionsscheibe ist. □

Übung 4.3.7 Es sei $V := \overline{B^2} \times S^1$ der abgeschlossene Volltorus. Beweise ähnlich wie im vorigen Lemma, dass für jede zahme eigentlich eingebettete Scheibe $D \subset V$ entweder ∂D eine Scheibe in ∂V berandet oder ∂D in ∂V isotop zu $\overline{B^2} \times \{p\}$ für einen Punkt $p \in S^1$ ist. Insbesondere folgt, dass der Meridian eines Knotens bis auf Isotopie eindeutig bestimmt ist.

Definition 4.3.8 *Für eine zahme eigentlich eingebettete zu $\mathcal{T}$ transversale Fläche $F \subset M$ sei $\|F\|$ die Anzahl der Schnittpunkte von F mit $\mathcal{T}^1$.*

Theorem 4.3.9 *Es sei M eine irreduzible ∂-irreduzible kompakte 3-Mannigfaltigkeit. Es sei $\mathcal{T}$ eine Triangulation von M und $\Gamma \subset \mathcal{T}^1 \cap \partial M$. Es sei $F \subset M$ eine zahme eigentlich eingebettete zusammenhängende Fläche, die inkompressible und ∂-inkompressibel relativ zu Γ ist und die nicht in einem 3-Ball in M enthalten ist. Dann kann man $(F, \partial F)$ in $(M, \partial M)$ durch eine relative Isotopie in eine Normalfläche bzgl. $\mathcal{T}$ umformen, so dass darüber hinaus $\|F\|$ minimal ist.*

Beweis Durch eine Isotopie, die ∂M als Menge festlässt, arrangieren wir F so, dass F zu keinem Simplex von $\mathcal{T}$ tangential ist (insbesondere enthält F keine Ecke von $\mathcal{T}$). Wir nehmen ferner an, dass $\|F\|$ minimal ist. Es sei $t \subset M$ ein Tetraeder von $\mathcal{T}$ (also ein abgeschlossenes 3-Simplex).
Schritt 1: Angenommen, es gäbe eine Zusammenhangskomponente α von $F \cap \partial t$, die keine Scheibe in $F \cap t$ berandet. Nach dem Satz von Jordan-Schönflies berandet α eine abgeschlossene Scheibe $\tilde{D} \subset \partial t$. Falls im Inneren von $\tilde{D}$ eine weitere Komponente α' von $F \cap \partial t$ liegt, die keine Scheibe in $F \cap t$ berandet, so ersetzen wir $\tilde{D}$ durch eine kleinere von α' berandete Scheibe. Auf diese Weise können wir voraussetzen, dass mit Ausnahme von α jede in $\tilde{D}$ enthaltene Komponente von $F \cap \partial t$ eine Scheibe in $F \cap t$ berandet.[2]

Wir ergänzen die äußerste Komponente von $\tilde{D} \setminus F$ durch Kopien von Scheiben aus $F \cap t$ (siehe Abbildung 4.13) und erhalten eine von α berandete Scheibe in $D \subset t$ (nicht notwendig $D \subset \partial t$), so dass $D \cap F = \alpha$. Weil F inkompressible

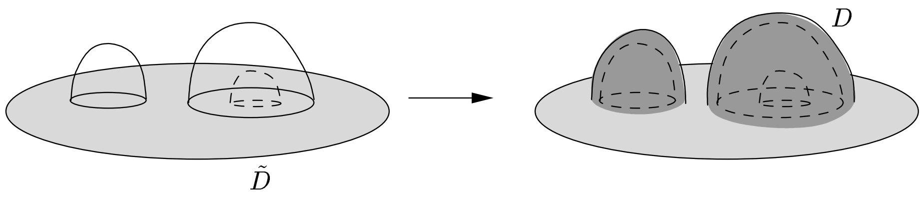


Abbildung 4.13: Konstruktion einer Scheibe in t

ist, ist D keine Kompressionsscheibe. Also berandet α eine Scheibe $D' \subset F$. Weil M irreduzibel ist, berandet die 2-Sphäre $D \cup D'$ einen abgeschlossenen 3-Ball $B \subset M$. Weil F nach Voraussetzung zusammenhängend und nicht in einem 3-Ball enthalten ist, folgt $F \cap B = D'$. Nach Lemma 4.3.2 ist $F' := (F \setminus D') \cup D$ zu F isotop.[3] Wenn wir noch $D' \subset F'$ in das Innere von t verschieben, erhalten wir eine zu F isotope Fläche $\tilde{F}$, die transversal zu den Simplexen von $\mathcal{T}$

[2] Dieses Argument nennt man *innermost disc argument*.
[3] Derartige Argumente nennt man auch *cut-and-paste-Technik*.

ist; ferner gilt $\tilde{F} \cap \mathcal{T}^2 \subset (F \cap \mathcal{T}^2) \setminus \alpha$. Wir iterieren diesen Prozess. Aus Kompaktheitsgründen erhalten wir nach *endlich vielen* Schritten eine zu F isotope Fläche, deren Schnitt mit jedem Tetraeder von $\mathcal{T}$ aus Scheiben besteht und deren Schnitt mit $\mathcal{T}^2$ in $F \cap \mathcal{T}^2$ enthalten ist. Der Einfachheit halber bezeichnen wir diese Fläche weiterhin mit F.

Schritt 2: Angenommen, es gäbe einen Weg γ enthalten in einer Kante e von

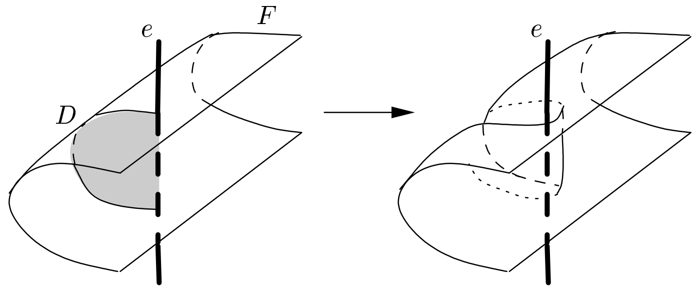


Abbildung 4.14: Doppelter Schnitt mit einer Kante

t, so dass *beide* Endpunkte von γ im Rand derselben Komponente C von $F \cap t$ liegen. Dann gibt es einen Weg $\beta \subset C$ mit $\partial\beta = \partial\gamma = \beta \cap \gamma$. Weil C nach dem Ergebnis von Schritt 1 eine Scheibe ist, wird nach dem Satz von Alexander-Schönflies t durch C in zwei Bälle zerlegt. Der einfach geschlossene Weg $\beta \cup \gamma$ liegt im Rand einer dieser Bälle und berandet in diesem eine abgeschlossene Scheibe D; siehe Abbildung 4.14 links. Dabei können wir voraussetzen, dass D transversal zu F ist. Durch ein *innermost disc argument* können wir wie in Schritt 1 voraussetzen, dass $D \cap F \subset \partial D$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

i) Wenn e nicht in ∂M enthalten wäre, so könnten wir F wie in Abbildung 4.14 rechts dargestellt quer über D ziehen und so die Anzahl der Schnittpunkte von F mit $\mathcal{T}^1$ um zwei reduzieren. Das stünde aber im Widerspruch zur Minimalität von $\|F\|$.

ii) Wenn e in ∂M enthalten ist, so schneidet β von F eine zu Γ disjunkte Scheibe $D' \subset F$ ab, denn andernfalls würde durch Verschieben von D eine zu $\mathcal{T}^1 \cap \partial M$ disjunkte ∂-Kompressionsscheibe von F relativ zu Γ entstehen, die es aber nach Voraussetzung nicht gibt. Die Vereinigung $D \cup D'$ ist eine in M eigentlich eingebettete Scheibe, und weil M ∂-irreduzibel relativ zu Γ ist, schneidet $D \cup D'$ von M einen zu Γ disjunkten abgeschlossenen 3-Ball B ab. Weil F zusammenhängend und nicht in einem Ball enthalten ist, folgt $F \cap B = D'$. Ähnlich wie im Beweis von Lemma 4.3.2 kann man F durch Isotopie in $F' := (F \setminus D') \cup D$ umformen, wobei diese Isotopie ∂M als Menge fest lässt (Übung!). Dadurch können wir die Anzahl der Schnittpunkte von F mit $\mathcal{T}^1$ um mindestens zwei reduzieren. Doch auch dies stünde im Widerspruch zur Minimalität von $\|F\|$.

Schritt 3: Nach Schritt 1 und 2 müssen wir jetzt nur noch mit Komponenten C von $F \cap t$ fertig werden, deren Rand keine Kante von t trifft. Dann berandet C in einem 2-Simplex von t eine Scheibe D. Wäre $\partial C \subset \partial M$, so wäre $C = F$ (denn F ist zusammenhängend), doch das ist unmöglich, weil F nach Voraussetzung nicht in einem Ball (nämlich in t) enthalten ist. Es ist also ∂C noch im Rand eines weiteren Tetraeders $t' \neq t$ von $\mathcal{T}$ enthalten. Nach Schritt 1 berandet ∂C auch eine Scheibe C' in $F \cap t'$. Also ist $F = C \cup C'$ eine 2-Sphäre. Doch $t \cup t'$

ist ein 3-Ball, der F enthält, und dies ist nach Voraussetzung unmöglich. Die Schritte 1–3 unseres Beweises haben also auf eine zu F isotope Normalfläche mit minimalem $\|F\|$ geführt. □

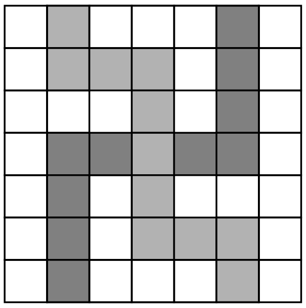
4.4 Fundamentale Seifertflächen

Wir möchten in diesem Abschnitt zeigen, wie man zu einem beliebigen zahmen Knoten eine Seifertfläche von minimalem Geschlecht algorithmisch konstruieren kann. Wir werden dazu (in Form einer Übung) eine geeignete Triangulation des Knotenkomplementes konstruieren, und werden dann zeigen, dass es unter den zu dieser Triangulation gehörenden Fundamentalflächen eine Seifert-Fläche von minimalem Geschlecht gibt.

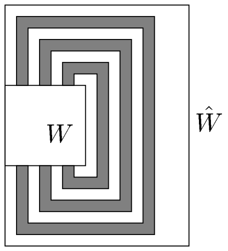
Weil die Fundamentalflächen konstruierbar sind, erhalten wir einen *effektiven* Algorithmus (der Algorithmus tut also, was er soll). Jedoch ist dieser Algorithmus ziemlich langsam (er ist nicht *effizient*), weil die Komplexität der Fundamentalflächen i.A. exponentiell in der Anzahl der Tetraeder steigt. Es ist jedoch bisher kein schneller Algorithmus bekannt. Tatsächlich wäre die Existenz eines schnellen Algorithmus eine Sensation, denn nach neueren Ergebnissen ist die Bestimmung des Geschlechts eines Knotens in einer kompakten 3-Mannigfaltigkeit (hier sind nicht nur Knoten in S^3 zugelassen) NP-hart [1].

Übung 4.4.1 Ziel dieser Aufgabe ist es, zu einem beliebig vorgegebenen Knoten $K \subset S^3$ eine Triangulation $\mathcal{T}$ des Knotenkomplements M^K zu finden, so dass ein Meridian m_K in $\mathcal{T}^1$ enthalten ist. Dazu sei K als geschlossener Zopf $\hat{b}$ gegeben, was ja nach dem Satz von Markov möglich ist. Es sei $b \in \mathcal{Z}_n$, und es sei b ein Wort der Länge k in den Erzeugenden $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$.

1. Wir betrachten $\sigma_i \in \mathcal{Z}_n$ als Teilmenge des Würfels $W := [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$. Wir dicken die Fäden von σ_i etwas auf und erhalten so eine *reguläre Umgebung* $U(\sigma_i)$. Man zerlege $W \setminus U(\sigma_i)$ in kleine Quader (analog zu Triangulation nennt man dies eine Kubulation); wie viele Quader, ausgedrückt in n, wurden verwendet? Die Abbildung könnte vielleicht bei der Ideenfindung helfen.



2. Unter Verwendung der vorigen Teilaufgabe findet man nun auch ein Kubulation von $W \setminus U(b)$. Wieviele Quader enthält sie, ausgedrückt in k und n?
3. Es sei nun $\hat{W} \supset W$ ein größerer Würfel, und wir bilden den geschlossenen Zopf $K = \hat{b} \subset \hat{W}$. Man konstruiere eine Kubulation von $\hat{W} \setminus U(K)$, wieder unter Beachtung der Anzahl der Quader.



4. Wie kann man einen Quader in Tetraeder unterteilen? Wenn man alle Quader der Kubulation von $\hat{W} \setminus U(K)$ unterteilt, erhält man eine *Triangulation* von $\hat{W} \setminus U(K)$.

5. Wie gewinnt man daraus schließlich eine Triangulation von $M^K = S^3 \setminus U(K) \supset \hat{W} \setminus U(K)$? Anzahl der Tetraeder?

Bemerkung 4.4.2 Es hat in den letzten Jahren einige wichtige Arbeiten über die algorithmische Komplexität von Problemen der 3-dimensionalen Topologie gegeben. Die explizite Konstruktion von Triangulationen war dabei stets ein Hilfsmittel.

Wenn man wie in der obigen Übung eine Triangulation des Knotenaußenraumes zu einem gegebenen geschlossenen Zopf konstruiert hat, so kann man die zugehörigen Fundamentalflächen bestimmen. Für jede Fundamentalfläche lässt sich leicht prüfen, ob sie orientierbar ist und den Meridian des Knotens genau einmal schneidet, also ob sie tatsächlich eine Seifert-Fläche ist. Zu allen fundamentalen Seifert-Flächen bestimmt man nun noch das Geschlecht. Das folgende Theorem besagt nun, dass das Minimum der Geschlechter fundamentaler Seifert-Flächen das Geschlecht des Knotens ist. Wir erhalten also einen Algorithmus zur Bestimmung des Knotengeschlechts. Insbesondere kann dieser Algorithmus den trivialen Knoten erkennen. Vorsichtshalber sei bemerkt, dass es im Allgemeinen mehrere zueinander nicht isotope Seifert-Flächen von minimalem Geschlecht gibt, und dass der Algorithmus nicht *alle* Isotopieklassen findet, sondern nur mindestens eine; allerdings lässt sich auch dieses Problem mittels Normalflächentheorie lösen.

Theorem 4.4.3 *Es sei $\mathcal{T}$ eine Triangulation des Knotenaußenraumes M^K, so dass ein Meridian $m_K \subset \partial M^K$ in $\mathcal{T}^1 \cap \partial M^K$ enthalten ist. Dann befindet sich unter den Fundamentalflächen bezüglich $\mathcal{T}$ eine Seifert-Fläche von minimalem Geschlecht.*

Beweis Nach Lemma 4.3.5 ist M^K irreduzibel und ∂-irreduzibel relativ zu m_K. Nach Lemma 4.3.6 sind Seifert-Flächen von minimalem Geschlecht inkompressibel und ∂-inkompressibel relativ zu m_K. Also gibt es nach Theorem 4.3.9 eine Normalfläche F, welche eine Seifert-Fläche von minimalem Geschlecht ist, so dass zudem $\|F\|$ unter allen Seifertflächen von minimalem Geschlecht minimal ist. Wir nehmen nun an, dass F keine Fundamentalfläche ist. Also ist $F = G_1 + G_2$ für nicht-leere Normalflächen G_1, G_2. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir weiter annehmen, dass unter allen solchen Summendarstellungen die Anzahl der Schnittkurven $G_1 \cap G_2$ minimal ist. Da F zusammenhängend ist, folgt $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$.

Wir interpretieren die Summe $G_1 + G_2$ geometrisch wie in Abschnitt 4.2.2. Als Zwischenziel wollen wir zeigen, dass weder G_1 noch G_2 eine 2-Sphäre, projektive Ebene oder Scheibe ist. Dazu werden wir zeigen, dass unter den Flicken $(G_1 \cup G_2) \setminus U(G_1 \cap G_2)$ sich *keine* zu ∂M^K disjunkte Scheibe befindet. Um einen Widerspruchsbeweis zu führen, nehmen wir an, es gäbe einen solchen Flicken D, oBdA enthalten in G_1. Wir wählen ferner D so, dass $\|D\|$ minimal ist. Es sei $\gamma \subset G_1 \cap G_2$ die Schnittkurve, entlang der ∂D verläuft, und es sei $A_i := G_i \cap U(\gamma)$ für $i = 1, 2$. Offenbar ist A_i ein Annulus oder Möbiusband.

Wenn A_1 ein Möbiusband wäre, so wäre $A_1 \cup D$ eine in $M^K \subset S^3$ eingebettete projektive Ebene; man kann zeigen (das werden wir hier nur zitieren), dass dies nicht geht. Also ist A_1 ein Annulus. Man sieht relativ leicht[4], dass dann auch A_2 ein Annulus ist; entscheidend dafür ist, dass A_1 eine orientierbare Fläche in einer orientierbaren 3-Mannigfaltigkeit ist und man daher Ober- und Unterseite von A_1 in $U(\gamma)$ unterscheiden kann.

Durch Umschalten an allen Schnittkurven entsteht F. Die Kurve $\beta := \partial A_1 \setminus \partial D$ ist in F enthalten, und sie berandet die Scheibe $A_1 \cup D \subset M^K$; eine leicht verschobene Kopie dieser Scheibe schneidet F nur noch in β. Weil F gemäß Lemma 4.3.6 inkompressibel ist, berandet demnach β eine Scheibe $D' \subset F$. Die Scheibe D' ist aus Flicken von $G_1 \cup G_2$ zusammengesetzt; nach dem Satz von Jordan-Schönflies muss einer dieser Flicken selbst wieder eine Scheibe sein. Weil wir aber $\|D\|$ minimal gewählt haben, folgt $\|D'\| \geq \|D\|$ mit Gleichheit genau dann wenn D' ein Flicken ist. Wir erhalten drei Fälle.
i) Es sei $\|D'\| > \|D\|$. Da M^K irreduzibel ist, berandet $D \cup A_1 \cup D'$ einen Ball in M^K. Man sieht leicht, dass F das Innere des Balls nicht trifft. Also ist nach Lemma 4.3.2 F isotop zu $F' := (F \setminus D') \cup D$, bei festgehaltenem Rand. Offenbar ist F' eine Seifertfläche, und $\|F'\| < \|F\|$ nach Konstruktion. Wir erhalten einen Widerspruch zur Minimalität von $\|F\|$.
ii) Es sei D' ein in G_1 enthaltener Flicken. Dann ist $S := D \cup A_1 \cup D'$ eine Zusammenhangskomponente von G_1, homöomorph zur 2-Sphäre. Es sei $F' := (G_1 \setminus S) + G_2$; diese Summe von Normalflächen ist definiert, wie man leicht sieht. Weil M^K irreduzibel ist, berandet S einen Ball $B \subset M^K$, und weil G_2 die Sphäre S transversal schneidet, trifft F' sowohl das Innere von B als auch $M^K \setminus B$. Es folgt, dass $F' \setminus S$ unzusammenhängend ist. Das bedeutet, dass keine der möglichen Umschaltungen von $F' \cup S$ auf eine zusammenhängende Fläche führen kann. Weil aber $F = G_1 + G_2 = (G_1 \setminus S) + S + G_2 = F' + S$ nach Definition zusammenhängend ist, ist dies ein Widerspruch.
iii) Es sei D' ein Flicken in G_2. Dann sei $G_1' := (G_1 \setminus D) \cup D'$ und $G_2' := (G_2 \setminus D') \cup D$. Beim regulären Umschalten von $G_1' \cup G_2'$ entlang γ kann nicht D mit D' verbunden werden, denn andernfalls würde $D \cup D'$ auf eine in F enthaltene 2-Sphäre führen, ein Widerspruch. Das bedeutet aber, dass $G_1' \cup G_2'$ aus $G_1 \cup G_2$ durch *reguläres* Umschalten entlang γ entsteht. Daher sind G_1' und G_2' normal. Weil $G_1' \cup G_2'$ aus $G_1 \cup G_2$ durch reguläres Umschalten entsteht, folgt $G_1' + G_2' = G_1 + G_2 = F$. Doch besteht $G_1' \cap G_2'$ aus weniger Schnittkurven als $G_1 \cap G_2$ (der Schnitt in γ wurde ja aufgelöst!), was ein Widerspruch zur Wahl von G_1, G_2 ist.

Weil alle Möglichkeiten zu einem Widerspruch führten, haben wir unsere Annahme ad absurdum geführt: Kein Flicken ist eine zu ∂M disjunkte Scheibe. Es folgt, dass G_1 (und ebenso G_2) keine Sphäre ist[5], denn nach dem Satz von Jordan-Schönflies und mit einem *innermost disc argument* wäre mindestens ein Flicken von $G_1 \setminus G_2$ eine Scheibe.

Analog zu den obigen Überlegungen kann man zeigen, dass es keinen zu m_K disjunkten Flicken von $G_1 + G_2$ gibt, welcher eine Scheibe ist und ∂M^K in genau einem Bogen trifft; hierzu verwendet man, dass F ∂-inkompressibel relativ zu m_K ist. Ein Beweis kann als Übung geführt werden oder in [42] nachgelesen werden. Angenommen, G_1 (analog G_2) wäre eine Scheibe. Jede geschlossene

[4] Wie gesagt — wir werden hier viele Details auslassen!
[5] ... auch keine projektive Ebene, aber die kann sowieso nicht in M^K eingebettet sein.

Schnittkurve von $G_1 \cap G_2$ würde mit einem *innermost disc argument* auf einen zur Scheibe homöomorphen Flicken im Inneren von M führen, ein Widerspruch. Also besteht $G_1 \cap G_2$ aus eigentlich eingebetteten Bögen. Nach dem Satz von Jordan-Schönflies zerlegt jeder von ihnen G_1 in zwei Scheiben. Wieder mit einem *innermost disc argument* würde die Existenz eines Flickens folgen, der eine zu m_K disjunkte Scheibe ist und ∂M^K in genau einem Bogen trifft — ein Widerspruch. Damit haben wir unser Zwischenziel erreicht: Weder G_1 noch G_2 sind Scheiben, 2-Sphären oder projektive Ebenen.

Weil Scheiben, 2-Sphären und projektive Ebenen die einzigen Flächen mit positiver Euler-Charakteristik sind, folgt $\chi(G_1), \chi(G_2) \leq 0$. Wegen der Additivität der Euler-Charakteristik gilt $\chi(F) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$ und demnach $\chi(G_1), \chi(G_2) \geq \chi(F)$. Wir können nötigenfalls durch Umbenennung erreichen, dass ∂G_1 den Meridian m_K in genau einem Punkt schneidet und ∂G_2 zu m_K disjunkt ist, denn $G_1 + G_2$ ist eine Seifert-Fläche. Wir möchten zeigen, dass G_1 orientierbar ist. Wir wählen eine Orientierung von F und erhalten insbesondere auf jedem Flicken von $G_1 + G_2$ eine Orientierung. An jede Schnittkurve γ von $G_1 \cap G_2$ stoßen mit Vielfachheit gezählt zwei in G_1 enthaltene Flicken. Wenn die Orientierung dieser Flicken entlang γ kompatibel ist, so nennen wir γ *direkt*, andernfalls *indirekt*. Wir schalten nun $G_1 \cup G_2$ an allen direkten Schnittkurven

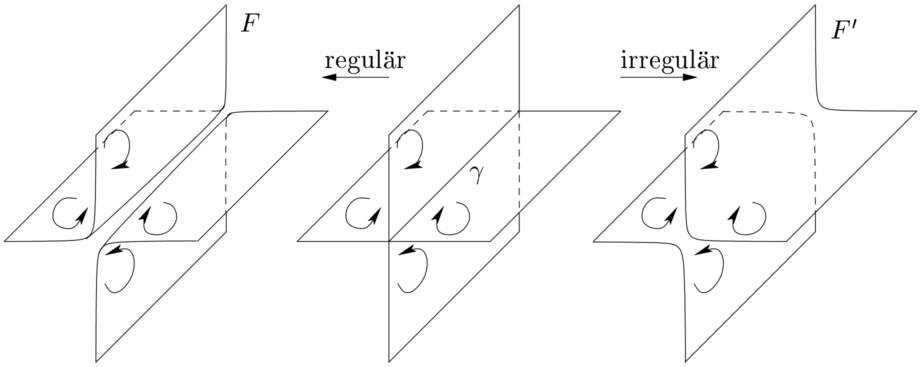


Abbildung 4.15: Irreguläres Umschalten an indirekten Kurven

regulär und an allen indirekten Schnittkurven *irregulär* um. Die so entstehende Fläche nennen wir F'. Nach Voraussetzung entsteht durch reguläres Umschalten die orientierbare Fläche F. Man sieht an Abbildung 4.15, dass demnach auch F' orientierbar ist, $\|F'\| = \|F\|$, und $\partial F'$ schneidet m_K in genau einem Punkt. Ferner schneidet jede Zusammenhangskomponente von F' das 1-Gerüst $\mathcal{T}^1$, denn dies gilt schon für jeden Flicken.

Es sei nun F_0 die Zusammenhangskomponente von F', welche m_K schneidet. Es folgt aus der Nichtexistenz von Scheiben-Flicken, dass $\chi(F_0) \geq \chi(F') = \chi(F)$ (auch in [42] ist das nur eine Übung...). Wenn F_0 keine Seifert-Fläche wäre (das wäre genau dann der Fall, wenn ∂F_0 unzusammenhängend wäre), so folgte wie im letzten Absatz des Beweises von Lemma 4.3.6 die Existenz einer Seifertfläche, deren Euler-Charakteristik echt größer ist als $\chi(F_0) \geq \chi(F)$. Doch das ist ein Widerspruch dazu, dass F von minimalem Geschlecht ist. Also ist F_0 eine Seifertfläche, und $\chi(F_0) = \chi(F)$. Hätte F' außer F_0 noch andere Komponenten, so wäre $\|F_0\| < \|F'\| = \|F\|$, im Widerspruch zur Minimalität von $\|F\|$. Also ist $F' = F_0$ eine Seifert-Fläche von minimalem Geschlecht.

Wenn nun G_1 nicht orientierbar ist, so gibt es mindestens eine indirekte Kurve. Dann ist F' nicht normal, und es gibt ein 2-Simplex σ und einen Bogen in $F' \cap \sigma$, dessen Endpunkte in nur *einer* Kante von σ liegen — vergleiche Abbildung 4.14. Durch Isotopie können wir offenbar $\|F'\|$ um zwei reduzieren, im Widerspruch zur Minimalität von $\|F'\| = \|F\|$. Also ist G_1 orientierbar. G_1 ist eine Seifert-Fläche, denn sonst fänden wir wieder wie im letzten Absatz des Beweises von Lemma 4.3.6 eine Seifertfläche, deren Euler-Charakteristik $\chi(G_1) \geq \chi(F)$ übersteigt, im Widerspruch zur Minimalität des Geschlechts von F. Ferner gilt $\|G_1\| = \|F\| - \|G_2\| < \|F\|$, denn wir setzten voraus, dass $G_2 \neq \emptyset$. Doch das ist unmöglich, da $\|F\|$ minimal gewählt war. Wir haben also die Annahme, dass F sich als nicht-triviale Summe schreiben lässt, ad absurdum geführt. Also ist F fundamental. $\square$

Bemerkung 4.4.4 Wenn wir durch irreguläres Umschalten an indirekten Schnittlinien von $G_1 \cap G_2$ die Fläche $\tilde{F}$ erzeugen, erhalten wir zwar möglicherweise eine Seifert-Fläche von minimalem Geschlecht, doch ist diese im Allgemeinen nicht zu F isotop. Insbesondere können wir nicht behaupten, dass die Menge der Fundamentalflächen einen Repräsentanten jeder Isotopieklasse von Seifert-Flächen von minimalem Geschlecht enthält.

4.5 Haken-Mannigfaltigkeiten

Man mag sich fragen: Muss denn ein so komplexer Beweis wie der von Theorem 4.4.3 sein, nur um die Berechenbarkeit des Knotengeschlechts zu beweisen? Es gibt mehrere Gründe, den Aufwand für lohnend zu halten, einerseits im Hinblick auf das Ergebnis, andererseits im Hinblick auf die entwickelten Beweistechniken. Zunächst zum Ergebnis: Die Berechenbarkeit des Knotengeschlechts impliziert auch einen Algorithmus, der erkennt, ob ein gegebener Knoten trivial ist oder nicht. Das ist ohne Zweifel ein fundamentales Problem, und es war überhaupt nicht evident, dass dieses Problem eine algorithmische Lösung besitzt. Inzwischen gibt es mehrere Algorithmen, die den trivialen Knoten erkennen können, darunter auch solche, die nicht mit Fundamentalflächen arbeiten — doch muss man bei *allen* bekannten Algorithmen auf Theorem 4.4.3 zurückgreifen, um ihre Korrektheit zu beweisen. In dieser Hinsicht ist Theorem 4.4.3 also unverzichtbar.

Viel wichtiger sind jedoch die verwendeten Beweistechniken. Wenn man nämlich den Beweis analysiert, stellt man fest, dass er noch in erheblich allgemeineren Kontexten funktioniert. Es sei M eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit mit einem „Muster“ $\Gamma \subset \partial M$. Um die Techniken im Beweis von Theorem 4.4.3 anwenden zu können, müssen wir voraussetzen, dass M irreduzibel sowie ∂-irreduzibel relativ zu Γ ist, und dass M keine Einbettung der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ zulässt. Letzteres ist keine große Einschränkung, denn es gibt nur eine irreduzible kompakte orientierbare 3-Mannigfaltigkeit mit einer eingebetteten projektiven Ebene, nämlich den projektiven Raum[6] $P^3_{\mathbb{R}}$. Es sei nun $F \subset M$ eine zahme eigentlich eingebettete zusammenhängende Fläche, nicht homöomorph zu S^2. Wenn wir die Techniken aus dem Beweis von Theorem 4.4.3 anwenden

[6] Er entsteht aus $\overline{B^3}$ durch identifizieren diametral gegenüberliegender Punkte von $\partial\overline{B^3}$, und $\partial\overline{B^3}$ wird bei dieser Identifikation zu einer projektiven Ebene

wollen, muss F zweiseitig, inkompressibel und ∂-inkompressibel relativ zu Γ sein. Es ist nicht selbstverständlich, dass es eine solche Fläche F in M gibt. Das führt auf folgende Definitionen.

Definition 4.5.1 *Es sei M eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit. Eine zahme eigentlich eingebettete inkompressible und ∂-inkompressible Fläche $F \not\approx S^2, P^2_{\mathbb{R}}$, welche zudem nicht unter Festhalten von ∂F isotop zu einer Teilmenge von ∂M ist, heißt* ***wesentliche Fläche****.*

Definition 4.5.2 *Eine* ***Haken-Mannigfaltigkeit*** *ist eine kompakte irreduzible ∂-irreduzible 3-Mannigfaltigkeit M, welche eine zweiseitige wesentliche Fläche enthält.*

Bemerkung 4.5.3 Jede kompakte irreduzible ∂-irreduzible 3-Mannigfaltigkeit M mit nicht-leerem Rand ist eine Haken-Mannigfaltigkeit, mit der einzigen Ausnahme $M \approx \overline{B^3}$.

Haken-Mannigfaltigkeiten sind nach Wolfgang Haken (geb. 1928) benannt, der auch durch den Beweis des Vierfarbensatzes (mit K. Appel) bekannt wurde. Haken entwarf einen Algorithmus, der erkennt, ob zwei Haken-Mannigfaltigkeiten zueinander homöomorph sind oder nicht. Allerdings traten in seinem ursprünglichen Ansatz mehrere Lücken auf, von denen die (hoffentlich!) letzte erst vor wenigen Jahren durch Sergei Matveev [42] geschlossen wurde. Stark vereinfacht ausgedrückt ist die Grundstruktur dieses Algorithmus wie folgt.

1. Es sei M eine Haken-Mannigfaltigkeit. Konstruiere eine *endliche* Menge $\mathcal{F}_M$ von zweiseitigen wesentlichen Flächen in M, so dass es für jede zweiseitige wesentliche Fläche F in M von minimalem Geschlecht einen Homöomorphismus $\phi\colon M \approx M$ gibt mit $\phi(F) \in \mathcal{F}_M$.

2. Iteriere Schritt 1. für sämtliche möglichen Zerlegungen $M_F := M \setminus U(F)$ mit $F \in \mathcal{F}_M$. Beende die Iteration, wenn gewisse „Grundbausteine“ erreicht sind. Am Ende ist also M auf viele verschiedene Weisen in Grundbausteine zerlegt.

3. Erkenne mit Hilfe weiterer Algorithmen, welche Grundbausteine vorliegen. Analysiere ferner, in welchen „Mustern“ die Grundbausteine in M zusammengefügt sind.

4. Zwei Haken-Mannigfaltigkeiten M_1, M_2 sind homöomorph genau dann wenn die durch den Algorithmus gefundenen Zerlegungen von M_1 und M_2 im Wesentlichen dieselben sind.

Dieses Schema erfordert noch viele Kommentare, die wir im Rest dieses Abschnitts abgeben werden. In **Schritt 1.** sollen zweiseitige wesentliche Flächen konstruiert werden. Wir wissen bereits, dass wir uns auf die Konstruktion wesentlicher *Normal*flächen beschränken können (Theorem 4.3.9). Die Konstruktion basiert auf dem folgenden Satz, den man mit ähnlichen Methoden wie in Theorem 4.4.3 beweisen kann.

Satz 4.5.4 (Theorem 4.1.36 in[42]) *Es sei M eine triangulierte Haken-Mannigfaltigkeit und $F \subset M$ eine inkompressible ∂-inkompressible Normalfläche $\not\approx$*

$S^2, \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}, \overline{B^2}$, so dass $\|F\|$ minimal für alle zu F isotopen Flächen ist. Wenn $F = G_1 + G_2 + \cdots + G_m$ für Normalflächen $G_1, \ldots, G_m \subset M$, so sind die $G_1, \ldots, G_m$ inkompressibel, ∂-inkompressibel und nicht homöomorph zu $\not\approx S^2, \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}, \overline{B^2}$.

Es ist übrigens nicht wahr, dass die $G_1, \ldots, G_m$ zweiseitig sind, wenn F zweiseitig ist. Der Grund dafür ist wie in Bemerkung 4.4.4. Dieses Problem wiegt allerdings nicht schwer, denn wenn F einseitig, inkompressibel und ∂-inkompressibel ist, so ist $F + F$ zweiseitig, inkompressibel und ∂-inkompressibel (aber möglicherweise isotop zu einer Komponente von ∂M).

Besonders hilfreich ist der eben zitierte Satz, wenn M keine zweiseitigen wesentlichen Tori und Kleinschen Flaschen enthält (dann heißt M **atoroidal**) sowie keine zweiseitigen wesentlichen Annuli und Möbiusbänder enthält (dann heißt M **anannular**). Unter dieser Voraussetzung gibt es nur endlich viele Isotopieklassen von wesentlichen Flächen zu gegebener Euler-Charakteristik. Es sei nämlich $F \subset M$ eine zweiseitige wesentliche Normalfläche der Euler-Charakteristik c. Wir schreiben F als Summe $F_1 + \cdots + F_k$ von Fundamentalflächen. Wegen Satz 4.5.4 haben alle in der Summe auftretenden Fundamentalflächen eine nicht-positive Euler-Charakteristik. Wegen der Additivität der Euler-Charakteristik gilt also $\chi(F) \leq \chi(F_i) \leq 0$. Insbesondere kann es nur $|c|$ Summanden von negativer Euler-Charakteristik geben. Wenn $\chi(F_i) = 0$, so ist F_i ein Torus, Annulus, Möbiusband oder eine Kleinsche Flasche. Wegen Satz 4.5.4 können wir F bis auf Isotopie so wählen, dass F_i ferner inkompressibel und ∂-inkompressibel ist. Also ist F_i isotop zu einer Komponente von ∂M oder einseitig, denn M ist atoroidal und anannular. Für die Anzahl solcher Summanden kann man eine obere Schranke $n_{c,\mathcal{T}}$ finden (siehe [42]). Damit ist gezeigt: Jede zweiseitige wesentliche Fläche der Euler-Charakteristik c in M ist isotop zu einer Summe von höchsten $|c| + n_{c,\mathcal{T}}$ Fundamentalflächen — und es gibt nur endlich viele solche Summen.

Im Allgemeinen wird jedoch M zweiseitige wesentliche Annuli und Tori enthalten. Dann gibt es im Allgemeinen unendlich viele Isotopieklassen von zweiseitigen wesentlichen Flächen gegebener Euler-Charakteristik. Es ist daher wichtig, dass man in Schritt 1 nicht verlangt, dass F isotop zu einem Element von $\mathcal{F}_M$ ist.

Zu **Schritt 2** ist zunächst anzumerken, dass wir hier grob vereinfacht haben. Wenn man nämlich an wesentlichen Flächen *mit Rand* aufgeschnitten hatte, so liefern die Ränder dieser Schnittflächen ein Muster $\Gamma \subset \partial M$. Dieses wird im Laufe der Iteration immer umfangreicher, und die Begriffe ∂-irreduzibel und ∂-inkompressibel sind alle relativ zu Γ zu verstehen.

Wir können hier nicht erklären, wie die „Grundbausteine“ des Haken-Algorithmus aussehen. Zu beachten ist dabei aber, dass es in den Grundbausteinen unter Umständen noch zweiseitige wesentliche Flächen gibt, wir aber darauf verzichten, an ihnen weiter aufzuschneiden. Die ursprünglich verwendete Liste der Grundbausteine war unvollständig, woraus sich eine schwere Lücke im Algorithmus ergab. Erst nach mehreren Jahrzehnten wurde diese Lücke von Sergei Matveev entdeckt und geschlossen [42]. Man kann zeigen, dass die Iteration des Zerschneidungsprozesses nach *endlich vielen* Schritten auf Grundbausteine führt. Unser Schritt 2 endet also mit endlich vielen Zerlegungen von M in Grundbausteine.

In **Schritt 3** müssen wir die Grundbausteine algorithmisch erkennen. Das ist für gewisse Klassen von Grundbausteinen sehr schwer und geht über die

Theorie der Normalflächen deutlich hinaus.

Der Hintergrund von **Schritt 4** sowie für die Endlichkeit der Iteration ist die Theorie der **Hierarchien**, die wir hier nicht näher darstellen können. Auf ihrer Grundlage wurden noch einige weitere wichtige Ergebnisse über Haken-Mannigfaltigkeiten bewiesen. Zum Abschluss dieses Kapitels möchten wir eines davon erwähnen: einen Spezialfall des **Satzes von Waldhausen**, der auch die Grundlage von Theorem 3.2.23 ist. Vergleiche [42, Theorem 6.2.2].

Theorem 4.5.5 (Waldhausen 1968) *Wenn zwei geschlossene Haken-Mannigfaltigkeiten isomorphe Fundamentalgruppen besitzen, so sind sie homöomorph.*

Der Haken-Algorithmus liefert einen algorithmischen Zugang, der Satz von Waldhausen liefert einen algebraischen Zugang, und Arbeiten von William Thurston (vgl. Abschnitt 5.2) liefern einen geometrischen Zugang zu Haken-Mannigfaltigkeiten. In diesem Sinne sind Haken-Mannigfaltigkeiten gut verstanden, so dass sich das Forschungsinteresse in den letzten Jahren zunehmend auf **Nicht-Haken-Mannigfaltigkeiten** verlagert — dies sind kompakte irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten, die nicht hakensch sind. Nicht-Haken-Mannigfaltigkeiten haben nach Bemerkung 4.5.3 keinen Rand. Zu diesen zählt unter anderem die S^3. Ist es nicht seltsam, dass eine so „einfache" Mannigfaltigkeit wie die 3-Sphäre mit so gewaltigen Mitteln wie der Haken-Theorie nicht zu verstehen ist?

Kapitel 5

Zerlegungssätze für 3-Mannigfaltigkeiten

Die in diesem Kapitel besprochenen Zerlegungssätze stellen den ersten Schritt in Richtung einer Klassifikation von kompakten 3-Mannigfaltigkeiten dar. Eine solche Klassifikation kann natürlich nicht so einfach sein wie die Klassifikation von Flächen (Theorem 2.3.1). Wie wir im vorigen Kapitel sahen, ist es von Vorteil, mit irreduziblen Mannigfaltigkeiten zu arbeiten, und noch besser, wenn diese sogar atoroidal sind. Also ist es eine naheliegende Idee, reduzible toroidale Mannigfaltigkeiten an eingebetteten 2-Sphären und Tori zu zerschneiden und so zu vereinfachen. Die Klassifikation von kompakten 3-Mannigfaltigkeiten wäre damit auf den irreduziblen atoroidalen Fall zurückgeführt. Das alles setzt voraus, dass eine Zerlegung an Sphären und Tori stets existiert und ein im Wesentlichen eindeutiges Ergebnis hat. Darum geht es in den ersten beiden Abschnitten dieses Kapitels. Es zeigt sich, dass man die Forderung nach Atoroidalität etwas abschwächen muss. Laut Thurstons Geometrisierungsvermutung, die wir in Unterabschnitt 5.2.1 kurz besprechen, gelingt die Klassifikation mit Methoden der Geometrie: Die durch die Zerlegung entstehenden Bruchstücke sind Quotienten von „Modellräumen“ nach der Operation durch eine diskrete Gruppe von Isometrien. Einer wichtigen Klasse von Mannigfaltigkeiten, die bei der Zerlegung auftreten, sind die im Schlussabschnitt beschriebenen Seifert-Mannigfaltigkeiten.

5.1 Primzerlegung

In Abschnitt 2.2.3 lernten wir zusammenhängende Summen von Mannigfaltigkeiten kennen. Hier möchten wir zeigen, dass jede 3-Mannigfaltigkeit im Wesentlichen eindeutig in eine zusammenhängende Summe von 3-Mannigfaltigkeiten zerlegt werden kann, wobei die Summanden selbst nicht mehr weiter zerlegt werden können. Man nennt dies die **Primzerlegung** von Mannigfaltigkeiten.

Definition 5.1.1 *Eine kompakte n-Mannigfaltigkeit $M \not\approx S^n$ heißt* ***prim****, wenn aus $M \approx M_1 \# M_2$ folgt $M_1 \approx S^n$ oder $M_2 \approx S^n$.*

Manche Autoren betrachten auch S^n als prim, aber dann ist Theorem 5.1.3 unten umständlicher zu formulieren. Man kann relativ leicht zeigen, dass der Torus, die Kleinsche Flasche, die projektive Ebene und die abgeschlossene Scheibe die einzigen primen Flächen sind. Doch schon ab Dimension 3 gibt es unendlich viele verschiedene prime kompakte Mannigfaltigkeiten, denn offensichtlich ist jede kompakte irreduzible 3-Mannigfaltigkeit außer S^3 prim. Eine prime 3-Mannigfaltigkeit kann durchaus noch nicht-zerlegende Sphären enthalten, wie in der folgenden Übung.

Übung 5.1.2

1. Zeige, dass $S^2 \times S^1$ prim, aber reduzibel ist.

2. Zeige, dass $S^2 \times S^1$ die einzige prime reduzible geschlossene orientierbare 3-Mannigfaltigkeit ist.

3. Finde eine prime reduzible geschlossene nicht-orientierbare 3-Mannigfaltigkeit und beweise ihre Eindeutigkeit.

Hellmuth Kneser [34] bewies 1929 den folgenden Satz über die Eindeutigkeit der Primzerlegung von kompakten 3-Mannigfaltigkeiten. In seinem Beweis führte Kneser den Begriff der Normalflächen ein.

Theorem 5.1.3 (Kneser 1929) *Jede kompakte orientierbare* 3*-Mannigfaltigkeit $M \not\approx S^3$ lässt sich als zusammenhängende Summe $M \approx P_1\# \dots \#P_k$ von primen* 3*-Mannigfaltigkeiten $P_1, \dots, P_k$ schreiben. Die Summanden sind bis auf Vertauschung und Homöomorphismen eindeutig durch M bestimmt.*

Wir werden dieses Theorem in den folgenden Unterabschnitten beweisen. Wenn man zu Knesers Existenzbeweis der Primzerlegung noch die Theorie der Fundamentalflächen hinzunimmt, erhält man eine Zerlegung von M in prime Mannigfaltigkeiten und möglicherweise einige Kopien von S^3. Das größte Problem ist, die überflüssigen S^3-Summanden algorithmisch zu erkennen. Doch auch dieses Problem wurde durch Rubinstein [56] und Thompson [66, 67] (siehe auch [42]) in den 1990er Jahren durch einen Erkennungsalgorithmus für die 3-Sphäre gelöst. Es gibt also einen Algorithmus für die Primzerlegung von 3-Mannigfaltigkeiten. Dies werden wir im letzten Unterabschnitt näher erläutern.

Um der einfachen Formulierung willen haben wir in Theorem 5.1.3 vorausgesetzt, dass M orientierbar ist. Ein ähnlicher Zerlegungssatz gilt auch für nicht-orientierbare 3-Mannigfaltigkeiten, mit einer kleinen technischen Komplikation. In Übung 5.1.2.3 wurde hoffentlich gezeigt, dass es genau eine nicht-orientierbare prime reduzible geschlossene 3-Mannigfaltigkeit gibt. Sie ist der Quotient von $[0, 1] \times S^2$ nach der durch $(0, (x, y, z)) \sim (1, (-x, -y, -z))$ (für alle $(x, y, z) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$) erzeugten Äquivalenzrelation und wird üblicherweise mit $S^1 \tilde{\times} S^2$ bezeichnet. Man kann zeigen, dass für nicht-orientierbare kompakte 3-Mannigfaltigkeiten N gilt $N\#S^1 \times S^2 \approx N\#S^1 \tilde{\times} S^2$. In der Primzerlegung einer nichtorientierbaren kompakten 3-Mannigfaltigkeit lässt man daher keine $S^1 \times S^2$-Summanden zu (man kann sie ja durch $S^1 \tilde{\times} S^2$ ersetzen), und dann ist die Zerlegung eindeutig bis auf Vertauschung und Homöomorphismen. Wir führen den Beweis von Theorem 5.1.3 auch für den nichtorientierbaren Fall.

5.1.1 Knesers Endlichkeitssatz

Kneser verwendete keine Fundamentalflächen. Sein Beweis basiert auf einem anderen Endlichkeitsresultat über Normalflächen, das wir in diesem Unterabschnitt behandeln möchten.

Lemma 5.1.4 (Knesers Lemma) *Es gibt eine Konstante $c > 0$, so dass Folgendes gilt.*
In jeder triangulierten 3-Mannigfaltigkeit mit $n \in \mathbb{N}$ Tetraedern gibt es in jeder Normalfläche $F \subset M$ mit mehr als $c \cdot n$ Zusammenhangskomponenten mindestens zwei zueinander normal isotope Zusammenhangskomponenten.

Im Hinblick auf algorithmische Anwendungen versuchte man in den letzten Jahren, die Konstante c möglichst klein zu machen. Derzeitiger Stand der Dinge ist, dass Lemma 5.1.4 mit $c = 2$ gilt [4]. Knesers Lemma 5.1.4 gilt sogar für pränormale Flächen F, also nicht nur für Normalflächen. Im Rest dieses Unterabschnitts werden wir einen Beweis in Form von Übungen skizzieren. Aus dem Beweis ergibt sich ein konkreter Wert für c. Es sei M eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit mit einer Triangulation $\mathcal{T}$ über n Tetraedern. Es sei $\mathcal{F} \subset M$ eine pränormale Fläche mit Zusammenhangskomponenten $F_1, \ldots, F_k$.

Definition 5.1.5 *Eine Zusammenhangskomponente F_i von $\mathcal{F}$ heißt* ***flankiert****, falls es für jedes 2-Simplex σ von $\mathcal{T}$ und für jeden Normalbogen $\alpha \subset \sigma \cap F_i$ in jeder Komponente von $\sigma \setminus \alpha$ einen zu α normal isotopen Bogen in $\mathcal{F} \cap \sigma$ gibt. Wenn es in jeder Komponente von $\sigma \setminus \alpha$ sogar mindestens zwei zu α normal isotope Bögen in $\mathcal{F} \cap \sigma$ gibt, so heißt F_i* ***doppelt flankiert****.*

Übung 5.1.6

1. Verdeutliche diese Definitionen durch eine Zeichnung.

2. Finde eine Konstante c, so dass aus $k > c \cdot n$ bereits folgt, dass $\mathcal{F}$ eine doppelt flankierte Zusammenhangskomponente besitzt. *Hinweis:* Wie viele Normalbögen gibt es höchstens in $\mathcal{F}$, die nicht auf beiden Seiten von zwei dazu normal Isotopen Normalbögen begleitet sind? Wie viele Zusammenhangskomponenten können also schlimmstenfalls *nicht* doppelt flankiert sein?

3. Zeige: Wenn $\mathcal{F}$ eine doppelt flankierte Zusammenhangskomponente besitzt, dann sind zwei Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{F}$ zueinander normal isotop. *Hinweis:* Löse das Problem zunächst für Normalkurven und verwende dann, dass eine pränormale Fläche bereits durch ihren Schnitt mit dem 1-Gerüst $\mathcal{T}^1$ bestimmt ist.
   Mit dieser und der vorigen Übung folgt Lemma 5.1.4. □

4. Warum reicht für die vorige Aussage nicht „flankiert“ statt „doppelt flankiert“? *Hinweis:* Übung 4.2.6.

5.1.2 Beweis von Theorem 5.1.3

Zerlegung an Sphären Es sei M eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit, und es sei $M = N_1 \# N_2$ für nicht notwendig prime N_1, N_2. Wir setzen nicht voraus, dass M orientierbar ist. Nach Definition der zusammenhängenden Summe (Unterabschnitt 2.2.3) entsteht M aus N_1 und N_2, indem man zunächst offene 3-Bälle mit zahmem Abschluss B_1, B_2 aus N_1 und N_2 herausschneidet und entlang der als Rand entstehenden 2-Sphäre verklebt. Genausogut kann man definieren, dass es in M eine zahme eingebettete 2-Sphäre $S \subset M$ gibt, so dass $M \setminus U(S)$ zwei Zusammenhangskomponenten $\hat{N}_1, \hat{N}_2$ besitzt (eine solche Sphäre heißt **zerlegend**), aus denen N_1 und N_2 durch Ankleben abgeschlossener 3-Bälle B_1, B_2 entsteht.

Wenn nun N_2 weiter zerfällt in $N_3 \# N_4$ durch Zerlegen an einer 2-Sphäre $S' \subset N_2$, so können wir durch eine Isotopie S' aus B_2 herausschieben. Wir können also $S' \subset \hat{N}_2$ voraussetzen. Die Zerlegung $M = N_1 \# (N_3 \# N_4)$ können wir also durch Zerlegen an der disjunkten Vereinigung zweier zerlegender Sphären $S \cup S' \subset M$ gewinnen. Dabei entstehen N_1, N_3, N_4 aus den drei Zusammenhangskomponenten von $M \setminus U(S \cup S')$ durch Ankleben von insgesamt vier Bällen. Es folgt die Assoziativität der zusammenhängenden Summenzerlegung (Das löst Übung 2.2.9.2!), denn auch $M = (N_1 \# N_3) \# N_4$ wird durch $S \cup S'$ realisiert. Durch Induktion folgt, dass die Primzerlegung von M durch eine disjunkte Vereinigung zerlegender Sphären in M beschrieben werden kann.

Aus beweistechnischen Gründen wollen wir M allerdings auch an nicht-zerlegenden Sphären aufzuschneiden. Für eine nicht-zerlegende Sphäre $S \subset M$ gibt es einen zahmen doppelpunktfreien Weg $\alpha \subset M \setminus U(S)$, der die beiden Komponenten von $\partial U(S)$ verbindet (man kann zeigen, dass eingebettete Sphären stets zweiseitig sind). Man kann zeigen (vgl. Übung 5.1.2 oder [21]), dass $\partial U(S) \cup U(\alpha)$ eine zahm eingebettete zerlegende Sphäre ist, und dass $U(S) \cup U(\alpha)$ einen primen *reduziblen* Summanden $P_{S,\alpha}$ von M bestimmt. Durch S und α wird also eine Zerlegung $M = N_S \# P_{S,\alpha}$ bestimmt. Wenn M nicht orientierbar ist, könnte eine lokale Orientierung entlang α erhalten bleiben oder sich ändern, wodurch $P_{S,\alpha}$ von der Wahl von α abhängig wird: Im ersten Fall ist $P_{S,\alpha} \approx S^1 \times S^2$, im zweiten Fall ist $P_{S,\alpha} \approx S^1 \tilde{\times} S^2$.

Der Summand N_S hängt auch im nicht-orientierbaren Fall bis auf Homöomorphismen *nicht* von der Wahl von α ab, denn er entsteht aus $M \setminus U(S)$ durch Ankleben zweier Bälle entlang $\partial U(S)$. Über die primen Summanden der Form $P_{S,\alpha}$ muss man gesondert Buch führen. Darin besteht für unseren Beweis kein Problem, weil die Induktion im folgenden Absatz nur über nicht-prime Summanden läuft, also $P_{S,\alpha}$ ohnehin nicht weiter betrachtet wird. In dieser Weise ist der Begriff „Zerlegung von M an zahm eingebetteten Sphären in eine zusammenhängende Summe“ zu verstehen, wenn wir in den folgenden Absätzen auf nicht-zerlegende Sphären stoßen.

Existenz der Zerlegung Die Grundidee ist, M sukzessive an zahm eingebetteten Sphären in zusammenhängende Summen zu zerlegen. Es ist zu zeigen, dass nach *endlich vielen* Schritten nur noch triviale, also zu S^3 homöomorphe Summanden entstehen. Es sei $\mathcal{T}$ eine Triangulation von M (jede kompakte 3-Mannigfaltigkeit besitzt eine Triangulation [45], was wir hier nicht zeigen werden). Es sei $\Sigma \subset M$ eine aus Sphären bestehende Normalfläche, welche im Sinne des vorigen Absatzes eine Zerlegung $M = N_1 \# \ldots \# N_k$ mit $N_1, \ldots, N_k \not\approx S^3$

definiert (wir erlauben die triviale Normalfläche $\Sigma = \emptyset$). Wir zeigen: Wenn N_k nicht prim ist, so gibt es eine normale Sphäre $S \subset M \setminus U(\Sigma)$, die eine Zerlegung von N_k in eine nicht-triviale zusammenhängende Summe definiert und die zu keiner Komponente von Σ normal isotop ist.

Die Grundidee ist analog zum Beweis von Theorem 4.3.9. Es sei $S \subset M \setminus U(\Sigma)$ eine zahm eingebettete Sphäre, die eine nichttriviale Zerlegung von N_k definiert. Wenn der Schnitt von S mit einem 2-Simplex σ von $\mathcal{T}$ einen Bogen α enthält, dessen Endpunkte beide in einer Kante e von σ enthalten sind, so schneidet α eine Scheibe von σ ab, die keine Ecke von σ trifft. Entlang dieser Scheibe können wir S aus σ schieben, wodurch $\|S\|$ um mindestens zwei (nämlich die beiden Endpunkte von α) sinkt. Wir können daher voraussetzen, dass $S \cap \mathcal{T}^2$ aus normalen Bögen und aus in 2-Simplexen enthaltenen Kreisen besteht.

Es sei $\gamma \subset S \cap \sigma$ ein Kreis. Durch ein *innermost disc argument* können wir voraussetzen, dass γ eine abgeschlossene Scheibe $D \subset \sigma$ berandet mit $D \cap S = \gamma$. Weil Σ normal ist, folgt $D \cap \Sigma = \emptyset$. Durch Aufschneiden an γ und Einkleben zweier Kopien von D entstehen aus S zwei Sphären S_1, S_2. Wir wollen zeigen, dass mindestens eine von ihnen eine nicht-triviale Zerlegung von N_k realisiert:

1. Wenn S_1 (analog S_2) nicht zerlegend ist, so ist $N_k = N_{S_1} \# P_{S_1,\alpha}$, und die Zerlegung ist nicht-trivial, weil $P_{S_1,\alpha}$ im Unterschied zu N_k prim ist

2. Wenn S_1 und S_2 zerlegend sind, aber beide einen Ball in N_k beranden, so berandet auch S einen Ball in N_k — Widerspruch. Also definiert S_1 oder S_2 eine nicht-triviale Zerlegung von N_k.

Wir können also S durch S_1 oder S_2 ersetzen. Analog gehen wir vor, wenn eine Komponente von $S \setminus \mathcal{T}^2$ keine Scheibe ist. Wir können also voraussetzen, dass S pränormal ist. Man beachte, dass im Unterschied zu Schritt 1 und 3 im Beweis von Theorem 4.3.9 die so erhaltene Fläche im Allgemeinen nicht zu der Fläche isotop ist, mit der wir begannen! Wir können nun wie in Schritt 2 im Beweis von Theorem 4.3.9 vorgehen und zeigen, dass wir S unter den Normalflächen wählen können. Bei der Zerlegung von M an Σ wurde an alle Komponenten von $\partial U(\Sigma)$ Bälle geklebt. Wenn also S isotop in $M \setminus U(\Sigma)$ zu einer Komponente von Σ wäre, so würde S nur eine triviale Zerlegung von N_k liefern. Da dies nicht der Fall ist, ist insbesondere S zu keiner Komponente von Σ normal isotop. Nach Knesers Lemma 5.1.4 folgt also, dass $N_1, \ldots, N_k$ alle prim sind, sobald Σ hinreichend vielen Zusammenhangskomponenten besteht. Das beweist die Existenz der Primzerlegung.

Eindeutigkeit der Primzerlegung Es seien $\Sigma_1, \Sigma_2 \subset M$ zwei aus zahm eingebetteten Sphären bestehende Flächen, die zwei Primzerlegungen $P_1^1 \# \ldots \# P_{k_1}^1$ und $P_1^2 \# \ldots \# P_{k_2}^2$ von M definieren. Wir wollen zeigen, dass beide Zerlegungen bis auf Vertauschung, Homöomorphismen und (im nicht-orientierbaren Fall) Ersetzen von $S^1 \times S^2$-Summanden durch $S^1 \tilde{\times} S^2$-Summanden übereinstimmen. Es sei $\gamma \subset \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ eine Schnittkurve. Mit einem *innermost disc argument* können wir voraussetzen, dass γ in Σ_1 eine abgeschlossene Scheibe D berandet mit $D \cap \Sigma_2 = \gamma$. Durch Aufschneiden an γ und Einkleben zweier Kopien von D entsteht aus Σ_2 eine aus Sphären bestehende Fläche Σ_2'. Offenbar sind alle Komponenten von Σ_2' in $P_1^2, \ldots, P_{k_2}^2$ enthalten. Wie im obigen Existenzbeweis folgt, dass einer der durch Σ_2 definierten Summanden durch Σ_2' weiter zerlegt wird und alle anderen Summanden gleich bleiben. Weil alle Summanden prim sind, wird also M durch Σ_2' im Wesentlichen in dieselben primen Summanden $P_1^2, \ldots, P_{k_2}^2$ und einen S^3-Summanden zerlegt. Man beachte aber, dass dabei möglicherweise eine zerlegende Sphäre $S \subset \Sigma_2$, die einen primen *reduziblen* Summanden definiert, durch eine nichtzerlegende Sphäre $S' \subset \Sigma_2'$ in demselben Summanden ersetzt wird. Während S den Summanden eindeutig bestimmt, wird er durch S' nur noch bis auf die besprochene Mehrdeutigkeit von $S^1 \times S^2$ versus $S^1 \tilde{\times} S^2$ bestimmt.

Wir iterieren diesen Prozess und erhalten nach endlich vielen Schritten eine zu Σ_1 disjunkte Fläche $\widetilde{\Sigma_2}$, die eine Zerlegung von M in $P_1^2, \ldots, P_{k_2}^2$ (wobei möglicherweise $S^1 \times S^2$-Summanden durch $S^1 \tilde{\times} S^2$-Summanden ersetzt werden) und einige S^3-Summanden definiert. Es sei $\Sigma = \Sigma_1 \cup \widetilde{\Sigma_2}$. Weil $P_1^2, \ldots, P_{k_2}^2$ alle prim sind, definiert auch Σ eine Zerlegung von M in $P_1^2, \ldots, P_{k_2}^2$ und einige S^3-Summanden. Weil aber auch $P_1^1, \ldots, P_{k_1}^1$ prim sind, ist dies zugleich eine Zerlegung von M in $P_1^1, \ldots, P_{k_1}^1$ und einige S^3-Summanden. Daraus folgt die behauptete Eindeutigkeit der Primzerlegung.

5.1.3 Konstruktion der Primzerlegung

Es sei $\mathcal{T}$ wieder eine Triangulation von M. Der Einfachheit halber sei nun M orientierbar. Nach Knesers Lemma 5.1.4 gibt es eine Normalfläche $\Sigma \subset M$, die aus Sphären besteht, so dass jede zu Σ disjunkte normale Sphäre normal isotop zu einer Komponente von Σ ist. Im Beweis von Theorem 5.1.3 wurde gezeigt, dass durch Σ eine Zerlegung von M in prime Mannigfaltigkeiten und möglicherweise S^3-Summanden definiert ist. Wir wollen in diesem Unterabschnitt skizzieren, wie man eine solche Normalfläche Σ konstruieren kann und wie man die entstehenden S^3-Summanden erkennt.

Es sei $F \subset M$ eine fest gewählte Normalfläche. Es sei

$$\mathcal{S} := \{S \subset M \colon\ S \text{ Normalfläche}, S \cap F = \emptyset\}$$

die Menge aller zu F disjunkten Normalflächen. Wenn für $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ die Normalflächensumme $S_1 + S_2$ definiert ist, so folgt $S_1 + S_2 \in \mathcal{S}$, wie man mit der geometrischen Interpretation der Summe leicht sieht.

Die Tetraeder von $\mathcal{T}$ werden durch F in endlich viele Teile $T_1, \ldots, T_m$ zerlegt. Die Anzahl der Teile hängt nur von F und $\mathcal{T}$ ab. In jedem T_i $(i = 1, \ldots, m)$ gibt es wie gewohnt bis zu 7 normale Isotopieklassen von normalen Drei- und Vierecken, also insgesamt $7m$ normale Isotopieklassen in $M \setminus U(F)$. Eine Normalfläche $S \in \mathcal{S}$ besteht aus solchen normalen Drei- und Vierecken. Wie in Unterabschnitt 4.2.3 gesehen ist die normale Isotopieklasse von S in $M \setminus U(F)$ durch einen Vektor $\mathfrak{v}(S)$ nichtnegativer ganzer Zahlen festgelegt, dessen Einträge angeben, wie oft jeder Typ von normalen Drei- und Vierecken in S auftritt. Wie gehabt charakterisiert man diejenigen Vektoren, die Normalflächen entsprechen, mittels ViereckLsbedingung und Normalgleichungen. Der einzige Unterschied zu früher ist, dass die Anzahl der Einträge in $\mathfrak{v}(S)$ (bis zu $7m$) jetzt von F abhängt. Es folgt:

Satz 5.1.7 *Man kann endlich viele Elemente von $\mathcal{S}$ konstruieren, die $\mathcal{S}$ additiv erzeugen.* □

Man nennt diese Erzeugenden **relative Fundamentalflächen** bezüglich F.

Bemerkung 5.1.8

1. Der vorige Satz folgt nicht einfach aus der endlichen Erzeugbarkeit der Menge *aller* Normalflächen in M, denn es wird im Allgemeinen vorkommen, dass eine relative Fundamentalfläche bezüglich F sich als Summe zweier Normalflächen $S_1, S_2 \subset M$ schreiben lässt, die F schneiden. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn bis auf normale Isotopie $S_1 \cap S_2 \subset F$ gilt.

2. Auf den ersten Blick sind die Normalgleichungen für $\mathcal{S}$ komplizierter als die gewöhnlichen Normalgleichungen, da sowohl die Anzahl der Gleichungen als auch der Unbekannten mit $\|F\|$ wächst. Es zeigt sich jedoch, dass sich meist systematisch mehrere Normalgleichungen für $\mathcal{S}$ in eine Gleichung zusammenfassen lassen. Die Normalgleichungen für $\mathcal{S}$ sind um so einfacher, je mehr normale Vierecke in F enthalten sind; vgl. [29, 30].

Lemma 5.1.9 *Es sei M orientierbar, und es sei $\Sigma \subset M$ eine aus Sphären bestehende Normalfläche. Wenn es in einer Zusammenhangskomponente N von $M \setminus U(\Sigma)$ eine normale Sphäre gibt, die zu keiner Komponente von Σ normal isotop ist, so gibt es eine solche bereits unter den Summen von höchstens zwei relativen Fundamentalflächen bzgl. Σ.*

Beweis Es sei $S \subset N$ eine normale Sphäre, die zu keiner Komponente von Σ normal isotop ist. Wir können S als Summe $S_1 + \cdots + S_c$ von in N enthaltenen relativen Fundamentalflächen bzgl. Σ schreiben. Weil die Euler-Charakteristik additiv ist und $\chi(S) = 2$, gibt es ein $i \in \{1, \ldots, c\}$ mit $\chi(S_i) > 0$.

Wenn $\chi(S_i) = 1$, so ist S_i eine projektive Ebene. Also ist S_i einseitig, denn S_i ist nicht-orientierbar und M ist orientierbar. Demzufolge ist $S_i + S_i = \partial U(S_i) \subset N$ zusammenhängend mit Euler-Charakteristik 2, ist also eine Sphäre. Wenn $S_i + S_i$ zu einer Komponente von Σ normal isotop wäre, so wäre N normal isotop zu $U(S_i)$ (nach Ankleben eines Balles liefert dies den primen Summanden $P^3_{\mathbb{R}}$). Da jedoch $S_i + S_i$ bis auf normale Isotopie die *einzige* normale Sphäre in $U(S_i)$ ist (Übung!), wäre S normal isotop zu $S_i + S_i$ und damit zu einer Komponente von Σ — Widerspruch. Also erfüllt $S_i + S_i$ das Lemma.

Wenn $\chi(S_i) = 2$, so ist S_i eine Sphäre. Wenn sie normal isotop zu einer Komponente von Σ wäre, so wäre S_i bis auf normale Isotopie disjunkt von allen anderen Summanden $S_1, \ldots S_c$. Demnach wäre eine Zusammenhangskomponente von $S_1 + \cdots + S_c$ normal isotop zu S_i. Weil S zusammenhängend ist, folgte $S = S_i$, und damit wäre S normal isotop zu einer Komponente von Σ — Widerspruch. Also erfüllt S_i die Aussage des Lemmas. $\square$

Durch iterierte Anwendung des vorigen Lemmas, angefangen mit $\Sigma = \emptyset$, erhalten wir dank Knesers Lemma 5.1.4 nach endlich vielen Schritten eine aus Sphären bestehende Normalfläche $\Sigma \subset M$, so dass alle normalen Sphären in $M \setminus U(\Sigma)$ normal isotop zu Komponenten von Σ sind. Aus dem Beweis von Theorem 5.1.3 folgt, dass M durch Σ in prime Mannigfaltigkeiten und einige S^3-Summanden zerlegt wird. Jetzt müssen „nur noch“ die S^3-Summanden algorithmisch erkannt werden. Dieses Erkennungsproblem erwies sich als sehr schwierig, denn S^3 ist keine Haken-Mannigfaltigkeit. In den 1990er Jahren gelang, basierend auf Ideen von Hyam Rubinstein, der Durchbruch.

Definition 5.1.10 *Eine geschlossene Fläche $F \subset M$ in allgemeiner Lage zu $\mathcal{T}$ heißt **fast normal**, falls F die Vereinigung von **genau einem** normalen Oktagon (siehe Abbildung 4.5 rechts) und einer beliebigen Anzahl von normalen Drei- und Vierecken ist.*

Eine fast normale Fläche ist also tatsächlich *fast* normal, nämlich mit Ausnahme einer einzigen Komponente von $F \setminus \mathcal{T}^2$. Unsere Definition lehnt sich an einen von Hyam Rubinstein geprägten Begriff an. Rubinstein stellt die fast normalen Flächen in einen noch weiteren Kontext und lässt dabei auch zu, dass F anstelle eines Oktagons einen so genannten unverknoteten Annulus enthält [56, 66]. Matveev [42] verwendet den noch allgemeineren Begriff der fast k-normalen Flächen. Analog zu der Addition von Normalflächen kann man auch definieren, wie man eine normale zu einer fast normalen Fläche addiert. Eine fast normale Fläche heißt fundamental, wenn sie nicht die Summe einer fast normalen Fläche mit einer nicht-trivialen Normalfläche ist. Fundamentale fast normale Flächen kann man ähnlich wie im Fall von Normalflächen konstruieren.

Satz 5.1.11 *Es sei $\Sigma \subset M$ wie oben, und es sei N eine Zusammenhangskomponente von $M \setminus U(\Sigma)$ mit $\partial N \cap \partial M = \emptyset$. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen.*

1. *N enthält eine Ecke von $\mathcal{T}$.*

2. *∂N besteht aus mehreren 2-Sphären.*

3. *∂N ist eine einzelne 2-Sphäre und N enthält eine fundamentale fast normale 2-Sphäre.*

4. *N liegt nicht in einem S^3-Summanden der durch Σ definierten Zerlegung von M.*

Der Beweis dieses Satzes würde den Rahmen dieser Vorlesung sprengen. Der Satz wurde ursprünglich von Rubinstein [56] entdeckt, allerdings gelang erst Abigail Thompson [66, 67] ein rigoroser Beweis. Einen Beweis findet man auch in [42], und weitere Anwendungen in [29, 30]. Der Satz erlaubt, die S^3-Summanden in der Zerlegung von M an Σ zu erkennen. Sie entsprechen genau den Komponenten von $M \setminus U(\Sigma)$, die eine der ersten drei Alternativen des Satzes erfüllen. Der Test auf das Vorliegen der ersten beiden Alternativen ist trivial, das Vorliegen der dritten Alternative, lässt sich mit der Konstruktion von Fundamentalflächen erkennen.

5.2 Jaco-Shalen-Johannson-Zerlegung

Wie wir hoffentlich in Abschnitt 4.5 klar gemacht haben, ist es für die Arbeit mit Normalflächen hilfreich, wenn die betrachteten 3-Mannigfaltigkeiten atoroidal sind. Daher ist es eine naheliegende Idee, eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit M entlang inkompressibler Tori zu zerlegen und so lange zu iterieren, bis die entstehenden Bruchstücke atoroidal sind. Dies ist ohne weiteres im Rahmen der Normalflächentheorie möglich, wie man analog zur Existenz der Primzerlegung in Theorem 5.1.3 beweisen kann. Das Problem ist jedoch, dass die Bruchstücke, anders als bei der Primzerlegung, nicht eindeutig sind.

Es ist daher höchst erstaunlich, dass eine eindeutige Zerlegung an inkompressiblen Tori dennoch möglich ist. Der Trick ist, die Zerlegung nicht bis zu Ende zu führen, sondern rechtzeitig mit dem Zerlegen aufzuhören. Die in dem folgenden Theorem formulierte Zerlegung heißt **JSJ-Zerlegung**, benannt nach **J**aco, **S**halen und **J**ohannson. Jaco-Shalen und Johannson entdeckten das Theorem unabhängig voneinander. Den im Theorem verwendeten Begriff *Seifert-Mannigfaltigkeit* werden wir in Abschnitt 5.3 definieren.

Theorem 5.2.1 (JSJ-Zerlegung) *Es sei M eine kompakte orientierbare irreduzible ∂-irreduzible 3-Mannigfaltigkeit.*

1. *Es gibt eine disjunkte Vereinigung $T \subset$ von endlich vielen wesentlichen Annuli und Tori, so dass $M \setminus U(T)$ eine disjunkte Vereinigung von atoroidalen anannularen Mannigfaltigkeiten und von Seifert-Mannigfaltigkeiten ist.*

2. *Wenn T wie in 1. bezüglich Inklusion minimal ist, so ist T bis auf Isotopie eindeutig bestimmt. Man nennt dann T das **JSJ-System**.*

3. *Das JSJ-System lässt sich algorithmisch konstruieren.*

Ein Beweis würde hier zu weit führen. Die Grundidee ist, nur an einer besonderen Klasse von zahm eingebetteten Annuli und Tori in M zu zerlegen. Ein zahm eingebetteter Torus $T \subset M$ heißt **roh**, falls jeder zahm eingebettete Torus $T' \subset M$ durch eine Isotopie zu T disjunkt gemacht werden kann. Matveev wählte den Ausdruck „roh“, weil man einer rohen Person am besten aus dem Weg geht. Eine vollständige Zerlegung an wesentlichen rohen Tori und entsprechen an rohen Annuli führt auf das gewünschte Ergebnis. Einen Beweis findet man in [21] (hier mit einer Version der JSJ-Zerlegung, bei der nur an Tori zerlegt wird) oder in [42], Kapitel 6.4.

5.2.1 Exkurs über Thurstons Geometrisierungsvermutung

Durch die Arbeiten William P. Thurstons hat die JSJ-Zerlegung eine noch weiter gehende Bedeutung erlangt. Thurston definierte den Begriff der *Modellgeometrie* [68] und untersuchte, inwieweit sich jede Mannigfaltigkeit mit geometrischen Methoden beschreiben lässt. Man möchte zu einer 3-Mannigfaltigkeit nach Möglichkeit einen Atlas finden, so dass die Kartenwechsel nicht nur differenzierbar sind, sondern sogar Isometrien bezüglich einer geeigneten Metrik auf B^3.

Hier spielt nicht nur die Euklidische Geometrie eine Rolle, denn man kann B^3 ja auch als Teilmenge von $S^3 = \partial \overline{B^4}$ mit der Sphärischen Geometrie auffassen. Noch viel interessanter ist die Hyperbolische Metrik $\mathbb{H}^3$ auf B^3. Es gibt daneben noch weitere 5 Modellgeometrien. Zwei davon sind Produktgeometrien, nämlich $S^2 \times \mathbb{R}$ und $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Die anderen hängen mit der Struktur gewisser Lie-Gruppen zusammen, nämlich mit $SL_2(\mathbb{R})$, mit der *Heisenberg-Gruppe*

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \qquad (\textit{Nil-Geometrie}),$$

und mit dem Semidirekten Produkt von $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}^2$,

$$(t, (x, y)) \mapsto (e^t x, e^{-t} y) \qquad (\textit{Sol-Geometrie}).$$

Thurston zeigte nun, dass alle Teile der JSJ-Zerlegung einer geschlossenen orientierbaren irreduziblen 3-Mannigfaltigkeit M eine der Modellgeometrien tragen, vorausgesetzt dass die Zerlegung nicht-trivial ist oder dass M eine Haken-Mannigfaltigkeit ist. Der schwerste Schritt dabei war der Nachweis, dass eine orientierbare atoroidale und anannulare Haken-Mannigfaltigkeit der Euler-Charakteristik Null eine hyperbolische Struktur besitzt. Daher nennt man sein Ergebnis **Hyperbolisierungstheorem**. Thurston schrieb seine Beweisideen, die bis in die 1970er Jahre zurückgehen, nicht selbst in zusammenhängender Form auf. Eine gute Beweisreferenz ist das Buch [25].

Thurstons **Geometrisierungsvermutung** besagt, dass auch alle Nicht-Haken-Mannigfaltigkeiten eine geometrische Struktur besitzen. Erst in diesem Fall spielt die sphärische Geometrie eine Rolle. Wenn die Geometrisierungsvermutung zutrifft, so gilt auch die **Poincaré-Vermutung**. Diese Vermutung ist eine der größten Herausforderungen der Dreidimensionalen Topologie. Sie besagt:

Vermutung 5.2.2 (Poincaré 1904) *Jede geschlossene* 3*-Mannigfaltigkeit mit trivialer Fundamentalgruppe ist zu* S^3 *homöomorph.*

Eine entsprechende Vermutung für nicht-kompakte 3-Mannigfaltigkeiten gilt nicht: Schon J.H.C. Whitehead konstruierte eine nicht-kompakte 3-Mannigfaltigkeit W mit $\pi_1(W) \cong \{1\}$ und $W \not\approx \mathbb{R}^3$. Eine Verallgemeinerung der Poincaré-Vermutung besagt, dass eine geschlossene n-Mannigfaltigkeit genau dann zu S^n homotopieäquivalent ist, wenn sie zu S^n homöomorph ist. Man kann zeigen, dass diese Aussage für $n = 3$ zur Poincaré-Vermutung äquivalent ist.

Das erstaunliche an der Poincaré-Vermutung ist, dass ihre Verallgemeinerung in *allen* höheren Dimensionen bereits bewiesen wurde, nämlich für $n \geq 5$ von Smale [61] und für $n = 4$ von Freedman [17]. Nur in Dimension $n = 3$ blieb die Vermutung offen, also in der Dimension, die Poincaré ursprünglich betrachtete. Dabei gab es im 20. Jahrhundert einige ernst zu nehmende Beweisversuche (neben vielen unseriösen), die sich jedoch alle über kurz oder lang auf subtile Weise als falsch herausstellten. Vor kurzem kündigte Grisha Perelman [46] einen Beweis der Geometrisierungsvermutung und damit auch der Poincaré-Vermutung an, doch sollte eine genaue Prüfung seines Beweises noch abgewartet werden.

5.3 Seifertsche Faserräume

Die JSJ-Zerlegung zerlegt eine kompakte orientierbare irreduzible 3-Mannigfaltigkeit in einige atoroidale Teile und in *Seifert-Mannigfaltigkeiten*, um die es in den folgenden Unterabschnitten gehen wird. Wie man an den Bemerkungen nach Theorem 5.2.1 erkennen kann, sind Seifert-Mannigfaltigkeiten im Allgemeinen nicht atoroidal, denn sie können nicht-rohe Tori enthalten. Wir werden die meisten hier erwähnten Resultate über Seifert-Mannigfaltigkeiten nicht beweisen und verweisen auf [21].

Es sei M eine 3-Mannigfaltigkeit, und es sei $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ (mit einer Indexmenge I) eine Familie von Einbettungen f_i der S^1 in M, so dass $f_i \cap f_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{i\in I} f_i = M$. Ein f_i nennen wir **Faser**, und $\mathcal{F}$ bezeichnen wir als Zerlegung von M in S^1-Fasern. Für eine Einbettung $\phi\colon\ M \hookrightarrow N$ in eine andere Mannigfaltigkeit notieren wir der Einfachheit halber $\phi(\mathcal{F}) := \{\phi(f)\colon\ f \in \mathcal{F}\}$.

Wir wollen nun typische Zerlegungen des abgeschlossenen Volltorus $V := \overline{B^2} \times S^1$ in S^1-Fasern konstruieren. Dazu wählen wir einen gekürzten Bruch $p/q \in \mathbb{Q}$. Ein $(2\pi p/q)$-Twist ist ein Homöomorphismus $\phi\colon \overline{B^2} \approx \overline{B^2}$, der sich in ebenen Polarkoordinaten durch $\phi(r,\alpha) = (r, \alpha + (2\pi p/q))$ schreiben lässt. Wir verkleben Ober- und Unterseite von $\overline{B^2} \times [0,1]$ durch einen $(2\pi p/q)$-Twist. Die Strecken der Form $(r,\alpha) \times [0,1]$ setzen sich dabei zu Fasern einer Zerlegung $\mathcal{F}_{p/q}$ von V zusammen: Die Mittellinie $(0,\cdot) \times [0,1]$ von $B^2 \times [0,1]$ wird dabei zu der „Mittelfaser“ $f_0 := (0,\cdot) \times S^1$ von $B^2 \times S^1$, und für $r \neq 0$ und $\alpha \in [0, 2\pi/q]$ setzen sich jeweils die $|q|$ Strecken $(r, \alpha + 2\pi i/q) \times [0,1]$ (mit $i = 0, \ldots, |q|-1$) zu einer Faser $f_{r,\alpha}$ zusammen. Offenbar ist $f_{r,\alpha}$ in V homotop zu einem $|q|$-maligen Durchlaufen von f_0. Wenn man V unverknotet in $\mathbb{R}^3$ einbettet, sind die Fasern von $\mathcal{F}_{p/q}$ Torusknoten. Die Zerlegung $\mathcal{F}_{p/q}$ heißt **Modellseifertfaserung** des abgeschlossenen Volltorus V.

Definition 5.3.1 *Eine Zerlegung $\mathcal{F}$ einer kompakten 3-Mannigfaltigkeit M in S^1-Fasern heißt **Seifert-Faserung** von M, falls es für jede Faser $f \in \mathcal{F}$ einen gekürzten Bruch $p/q \in \mathbb{Q}$ und eine Einbettung $\phi\colon V \hookrightarrow M$ gibt, so dass $f \in \phi(\mathcal{F}_{p/q}) \subset \mathcal{F}$. Wenn $|q| \neq 1$ und zudem $f = \phi(f_0)$ für die Mittelfaser f_0 von $\mathcal{F}_{p/q}$, so heißt f **Ausnahmefaser** der **Vielfachheit** $|q|$. Alle anderen Fasern heißen **reguläre Faser** und haben Vielfachheit 1.*

Man beachte, dass keine in ∂M gelegene Faser eine Ausnahmefaser ist, da ja $\phi(f_0)$ nicht in ∂M liegen kann. Zwei Seifert-Faserungen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ von M heißen isomorph, wenn es einen Homöomorphismus $\phi\colon M \approx M$ gibt mit $\phi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$. Eine **Seifert-Mannigfaltigkeit** ist eine 3-Mannigfaltigkeit, die eine Seifert-Faserung besitzt. Diese ist im Allgemeinen nicht bis auf Isomorphismen durch den Homöomorphietyp von M bestimmt. Eine Seifert-Mannigfaltigkeit mit einer bestimmten Seifert-Faserung bezeichnen wir als *Seifert-gefaserte Mannigfaltigkeit.*

Übung 5.3.2

1. Zeige: Für einen gekürzten Bruch p/q ist die Modellseifertfaserung $\mathcal{F}_{p/q}$ eine Seifert-Faserung von V. Die Mittelfaser f_0 hat Vielfachheit $|q|$, alle anderen Fasern haben Vielfachheit 1. *Hinweis:* Konstruiere für jede Faser $f \neq f_0$ eine aus Fasern bestehende abgeschlossene Umgebung von f, die fasererhaltend homöomorph zu $\mathcal{F}_{0/1}$ ist.

2. Zeige, dass die Modellseifertfaserungen $\mathcal{F}_{p/q}$ und $\mathcal{F}_{(p+kq)/q}$ isomorph sind, für alle $k \in \mathbb{Z}$.

3. Es sei $\gamma \subset \partial V$ eine einfach geschlossene Kurve, die in V keine Scheibe berandet (die also kein **Meridian** von V ist). Zeige, dass α isotop zu einer Faser einer Modellfaserung ist und dass diese durch α eindeutig (nicht nur bis auf Isomorphismen) bestimmt ist.

Für eine Seifert-Faserung $\mathcal{F}$ von M erhalten wir eine Äquivalenzrelation auf M: $x \sim y$ genau dann wenn es eine Faser $f \in \mathcal{F}$ gibt mit $x, y \in f$. Den Quotienten $M/\mathcal{F} := M/\!\sim$ bezeichnen wir als **Basisfläche**[1] B von $\mathcal{F}$. Es sei $\pi\colon M \twoheadrightarrow B$ die Quotientenabbildung. Die Äquivalenzklasse $\pi(f) \in B$ einer Ausnahmefaser

[1]Eigentlich sollte man von *Basisorbifold* reden.

$f \in \mathcal{F}$ heißt **Ausnahmepunkt**. Wenn M kompakt ist, ist natürlich auch B kompakt.

Lemma 5.3.3 *Die Basisfläche B einer Seifert-Faserung $\mathcal{F}$ einer Seifert-Mannigfaltigkeit M ist eine 2-Mannigfaltigkeit, und die Ausnahmepunkte auf B haben keine Häufungspunkte.*

Beweis Es sei $f \in \mathcal{F}$ eine Faser. Es ist zu zeigen, dass $\pi(f)$ in B eine zu $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^2_{\geq}$ homöomorphe Umgebung besitzt. Weil f eine zu $\mathcal{F}_{p/q}$ isomorphe Umgebung besitzt, genügt es zu zeigen, dass die Basisfläche $V/\mathcal{F}_{p/q}$ einer Modellseifertfaserung zu $\overline{B^2}$ homöomorph ist. Nach Übung 5.3.2.1 folgt ferner, dass jede Ausnahmefaser eine Umgebung besitzt, die sonst nur aus regulären Fasern besteht. Daher haben die Ausnahmenpunkte keine Häufungspunkte.

Es sei $S := \{(r,\alpha)\colon\ r \in [0,1], \alpha \in [0, 2\pi/q[\} \subset \overline{B^2}$ ein halboffener Sektor (für $q = 1$ ist $S = \overline{B^2}$)und $\overline{S} := \{(r,\alpha)\colon\ r \in [0,1], \alpha \in [0, 2\pi/q]\}$ sein Abschluss. Es sei $\xi \in S^1$. Offenbar schneidet jede Faser f von $\mathcal{F}_{p/q}$ den Sektor $S \times \xi$ in *genau einem* Punkt. Falls f den Punkt $(r,0) \times \xi$ enthält, so enthält f noch genau einen weiteren Punkt von $\overline{S} \times \xi$, nämlich $(r, 2\pi/q) \times \xi$. Demnach ist $V/\mathcal{F}_{p/q}$ homöomorph zum Quotienten von $\overline{S}$ nach der Relation $(r,0) \sim (r, 2\pi/q)$ (für alle $r \in [0,1]$). Man sieht leicht, dass dieser Quotient eine abgeschlossene Scheibe ist.[2] □

Weil ∂M aus regulären Fasern besteht, kann man zeigen, dass ∂M eine Vereinigung von Tori, Kleinschen Flaschen, offenen Annuli und offenen Möbiusbändern besteht (die letzten zwei Fälle treten nur für nicht-kompakte Seifert-Mannigfaltigkeiten auf). Wenn M orientierbar ist, ist auch ∂M orientierbar und besteht daher aus Tori und offenen Annuli.

5.3.1 Konstruktion von orientierbaren Seifert-gefaserten Mannigfaltigkeiten

Es sei B eine kompakte zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeit (also eine zusammenhängende Fläche), es sei $\mathcal{A} \subset B$ eine endliche Menge, und es sei $q\colon\ \mathcal{A} \to \mathbb{Z}_{>0}$ eine Abbildung. Wir werden in diesem Unterabschnitt kompakte orientierbare Seifert-Mannigfaltigkeiten M mit Seifert-Faserungen $\mathcal{F}$ mit Basisfläche $\pi\colon\ M \to B$ konstruieren, so dass für alle $a \in \mathcal{A}$ die Faser $\pi^{-1}(a)$ die Vielfachheit $q(a)$ hat (insbesondere kann die Faser eine Ausnahmefaser sein) und alle anderen Fasern regulär sind. Auf diese Weise kann man sogar *alle* solchen orientierbaren Seifert-gefaserten Mannigfaltigkeiten gewinnen (im Allgemeinen sind das unendlich viele verschiedene Isomorphieklassen), was wir hier aber nicht zeigen werden. Aufgrund dieser Konstruktion kann man Seifert-Faserungen orientierbarer kompakter Seifert-Mannigfaltigkeiten bis auf Isomorphismen klassifizieren, doch auch das werden wir hier nicht durchführen. Siehe [21] für Details und Beweise.

Durch Hinzufügen eines weiteren Punktes mit Vielfachheit 1 können wir $\mathcal{A} \neq \emptyset$ voraussetzen. Dann hat $B_0 := B \backslash U(\mathcal{A})$ einen nicht-leeren Rand und sieht

[2] Die Konstruktion kann man sogar mit Papier durchführen. Wenn f_0 eine Ausnahmefaser ist, so entsteht aus dem Segment $\overline{S}$ ein Kegel, dessen Spitze der Ausnahmepunkt von $V/\mathcal{F}_{p/q}$ ist.

daher so wie in der Abbildung von Theorem 2.3.1 aus. Wenn B_0 orientierbar ist, so sei $M_0 := B_0 \times S^1$. Offenbar bildet $\mathcal{F}_0 := \{\{x\} \times S^1 \colon x \in B_0\}$ eine Seifert-Faserung von M_0 mit ausschließlich regulären Fasern.

Wenn $B_0 \approx \tilde{\Sigma}_g^b$ nicht orientierbar ist, so ist auch $B_0 \times S^1$ nicht-orientierbar, was wir vermeiden wollen. Daher schneiden wir die g verdrehten Henkeln von Σ_g^b entlang regulärer Umgebungen der Kurven $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ wie in Abbildung 5.1 auf. Offenbar ist $X := B_0 \setminus U(\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_g)$ orientierbar. Entsprechend schneiden wir

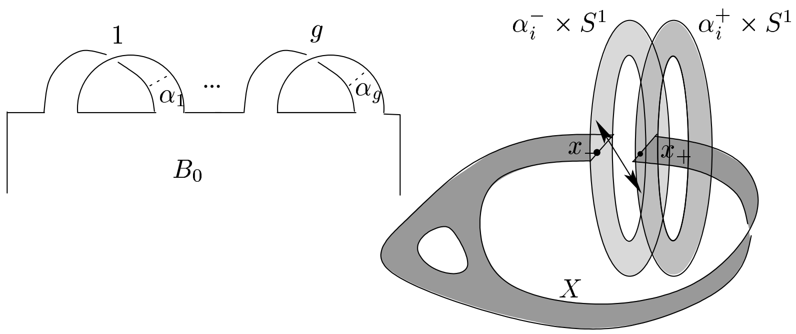


Abbildung 5.1: Konstruktion von $B_0 \tilde{\times} S^1$

auch $B_0 \times S^1$ entlang von $U(\alpha_i) \times S^1$ $(i = 1, \ldots, g)$ auf. Dadurch erhalten wir die orientierbare kompakte 3-Mannigfaltigkeit $X \times S^1$, die in Fasern der Form $\{x\} \times S^1$ zerfällt. Weil α_i eine zweiseitige Kurve in B_0 ist, besteht $\partial U(\alpha_i) \setminus \partial B_0$ aus zwei Kopien α_i^- und α_i^+ von α_i. Für $x_- \in \alpha_i^-$ bezeichnen wir mit x_+ den entsprechenden Punkt in α_i^+ (das könnte man natürlich formalisieren). Auf $X \times S^1$ definieren wir eine Äquivalenzrelation $((x_-, (s,t)) \sim ((x_+, (s,-t))$, wobei $x_- \in \alpha_i^-$ für $i = 1, \ldots, g$ und $(s,t) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Die Äquivalenzrelation ist in Abbildung 5.1 rechts durch den Doppelpfeil angedeutet. Der Raum $M_0 := (X \times S^1)/\sim$ ist eine orientierbare kompakte 3-Mannigfaltigkeit (Übung!), die man üblicherweise als das orientierbare S^1-Bündel $S^1 \tilde{\times} B_0$ über B_0 bezeichnet. Es ist bis auf Homöomorphismen eindeutig durch B_0 bestimmt. Weil durch $\sim$ Fasern auf Fasern geklebt werden, geht die Faserung von $X \times S^1$ in eine Seifert-Faserung $\mathcal{F}_0$ von M_0 ohne Ausnahmefasern über.

Einerlei ob B_0 orientierbar ist oder nicht, arbeiten wir jetzt mit $(M_0, \mathcal{F}_0)$ weiter. Wir wollen an ∂M_0 abgeschlossene Volltori mit Modellseifertfaserungen kleben, so dass schließlich wie gewünscht eine orientierbare Seifert-gefaserte Mannigfaltigkeit mit Basisfläche B entsteht. Es sei $a \in \mathcal{A}$. Dem Kreis $\partial U(a) \subset \partial B_0$ entspricht ein Torus $T \subset \partial M_0$ (nicht etwa eine Kleinsche Flasche, das folgt aus der Konstruktion von M_0). Wir wählen eine zu $q = q(a)$ teilerfremde ganze Zahl p. Verschiedene Zahlen p können auf nicht-isomorphe Seifert-gefaserte Räume führen. Wir betrachten die Modellseifertfaserung $\mathcal{F}_{p/q}$ auf V. Der Torus ∂V besteht aus regulären Fasern von $\mathcal{F}_{p/q}$, der Torus $T \subset \partial M_0$ besteht aus regulären Fasern von $\mathcal{F}_0$. Es gibt einen Homöomorphismus $\phi_a \colon \partial V \approx T$, der Fasern auf Fasern abbildet (Übung). Wir verkleben V mit M_0 an ihren Rändern mittels ϕ_a, und so verfahren wir für alle $a \in \mathcal{A}$. Dadurch entsteht eine kompakte orientierbare 3-Mannigfaltigkeit M, und aus $\mathcal{F}_0$ und den angeklebten Modellseifertfaserungen von V wird eine Seifert-Faserung $\mathcal{F}$ von M. Nach Konstruktion hat $(M, \mathcal{F})$ die Basisfläche B mit Vielfachheiten $q(a)$ für alle $a \in \mathcal{A}$. □

5.3.2 Dehn-Füllung und Dehn-Eingriff

Der letzte Schritt im vorigen Unterabschnitt – das Einkleben von Volltori – hat in der Dreidimensionalen Topologie eine große Bedeutung und heißt Dehn-Füllung (benannt nach Max Dehn). Wir wollen daher einen Exkurs als Ergänzung zur Vorlesung einfügen.

Es sei M_0 eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit. Wenn $T \subset \partial M_0$ ein Torus ist und $\phi\colon\ \partial V \approx T$, so sei $M := M_0 \cup_\phi V$. Wir erhalten Einbettungen $\iota_V\colon\ V \hookrightarrow M$ und $\iota_{M_0}\colon\ M_0 \hookrightarrow M$ mit $\iota_V = \iota_{M_0} \circ \phi$ auf ∂V. Es sei $\gamma \subset \partial V$ ein Meridian von V. Es gibt eine bis auf Isotopie eindeutige Scheibe $D \subset V$ mit $\partial D = \gamma$. Also ist auch ι_V auf D bis auf Isotopie eindeutig bestimmt. Weil $V \setminus U(D)$ ein abgeschlossener Ball ist, entsteht M aus $\iota_V(U(D)) \cup \iota_{M_0}(M_0)$ durch Ankleben eines Balles. Also ist mit $\iota_V(U(D))$ auch M bis auf Homöomorphismen eindeutig durch $\phi(\gamma)$ bestimmt. Man erkennt nun, dass es zu jeder einfach geschlossenen Kurve $\alpha \subset T$, die keine Scheibe in T berandet, einen Homöomorphismus $\phi\colon\ \partial V \approx T$ gibt mit $\phi(\gamma) = \alpha$. Es ist dann M durch die Isotopieklasse von α bestimmt. Wir bezeichnen M als **Dehn-Füllung** $M_0(\alpha)$ von M_0 an der Kurve $\alpha \subset \partial M_0$.

Es wurden einige interessante Fragen über Dehn-Füllungen untersucht. Beispiel: Es sei M_0 irreduzibel und atoroidal; ist auch $M_0(\alpha)$ irreduzibel und atoroidal? Antwort „Ja, bis auf endlich viele Isotopieklassen von Kurven α." Auch in der Theorie der Hyperbolischen 3-Mannigfaltigkeiten spielen Dehn-Füllungen eine wichtige Rolle [5].

Wenn $M = M^K$ der Außenraum eines orientierten Knotens $K \subset S^3$ ist, so kann man einfach geschlosse Kurven in $T := \partial M^K = \partial U(K)$ wie folgt in kanonischer Weise durch rationale Zahlen beschreiben. Die Orientierung von $M^K \subset S^3$ induziert eine Orientierung von T. Es sei $l \subset T$ die (bis auf Isotopie eindeutige) Longitude von K; sie ist ebenso wie K orientiert. Es sei $m \subset T$ der (ebenfalls bis auf Isotopie eindeutige) Meridian von K, mit $|l \cap m| = 1$. Wenn man T an m und l aufschneidet, entsteht ein Rechteck $R \approx [0,1] \times [0,1]$, das eine Orientierung von T erbt, $T = R/{\sim}$ wie in Übung 1.6.3.5. Der Meridian, die Longitude und R sind relativ zueinander so wie in Abbildung 5.2 orientiert. Es

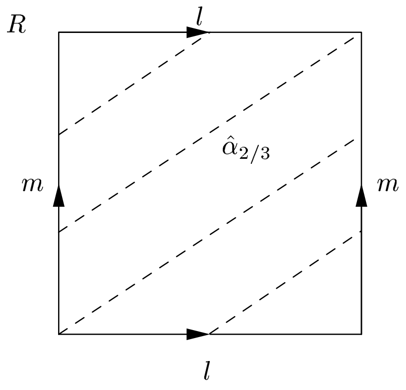


Abbildung 5.2: Parametrisierung von Kurven in ∂M^K

sei nun $p/q \in \mathbb{Q} \cup \{1/0\}$ ein gekürzter Bruch. Es sei $\hat{\alpha}_{p/q} \subset R$ die Familie von Geraden der Steigung p/q, die von den Punkten $\{(0, i/q)\colon\ i = 0, \ldots, |q|-1\}$ und $\{(j/p, 0)\colon\ j = 0, \ldots, |p|-1\}$ ausgehen. In Abbildung 5.2 ist $\hat{\alpha}_{2/3}$ eingetragen.

In $T = R/\sim$ wird $\hat{\alpha}_{p/q}$ zu einer einfach geschlossenen Kurve $\alpha_{p/q} \subset T$.

Man kann zeigen (Übung!), dass *jede* einfach geschlossene Kurve in T, die keine Scheibe in T berandet, zu einer Kurve der Form $\alpha_{p/q}$ isotop ist. Zu jeder Dehn-Füllung $M^K(\alpha)$ von M^K gibt es also einen gekürzten Bruch p/q mit $M^K(\alpha) \approx M^K(\alpha_{p/q})$. Man sagt auch, $M^K(\alpha_{p/q})$ entsteht durch **p/q-Dehn-Eingriff** an K (englisch *Dehn surgery*), und notiert $K(p/q) := M^K(\alpha_{p/q})$. Der „operative Eingriff" besteht darin, aus S^3 entlang von K einen Volltorus herauszuschneiden und einen Volltorus *auf andere Weise* wieder einzufügen. Entsprechend verfährt man für eine Verkettung $L \subset S^3$ mit n Komponenten und gekürzte Brüche $p_1/q_1, \dots p_n/q_n \in \mathbb{Q} \cup \{1/0\}$, und erhält $L(p_1/q_1, \dots p_n/q_n)$ durch Dehn-Füllung von M^L.

Bemerkung 5.3.4 Zwar scheint weitgehend Einigkeit zu bestehen, was ein p/q-Eingriff ist, aber es gibt sicherlich auch Autoren, die die Rollen von p und q vertauschen.

Übung 5.3.5 Zeige $K(1/0) \approx S^3$ für alle Knoten $K \subset S^3$.

Das Ergebnis eines Dehn-Eingriffs an einer orientierten Verkettung $L \subset S^3$ ist stets eine geschlossene orientierbare 3-Mannigfaltigkeit. Der Dehn-Eingriff ist leicht graphisch zu notieren, indem man ein Diagramm von L zeichnet und noch an jede Komponente von L einen gekürzten Bruch schreibt. Das Ergebnis des Eingriffs kann man sich natürlich nur schwer konkret vorstellen, doch kann man mit etwas Übung doch sehr intuitiv mit Dehn-Eingriffen arbeiten. Das folgende Theorem von Raymond Lickorish [39] zeigt die große Bedeutung von Dehn-Eingriffen.

Theorem 5.3.6 (Lickorish 1962) *Jede geschlossene orientierbare 3-Mannigfaltigkeit lässt sich durch Dehn-Eingriff an einer Verkettung in S^3 darstellen.*

Die Verkettung und die Brüche sind alles andere als eindeutig. Robion Kirby [36] stellte zwei Klassen von lokalen Änderungen vor, durch die in endlich vielen Schritten je zwei Dehn-Eingriff-Darstellungen einer Mannigfaltigkeit ineinander über gehen (*Kirby-Kalkül*). Eine Vermutung über Dehn-Eingriffe, die mit der Poincaré-Vermutung eng verknüpft ist, wurde erst kürzlich bewiesen.

Theorem 5.3.7 *Für jeden Knoten $K \subset S^3$ gilt $K(p/q) \approx S^3$ genau dann wenn $p/q = 1/0$.*

5.3.3 Vertikale und horizontale Flächen

Für die Beweise der in diesem Unterabschnitt zitierten Sätze verweisen wir auf [21]. Es sei M eine kompakte zusammenhängende Seifert-Mannigfaltigkeit mit Seifert-Faserung $\mathcal{F}$, Basisfläche B und Ausnahmepunkten $\mathcal{A} \subset B$, $\pi\colon M \twoheadrightarrow B$. Eine eigentlich eingebettete Fläche $F \subset M$ heißt **vertikal**, wenn F eine Vereinigung von regulären Fasern von $\mathcal{F}$ ist. Jede vertikale Fläche besteht aus Tori, Kleinschen Flaschen, abgeschlossenen Annuli und abgeschlossenen Möbiusbändern, denn dies sind die einzigen S^1-gefaserten zusammenhängenden Flächen. Für eine zusammenhängende vertikale Fläche F ist $\pi(F) \subset B \setminus \mathcal{A}$ eine einfache Kurve. Umgekehrt ist für jede eigentlich eingebettete Kurve (geschlossen oder nicht) $\alpha \subset B \setminus \mathcal{A}$ das Urbild $\pi^{-1}(\alpha)$ eine vertikale Fläche.

Lemma 5.3.8 (siehe [21]) *Jede zusammenhängende vertikale Fläche $F \subset M$ ist wesentlich, außer in folgenden Fällen:*

1. *F ist ein Torus, und $\pi(F)$ berandet in B eine Scheibe D mit höchstens einem Ausnahmepunkt (dann ist $\pi^{-1}(D)$ ein von F berandeter modellgefaserter Volltorus) oder schneidet von B einen Annulus ohne Ausnahmepunkte ab (dann ist F isotop zu einer Komponente von ∂M).*

2. *F ist ein Annulus, und der Bogen $\pi(F)$ schneidet von B eine Scheibe ohne Ausnahmepunkt ab.*

Korollar 5.3.9 *Es gibt in M keine wesentlichen vertikalen Tori und Annuli, genau dann wenn*

1. *$B \approx \overline{B^2}$ mit höchstens einem Ausnahmepunkt, oder*

2. *$B \approx S^2$ mit höchstens drei Ausnahmepunkten, oder*

3. *$B \approx P^2_{\mathbb{R}}$ mit höchstens einem Ausnahmepunkt.*

Beweis Wenn B geschlossen und nicht zu S^2 oder $P^2_{\mathbb{R}}$ homöomorph ist, so gibt es eingebettete Kreise in B, die keine Scheibe beranden. Wenn $\partial B \neq \emptyset$ und B keine abgeschlossene Scheibe ist, so gibt es eigentlich eingebettete Intervalle in B, die keine Scheibe abschneiden. Nach dem vorigen Lemma gibt es dann also wesentliche vertikale Tori oder Annuli.

Wenn $B \approx S^2$, so wird B durch jeden eingebetteten Kreis in zwei Scheiben zerlegt (Jordan-Schöflies). Wenn es höchstens drei Ausnahmepunkte gibt, so enthält eine der Scheiben höchstens einen Ausnahmepunkt. Nach dem vorigen Lemma gibt es also keinen vertikalen wesentlichen Torus. Wenn es mehr als drei Ausnahmepunkte gibt, findet man leicht einen eingebetteten Kreis, der zwei der Punkte von den anderen trennt und daher auf einen wesentlichen vertikalen Torus führt.

Wenn $B \approx P^2_{\mathbb{R}}$, so berandet jeder eingebette Kreis genau eine Scheibe (Übung nach Jordan-Schönflies!). Wenn es höchstens einen Ausnahmepunkt gibt, gibt es also nach dem vorigen Satz keinen wesentlichen vertikalen Torus. Wenn es mehr als einen Ausnahmepunkt gibt, so sind sie alle in einer Scheibe enthalten, deren Rand demnach auf einen vertikalen wesentlichen Torus führt.

Wenn $B \approx \overline{B^2}$, so berandet jeder eingebette Kreis genau eine Scheibe (Jordan-Schöflies). Wenn es höchstens einen Ausnahmepunkt gibt, gibt es also nach dem vorigen Satz keinen wesentlichen vertikalen Torus. Wenn es mehr als einen Ausnahmepunkt gibt, so finden wir ein eigentlich eingebettetes Intervall, das zwei Ausnahmepunkte voneinander trennt und demnach auf einen vertikalen wesentlichen Annulus führt. $\square$

Eine eigentlich eingebettete Fläche $F \subset M$ heißt **horizontal**, wenn F zu keiner Faser von $\mathcal{F}$ tangential ist. Wir erhalten offenbar eine stetige surjektive Abbildung $\pi|_F\colon F \twoheadrightarrow B$.

Beispiel 5.3.10 Es sei $M = V = \overline{B^2} \times S^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p/q}$ und $F = \overline{B^2} \times \{*\}$ eine Meridianscheibe von V. Offenbar ist F horizontal, denn alle Fasern laufen transversal zu den Meridianscheiben von V. Die Mittelfaser f_0 trifft F in genau einem Punkt. Alle anderen Fasern treffen F in genau q Punkten. Die Abbildung $\pi|_F$ verhält sich also so wie die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^q$.

Lemma 5.3.11 *Es gebe eine reguläre Faser von $\mathcal{F}$, die F in n Punkten schneidet. Dann gilt für jede Faser f der Vielfachheit q:*

$$\frac{n}{q} = \#(F \cap f).$$

Beweis Die Abbildung $x \mapsto \#(\pi^{-1}(x) \cap F)$ von $B \setminus \mathcal{A}$ nach $\mathbb{N}$ ist stetig. Weil M und damit auch $B \setminus \mathcal{A}$ zusammenhängend ist, ist die Abbildung konstant (das ist ein Standardargument der Allgemeinen Topologie). *Jede* reguläre Faser schneidet also F in n Punkten.

Für jede Faser f der Vielfachheit q gibt es eine zu einem modellgefaserten Volltorus isomorphe Umgebung U. Man kann leicht zeigen, dass Meridianscheiben bis auf Isotopie die einzigen horizontalen Flächen in modellgefaserten Volltori sind (Übung!). Also besteht $F \cap U$ aus $\#(F \cap f)$ Meridianscheiben. Nach dem vorigen Beispiel trifft F jede reguläre Faser in U die Fläche F in $q \cdot \#(F \cap f)$ Punkten. Also ist $n = q \cdot \#(F \cap f)$. □

Beispiel 5.3.12 Wir wollen an einem Beispiel zeigen, wie $\pi|_F \colon F \twoheadrightarrow B$ aussehen kann. In unserem Beispiel in Abbildung 5.3 ist $B \approx S^2$, und es gibt vier Ausnahmefasern der Vielfachheit 2. Die Fläche F ist ein Torus (in der Abbildung aufgeschnitten zu einem Quadrat), der jede der Ausnahmefasern genau einmal schneidet. Die vier Schnittpunkte sind unterschiedlich markiert. Der Torus ist in acht in der Abbildung unterschiedlich schattierte Dreiecke mit Ecken in den markierten Punkten zerlegt. Je zwei Dreiecke werden auf ein Dreieck in $B \approx S^2$ abgebildet, in der Abbildung mit entsprechender Schattierung.

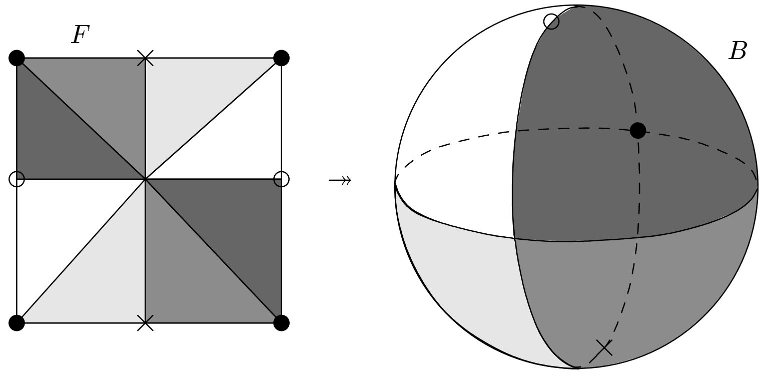


Abbildung 5.3: Abbildung einer horizontalen Fläche auf die Basisfläche

Lemma 5.3.13 (siehe [21]) *Jede zweiseitige horizontale Fläche in M ist inkompressibel und ∂-inkompressibel und nicht isotop zu einer Komponente von ∂M.*

Man beachte, dass es Seifert-Faserungen geschlossener Seifert-Mannigfaltigkeiten gibt, bezüglich denen es *keine* horizontalen Flächen gibt [21].

Übung 5.3.14

1. Es sei M zusammenhängend, und es sei $F \subset M$ eine horizontale Fläche, die jede reguläre Faser in genau n Punkten schneidet. Es gebe genau k Ausnahmefasern der Vielfachheiten $q_1, \ldots, q_k \geq 2$. Zeige $q_i \mid n$ für alle $i = 1, \ldots, k$ und
$$\chi(F) = n \cdot \left(\chi(B) - k + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{q_i} \right).$$
Hinweis: Zerlege B in Dreiecke mit Ecken in den Ausnahmepunkten. Dies führt auf eine ebensolche Zerlegung für horizontale Flächen, wie in Beispiel 5.3.12. Anhand einer solchen Zerlegung kann man die Euler-Charakteristik berechnen.

2. Für welche Werte von $\chi(B), k, q_1, \ldots, q_k$ kann es horizontale Flächen der Euler-Charakteristik 0 (also Tori, Kleinsche Flaschen, Annuli und Möbiusbänder) geben?

Bemerkung 5.3.15 Gemäß der vorigen Übung erhält man notwendige Bedingungen für die Existenz von horizontalen Flächen. Diese sind im Falle von Seifert-Mannigfaltigkeiten mit Rand hinreichend, sind jedoch für geschlossene Seifert-Mannigfaltigkeiten im Allgemeinen nicht hinreichend.

Wir haben in diesem Unterabschnitt gesehen, dass vertikale und horizontale Flächen zwei gut zu beschreibende Klassen von wesentlichen Flächen liefern. Es zeigt sich, dass damit die zweiseitigen wesentlichen Flächen in Seifert-Mannigfaltigkeiten vollständig beschrieben sind, gemäß dem folgenden Theorem, dass ein Schlüssel für das Verständnis von Seifert-Mannigfaltigkeiten ist.

Theorem 5.3.16 (siehe [21]) *Jede zweiseitige wesentliche Fläche in einer zusammenhängenden kompakten irreduziblen Seifert-gefaserten Mannigfaltigkeit ist isotop zu einer vertikalen oder zu einer horizontalen Fläche.*

5.3.4 Kleine Seifert-Mannigfaltigkeiten und Linsenräume

Wir wollen orientierbare Seifert-Mannigfaltigkeiten gemäß ihrer wesentlichen Flächen in Klassen einteilen und untersuchen, inwieweit ihre Seifert-Faserungen eindeutig sind. Man kann zeigen, dass $S^1 \times S^2$, $S^1 \tilde{\times} S^2$ und $P^3_{\mathbb{R}} \# P^3_{\mathbb{R}}$ die einzigen reduziblen Seifert-Mannigfaltigkeiten sind, und dass ihre Seifert-Faserungen bis auf Isomorphismen eindeutig sind.

Ab jetzt sei M eine zusammenhängende irreduzible orientierbare Seifert-Mannigfaltigkeit. Es seien $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ zwei Seifert-Faserungen von M. Wenn es bezüglich $\mathcal{F}_1$ vertikale inkompressible und ∂-inkompressible Tori gibt und wenn es bezüglich $\mathcal{F}_2$ keine horizontalen Tori und Annuli gibt, so kann man zeigen [21, Proposition 2.4], dass $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ isomorph sind. Es gibt also nur zwei Quellen fehlender Eindeutigkeit von Seifert-Faserungen: (1) das Fehlen von vertikalen inkompressiblen ∂-inkompressiblen Tori und Annuli in $\mathcal{F}_1$ oder (2) die Anwesenheit horizontaler Tori oder Annuli in $\mathcal{F}_2$. Wir werden gemäß den Ergebnissen des vorigen Unterabschnittes auflisten, welche Fälle sich daraus ergeben, und werden jeweils ohne Beweis angeben, inwieweit die Seifert-Faserungen von M tatsächlich uneindeutig sind.

1. Es sei B die Basisfläche von $\mathcal{F}_1$ und k die Anzahl der Ausnahmefasern. Gemäß Korollar 5.3.9 gibt es nur in den folgenden Fällen keine vertikalen wesentlichen Tori oder Annuli bezüglich $\mathcal{F}_1$.

   (a) $B \approx \overline{B^2}$ und $k \leq 1$. Dann ist $M \approx V$, und wir erhalten die verschiedenen (Modell-)Seifert-Faserungen des Volltorus.

   (b) $B \approx P^2_{\mathbb{R}}$ und $k \leq 1$. Für $k = 0$ ist $M \approx S^1 \tilde{\times} P^2_{\mathbb{R}}$, und die Faserung erweist sich als eindeutig. Für $k = 1$ gibt es jeweils noch genau eine weitere Seifert-Faserung von M, und zwar mit Basisfläche S^2 und drei Ausnahmefasern, zwei davon mit Vielfachheit 2.

   (c) $B \approx S^2$ und $k \leq 2$. Dann heißt M **Linsenraum** (siehe unten) und besitzt unendlich viele verschiedene Seifert-Faserungen.

   (d) $B \approx S^2$ und $k = 3$. Dann heißt M **Kleine Seifert-Mannigfaltigkeit** (siehe unten). Mit großem Aufwand kann man zeigen, dass die Seifert-Faserungen von Kleinen Seifert-Mannigfaltigkeit bis auf Isomorphismen eindeutig sind, mit Ausnahme des in 1b angesprochenen Falles, in denen zwei Fasern die Vielfachheit 2 haben.

2. Es sei B die Basisfläche der Seifert-Faserung $\mathcal{F}_2$ von M mit k Ausnahmefasern der Vielfachheiten $q_1, \ldots, q_k \geq 2$. Nach Übung 5.3.14.1 kann es nur dann horizontale Flächen bezüglich $\mathcal{F}_2$ der Euler-Charakteristik 0 geben, wenn $\chi(B) \geq \frac{k}{2}$ und wenn die Vielfachheiten nicht zu groß sind. Wir erhalten folgende Fälle (vgl. Übung 5.3.14.2).

   (a) B ist ein Annulus oder ein Torus, $k = 0$. Dann ist $M \approx S^1 \times S^1 \times [0,1]$ oder $M \approx S^1 \times S^1 \times S^1$ (M ist nach Voraussetzung orientierbar). Die Seifert-Faserungen sind eindeutig.

   (b) B ist ein Möbiusband oder eine Kleinsche Flasche, $k = 0$. Dann bezeichnet man M als $S^1 \tilde{\times} S^1 \tilde{\times} [0,1]$ bzw. $S^1 \tilde{\times} S^1 \tilde{\times} S^1$. In diesen Fällen gibt es jeweils noch eine weitere Seifert-Faserung, nämlich mit Basisfläche $\overline{B^2}$ und zwei Ausnahmefasern der Vielfachheit 2 bzw. Basisfläche S^2 und vier Ausnahmefasern der Vielfachheit 2. Letzteres ist in Beispiel 5.3.12 gezeigt.

   (c) $B \approx \overline{B^2}$, $k = 2$, $q_1 = q_2 = 2$. Die Seifert-Faserungen sind eindeutig, außer in dem Spezialfall aus 2b.

   (d) $B \approx P^2_{\mathbb{R}}$, $k = 2$, $q_1 = q_2 = 2$. Die Seifert-Faserungen sind eindeutig.

   (e) $B \approx S^2$, $k = 3$, $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} = 1$; hierfür gibt es bis auf Permutation nur die Lösungen $(q_1, q_2, q_3) = (2,3,6)$, $(2,4,4)$, $(3,3,3)$. In diesen Fällen sind die Seifert-Faserungen eindeutig. Vgl. Fall 1d.

In allen nicht aufgelisteten Fällen gibt es vertikale inkompressible ∂-inkompressible Tori und Annuli und keine horizontalen Tori und Annuli; die Seifert-Faserungen von M sind dann also eindeutig bestimmt. In der Auflistung wurden zwei Typen von Seifert-Mannigfaltigkeiten mit Basisfläche S^2 besonders hervorgehoben: Solche mit genau drei Ausnahmefasern (*Kleine Seifert-Mannigfaltigkeiten*) und solche mit höchstens zwei Ausnahmefasern (*Linsenräume*). Bis auf die drei Ausnahmen aus Fall 2e sind alle Kleinen Seifert-Mannigfaltigkeiten atoroidal. Alle Linsenräume und viele Kleine Seifert-Mannigfaltigkeiten enthalten überhaupt keine zweiseitigen wesentlichen Flächen, sind also Nicht-Haken-Mannigfaltigkeiten. Da ist es kein Wunder, dass diese Klassen von Seifert-Mannigfaltigkeiten schwer zu handhaben sind. Erst kürzlich wurden unabhängig von Tao Li [65] und Hyam Rubinstein [57] Algorithmen vorgeschlagen, die zu einer vorgegebenen Mannigfaltigkeit erkennen sollen, ob es sich um eine Kleine Seifert-Mannigfaltigkeit handelt, und im Erfolgsfall eine Seifert-Faserung angeben sollen.

Linsenräume wurden bereits 1908 von Heinrich Tietze definiert, allerdings erst 1934 im „Lehrbuch der Topologie“ von Seifert und Threlfall so benannt.

Lemma 5.3.17 *Eine geschlossene orientierbare* 3*-Mannigfaltigkeit* M *ist genau dann ein Linsenraum, wenn es zwei eingebettete abgeschlossene Volltori* $V_1, V_2 \subset M$ *gibt mit* $V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2$.

Beweis Es sei M ein Linsenraum, $\pi\colon M \twoheadrightarrow B$ die Quotientenabbildung auf die Basisfläche $B \approx S^2$. Es gibt einen zu den Ausnahmepunkten disjunkten eingebetteten Kreis $\gamma \subset B$, so dass in jeder der beiden von γ berandeten abgeschlossenen Scheiben $D_1, D_2 \subset B$ höchstens einer der Ausnahmepunkte liegt. Dann sind $V_1 := \pi^{-1}(D_1)$ und $V_2 := \pi^{-1}(D_2)$ zwei Volltori. Jeder Linsenraum ist also eine Vereinigung zweier Volltori, die sich nur in ihrem Rand schneiden.

Es sei um gekehrt M die Vereinigung zweier abgeschlossener Volltori V_1, V_2, die sich nur in ihrem Rand schneiden. Wir wählen eine einfach geschlossene Kurve $\gamma \subset \partial V_1 = \partial V_2$, die keine Scheibe in ∂V_i berandet und die weder ein Meridian von V_1 noch von V_2 ist. Dann gibt es nach Übung 5.3.2.3 Modell-Seifert-Faserungen $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ von V_1 und V_2, so dass γ in beiden Faser ist. Übung: Bis auf Isotopie stimmen $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ auf $V_1 \cap V_2 = \partial V_i$ überein. Also liefern sie eine Seifert-Faserung von M mit Basisfläche S^2 (das ist das Bild der Meridiane von V_1 und V_2) und bis zu zwei Ausnahmefasern. □

Am Beweis des Lemmas sieht man, dass jeder Linsenraum unendlich viele Seifert-Faserungen besitzt, die zueinander nicht-isomorph sind, weil die Vielfachheiten der beiden Ausnahmefasern im Wesentlichen beliebig sind. Es ist daher sinnvoll, Linsenräume ohne Bezug auf eine Seifert-Faserung zu definieren. Nach dem vorigen Lemma ist M ein Linsenraum genau dann wenn er aus einem Volltorus durch Ankleben eines weiteren Volltorus entsteht. Weil der Außenraum des trivialen Knotens ein Volltorus ist, erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 5.3.18 *Linsenräume entstehen durch Dehn-Eingriffe am trivialen Knoten.* □

Es sei $p/q \in \mathbb{Q} \cup \{1/0\}$ ein gekürzter Bruch, und es sei $p \geq 0$. Wir bezeichnen mit $L(p,q)$ den Linsenraum, der durch p/q-Dehn-Eingriff am trivialen Knoten entsteht (siehe Unterabschnitt 5.3.2). Man beachte, dass über die Rollen von p und q verschiedene Konventionen herrschen: Wir verwenden die Notation von [64], während [21] denselben Linsenraum mit $L_{q,p}$ statt mit $L(p,q)$ bezeichnen würde. Spätestens wenn die Fundamentalgruppe von Linsenräumen angesprochen wird, wird die Rolle von p und q jedoch klar, gemäß folgendem Lemma.

Lemma 5.3.19 *$\pi_1(L(p,q))$ ist eine zyklische Gruppe der Ordnung p, wobei man $\mathbb{Z}$ als zyklische Gruppe der Ordnung 0 auffasst.*

Beweis Wir fassen den abgeschlossene Volltorus V_1 als Außenraum des trivialen Knotens mit Meridian m und Longitude l auf. Dann ist $\pi_1(V_1) = \langle m, l \mid l = 1\rangle \cong \mathbb{Z}$ (man beachte, dass m der Meridian des Knotens und nicht der Meridian von V_1 ist!). Wir erhalten $L(p,q)$, indem wir an V_1 einen abgeschlossenen Volltorus V_2 ankleben, durch Dehn-Füllung an der Kurve $\alpha_{p/q}$ (vgl. Unterabschnitt 5.3.2). Es gilt $[\alpha_{p/q}] = m^p$ in $\pi_1(V_1)$, und wegen der Dehn-Füllung berandet $\alpha_{p/q}$ eine Scheibe in $L(p,q)$. Mit Satz 3.3.2 (Seifert–van-Kampen) folgt dann $\pi_1(L(p,q)) = \langle m \mid m^p = 1\rangle$ (Übung!), also die Behauptung. □

James W. Alexander [3] gelang es 1919, von zwei Linsenräumen derselben Fundamentalgruppe zu zeigen, dass sie nicht zueinander homöomorph sind. Die im folgenden Theorem angegebene vollständige Klassifikation von Linsenräumen gelang erst Kurt Reidemeister [53] im Jahre 1935. Reidemeister erfand dazu die heute so genannte **Reidemeister-Franz-Torsion**, die in ihren modernen Erweiterungen bis heute ein aktives Forschungsfeld ist.

Theorem 5.3.20 (Reidemeister 1935) *Zwei Linsenräume $L(p,q)$ und $L(p',q')$ sind genau dann zueinander homöomorph, wenn $p = p'$ und $q' \equiv \pm q^{\pm 1} \pmod p$.*

Whitehead [72] gab 1941 die folgende Klassifikation von Linsenräumen bis auf Homotopieäquivalenz an.

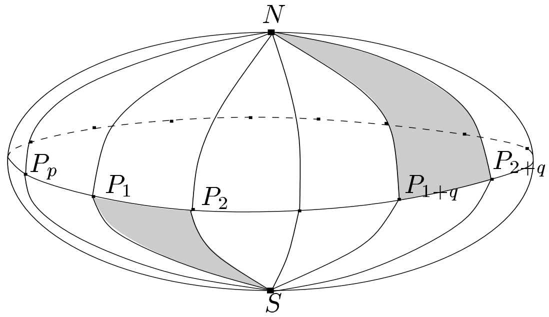
Theorem 5.3.21 (Whitehead 1941) *Zwei Linsenräume $L(p,q)$ und $L(p',q')$ sind genau dann zueinander homotopieäquivalent, wenn $p = p'$ und wenn es ein $l \in \mathbb{Z}$ gibt mit $q' \equiv \pm l^2 q \pmod p$.*

Diese beiden Ergebnisse implizieren, dass $L(7,1)$ und $L(7,2)$ zueinander homotopieäquivalent, aber nicht homöomorph sind. Die Räume $L(5,1)$ und $L(5,2)$ sind nicht zueinander homotopieäquivalent, lassen sich aber dennoch nicht durch ihre Fundamentalgruppe unterscheiden. Man beachte, dass das wegen Theorem 4.5.5 nur deshalb passieren kann, weil Linsenräume keine Haken-Mannigfaltigkeiten sind. Die meisten klassischen Invarianten aus der Algebraischen Topologie sind Homotopieinvarianten (wie etwa die Fundamentalgruppe). Mit ihrer Hilfe kann eine Klassifikation von Linsenräumen also nicht gelingen.

Übung 5.3.22

1. Unter welchen Bezeichnungen sind $L(1,0)$ und $L(0,1)$ noch bekannt?

2. Es sei p/q ein gekürzter Bruch, $p > 0$. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ die abgeschlossene Einheitsscheibe mit Mittelpunkt 0. Wir fassen $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{C} \times \mathbb{R} = \{(z,x)\}$ auf, $B \subset \mathbb{R}^3$ sei der abgeschlossene Einheitsball. Wir definieren auf $S^2 = \partial B$ eine Äquivalenzrelation durch $(z,x) \sim (ze^{\frac{2\pi i q}{p}}, -x)$ für $(z,x) \in S^2$, $x \leq 0$. Zeige, dass $L(p,q) \approx B/\!\sim$.
   Hinweis: Vergleiche die folgende Abbildung. Die Menge $\{(z,x) \in B \colon |z| \leq \frac{1}{2}\}$ wird im Quotienten zu einem abgeschlossenen Volltorus.



3. Es sei wieder $D \subset \mathbb{C}$ die abgeschlossene Einheitsscheibe mit Mittelpunkt 0. Dann ist $\overline{B^4} \approx D \times D \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Es sei p/q ein gekürzter Bruch, $p > 0$. Die zyklische Gruppe $\langle t \mid t^p = 1 \rangle$ der Ordnung p operiert durch $t.(z, w) := (ze^{\frac{2\pi i}{p}}, we^{\frac{2\pi i q}{p}})$ auf $S^3 \approx \partial(D \times D)$. Zeige $L(p, q) \approx S^3/\langle t \rangle$.

4. Linsenräume sind keine Haken-Mannigfaltigkeiten. Gibt es dennoch Linsenräume, die von S^2 verschiedene inkompressible Flächen enthalten? Welche Linsenräume sind reduzibel?

5. * Es sei eine geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeit M durch Dehn-Eingriff an einer Verkettung $K \subset S^3$ gegeben, also $M \approx K(p_1/q_1, \ldots, p_n/q_n)$. Konstruiere eine kompakte orientierbare 4-Mannigfaltigkeit X, abhängig von L und $p_1/q_1, \ldots, p_n/q_n$, mit $\partial X = M$. *Hinweis:* Zeige zuerst, dass jeder Linsenraum $L(p, q)$ der Rand einer 4-Mannigfaltigkeit $X(p, q)$ ist. Klebe derartige 4-Mannigfaltigkeiten an $\overline{B^4}$, jeweils entlang eines in $\partial X(p, q)$ enthaltenen Volltorus an die Komponenten von $U(K) \subset S^3 = \partial \overline{B^4}$.
Nach Theorem 5.3.6 sind also alle geschlossenen orientierbaren 3-Mannigfaltigkeiten null-bordant!

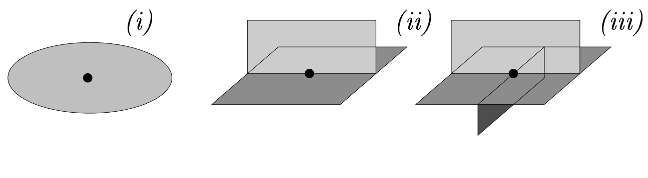
Kapitel 6

Spezielle Spines

In Abschnitt 4.2 haben wir Triangulationen von Mannigfaltigkeiten benutzt. Jede kompakte 3-Mannigfaltigkeit besitzt eine Triangulation [45], insofern bestand darin keine Einschränkung. Triangulationen von 3-Mannigfaltigkeitenlassen sich gut algorithmisch repräsentieren: Man betrachtet die Tetraeder $t_1, \ldots, t_n$ einer Triangulation einer 3-Mannigfaltigkeit und spezifiziert für alle 2-Simplexe, welche Tetraeder an sie stoßen. Aus algorithmischer Sicht wäre es von Vorteil, den Begriff der Triangulation abzuschwächen, informell etwa wie folgt: Ein abgeschlossenes k-Simplex einer *singulären Triangulation* $\mathcal{T}$ eines Raumes X ist eine stetige Abbildung $\phi\colon\ \sigma^k \to X$, so dass ϕ auf jedem *offenen* Simplex von σ^k eine Einbettung ist.[1] Ferner soll X die Vereinigung aller offener Simplexe von $\mathcal{T}$ sein, je zwei abgeschlossene Simplexe aus $\mathcal{T}$ in einer Vereinigung offener Simplexe von $\mathcal{T}$ schneiden, und die Randsimplexe eines Simplex aus $\mathcal{T}$ sollen ebenfalls zu $\mathcal{T}$ gehören. Der Sinn dieser Abschwächung ist, dass man bei einer singulären Triangulation im Allgemeinen mit weniger Simplexen auskommt als bei einer „echten“ Triangulation. Wir werden in diesem letzten Kapitel so genannte spezielle Spines untersuchen. Diese entsprechen singulären Triangulationen mit *einem* 0-Simplex, worauf wir jedoch nicht näher eingehen. Hauptreferenz ist das erste Kapitel aus dem Buch von Matveev [42].

6.1 Der Satz von Matveev-Piergallini

Definition 6.1.1 *Eine **Pseudofläche** P ist ein kompakter separierter Raum, bei dem jeder Punkt eine Umgebung der folgenden Arten besitzt:*



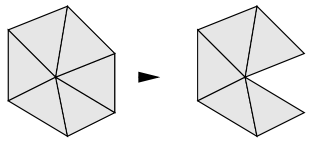
*Die Punkte mit einer Umgebung vom Typ (ii) bilden die **echten Kanten** von P, und die Punkte mit einer Umgebung vom Typ (iii) heißen **echte Ecken***

[1] Man beachte, dass abgeschlossene Simplexe von $\mathcal{T}$ nicht notwendig homöomorph zum Standardsimplex sind.

von P. Die drei bzw. sechs Flächenstücke, die an eine Kante bzw. eine Ecke anstoßen, nennt man auch ***Flügel****. Mit $\Gamma(P)$ bezeichnet man den* ***singulären Graphen*** *von P, der aus den echten Ecken und Kanten von P besteht. Die Zusammenhangskomponenten von $P \setminus \Gamma(P)$ heißen 2-****Strata*** *von P.*

Wenn P zusammenhängend ist, mindestens eine echte Ecke besitzt, $\Gamma(P)$ zusammenhängend ist und alle 2-Strata von P homöomorph zu offenen Scheiben sind, so heißt P eine ***spezielle Pseudofläche****.*

Definition 6.1.2 *Es sei $\mathcal{T}$ eine Triangulation eines Raumes X. Ein k-Simplex σ von $\mathcal{T}$ heißt frei, wenn es genau ein $(k+1)$-Simplex τ gibt, das σ im Rand enthält. Ein* ***Elementarkollaps*** *besteht dann im Entfernen von σ und τ (beides offene Zellen). Beispiel:*

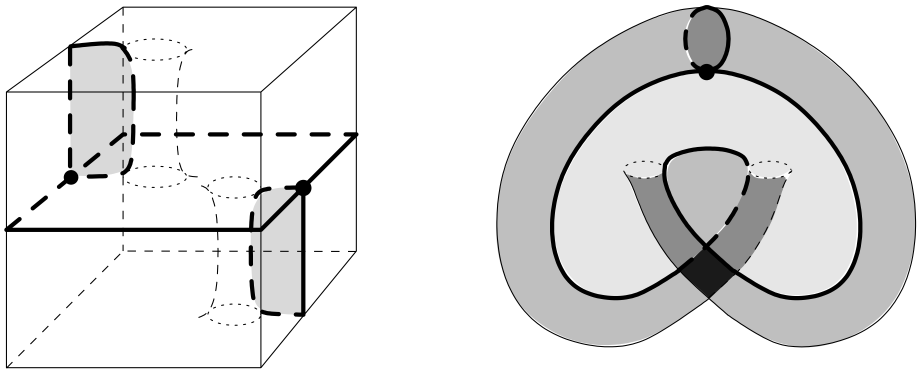


Definition 6.1.3 *Es sei M eine kompakte Dreimannigfaltigkeit mit $\partial M \neq \emptyset$, und es sei $\mathcal{T}$ eine Triangulation von M. Ein Teilkomplex $K \subset \mathcal{T}$ von $\mathcal{T}$ heißt* ***Kollabierretrakt*** *oder* ***Spine****, wenn M auf K simplizial kollabiert (d.h. wenn P aus $\mathcal{T}$ durch eine endliche Folge von Elementarkollapsen entsteht).*

Falls $\partial M = \emptyset$, so entfernt man vor dem Kollaps einen Dreiball aus M. Man kann zeigen, dass ein Teilkomplex K von $\mathcal{T}$ genau dann ein Spine von M ist, wenn $M \setminus K \approx \partial M \times [0,1[$ (für $\partial M \neq \emptyset$) bzw. $M \setminus K \approx B^3$ (für $\partial M = \emptyset$). Wenn K eine eingebettete spezielle Pseudofläche ist, so heißt K **spezieller Spine**. Jede Dreimannigfaltigkeit besitzt einen speziellen Spine, was wir jedoch erst weiter unten zeigen werden. Zwei Beispiele von speziellen Spines von $\overline{B^3}$ und S^3, nämlich „Bings Haus“ und das „Seeohr[2]“ (englisch *abalone*), sind in Abbildung 6.1 gezeigt. Dabei sind die echten Kanten fett gezeichnet und die echten Ecken durch dicke Punkte markiert. Die gepunktet gezeichneten Ellipsen sind nicht Ränder von 2-Strata, sondern markieren nur Anfang und Ende von „Tunneln“. Die gestrichelten Linien sind verdeckt. Beim der Zeichnung des Seeohrs zeigt die Sättigung der Schraffur an, durch wie viele 2-Strata man an jeder Stelle blickt, also so als ob diese aus getöntem Glas bestünden. Bings Haus hat zwei echte Ecken, vier echte Kanten sowie drei 2-Strata: die beiden schattierten „Trennwände“ sowie den Rest, der aus drei durch Streifen verbundenen geschlitzten Scheiben besteht. Das Seeohr hat nur eine echte Ecke, zwei echte Kanten sowie zwei 2-Strata.

Übung 6.1.4 Man meditiere über die Abbildung und mache sich klar, wie Bings Haus und das Seeohr aufgebaut sind. Bings Haus und das Seeohr sind, so wie sie gezeichnet sind, in einem abgeschlossenen 3-Ball enthalten. Zeige, dass Bings Haus und das Seeohr tatsächlich spezielle Spines von $\overline{B^3}$ sind.

[2]Das Seeohr, Gattung *Haliotis*, ist ein einschaliger Mollusk. Es gehört zur Familie der Haliotiden und der Klasse der Gastropoden. Die meisten Unterarten leben an der Pazifikküste Nordamerikas.



Bings Haus Seeohr (Abalone)

Abbildung 6.1: Bings Haus und Seeohr

Durch die Homöomorphieklasse eines Spines ist eine geschlossene 3-Mannigfaltigkeit M nicht eindeutig bestimmt. Beispiel: Die Linsenräume $L(5,1)$ und $L(5,2)$ entstehen durch Verkleben von Ober- und Unterseite der „Linse“ aus Abbildung 6.2 mit einem Fünftel- bzw. Zweifünfteltwist. Beide Räume sind

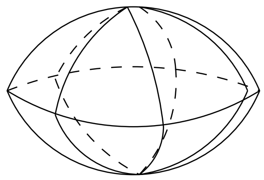


Abbildung 6.2: Linsenräume

nicht zueinander homöomorph (vgl. Theorem 5.3.20). Aus dem Rand der Linse entsteht durch Verkleben ein Spine P_1 (bzw. P_2) von $L(5,1)$ (bzw. $L(5,2)$), denn nach dem Entfernen des Randes bleibt von der Linse nur ein offener 3-Ball übrig, bei dem nichts mehr verklebt wird. Wir betrachten nun den Komplex P_k ($k = 1, 2$) näher. Da jeder Punkt von P_i ein Urbild in der abgeschlossenen oberen Hälfte des Randes der Linse hat, können wir P_k auch aus einer abgeschlossenen Scheibe $\overline{B^2}$ gewinnen, deren Rand S^1 durch einen $\frac{1}{5}$- oder $\frac{2}{5}$-Twist verklebt wird. Wenn wir $\overline{B^2}$ als Teilmenge der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ auffassen, gilt also $P_k \approx \overline{B^2}/{\sim_k}$, wobei $\sim_k$ durch $x \sim_k x \cdot e^{2\pi \frac{k}{5} i}$ für $x \in S^1$ erzeugt wird. Weil sowohl 1 als auch 2 modulo 5 invertierbar sind, gilt $x \sim_1 y$ genau dann wenn $x \sim_2 y$ (für $x, y \in S^1$). Also ist $P_1 \approx P_2$. Die beiden nicht-homöomorphen 3-Mannigfaltigkeiten $L(5,1)$ und $L(5,2)$ haben also homöomorphe Spines P_1 und P_2. Der Grund für dieses Phänomen ist, dass an den Kreis $S^1/{\sim_k}$ jeweils fünf statt nur drei Flügel anstoßen, P_k also nicht einfach und erst recht nicht speziell ist. Ein Homöomorphismus $\phi\colon P_1 \approx P_2$ lässt sich nämlich nicht auf einen Homöomorphismus der *Umgebungen* von P_1 und P_2 in $L(5,1)$ und $L(5,2)$ fortsetzen, siehe Abbildung 6.3.

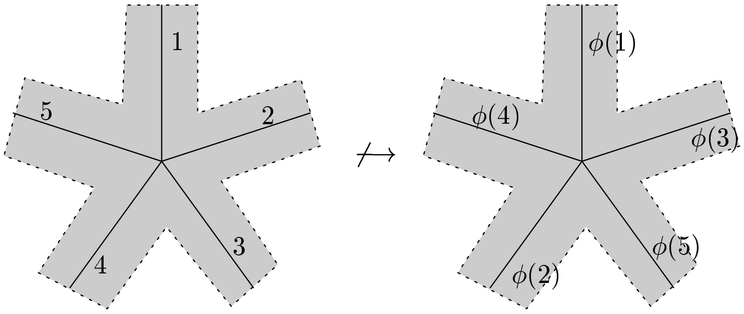


Abbildung 6.3: Fehlende Fortsetzbarkeit von Homöomorphismen auf Umgebungen nicht-einfacher Spines

Auch ein einfacher Spine bestimmt eine Mannigfaltigkeit nicht eindeutig. Technisch ausgedrückt liegt das daran, dass 2-Strata, die nicht offene Scheiben sind, verschiedene zueinander nicht-homöomorphe Intervall-Bündel besitzen. Beispiel: Wir betrachten den Würfel $W = \{(x, y, z)\colon\, x, y, z \in [-1, 1]\}$. Wir erhalten Mannigfaltigkeiten M_1 bzw. M_2 aus W durch Verkleben von $(-1, y, z) \sim_1 (1, y, z)$ bzw. $(-1, y, z) \sim_2 (1, y, -z)$. Natürlich ist $M_1 \not\approx M_2$, denn M_1 ist orientierbar, M_2 hingegen nicht. Aus Verkleben von $\{(x, y, 0)\} \subset W$ entsteht ein in M_i eingebetteter Annulus P_i, der ein Spine von M_i ist $(i = 1, 2)$. Auch hier gilt $P_1 \approx P_2$ trotz $M_1 \not\approx M_2$. Es ist also alles andere als selbstverständlich, dass die beschriebenen Mehrdeutigkeiten im Falle von *speziellen* Spines gemäß folgenden Theorems nicht auftreten.

Theorem 6.1.5 *Eine 3-Mannigfaltigkeit M ist durch die Homöomorphieklasse eines speziellen Spines sowie durch die Angabe, ob $\partial M = \emptyset$, bis auf Homöomorphismen eindeutig bestimmt.* □

Einen Beweis dafür werden wir hier nicht führen, sondern verweisen auf [12], [22] oder [42]. Das Theorem erlaubt, dreidimensionale Mannigfaltigkeiten mit Hilfe von zweidimensionalen Objekten vollständig zu beschreiben. Man kann sogar noch weiter gehen: Jede spezielle Pseudofläche P ist bereits durch den Homöomorphietyp einer kleinen Umgebung $U(\Gamma(P))$ des singulären Graphen bestimmt. An jede Kante von $\Gamma(P)$ stoßen ja drei und an jede Ecke von $\Gamma(P)$ sechs Flügel, und an $U(\Gamma(P))$ kann man ablesen, wie diese Flügel von Kante zu Kante von $\Gamma(P)$ verlaufen — siehe zum Beispiel Abbildung 6.4.

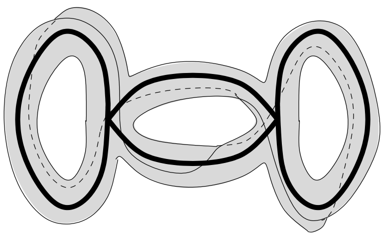


Abbildung 6.4: Eine durch $U(\Gamma(P))$ gegebene Pseudofläche P

Hier ist $\Gamma(P)$ fett gezeichnet, und die Flügel entlang der echten Kanten und Ecken von $\Gamma(P)$ sind in die Ebene projiziert; die Ränder der Flügel sind gestrichelt gezeichnet, falls sie in der Projektion verdeckt sind. In Abbildung 6.5 sind dann nur noch die Flügel gezeichnet, weil sich $S(P)$ daraus ergibt.

Der Rand von $U(\Gamma(P))$ besteht aus einigen Kreisen, und da die 2-Strata von P offene Scheiben sind, entsteht P aus $U(\Gamma(P))$ durch das Ankleben von Scheiben an alle Komponenten des Randes von $U(\Gamma(P))$. Da es für das Ankleben von Scheiben bis auf Homöomorphismen nur eine Möglichkeit gibt, ist P bereits durch $U(\Gamma(P))$ im Wesentlichen bestimmt. Wenn P Spine einer (geschlossenen) 3-Mannigfaltigkeit ist, so ist diese also ebenfalls durch $U(\Gamma(P))$ bestimmt.

Übung 6.1.6 Zeige, dass Abbildung 6.4 Bings Haus definiert.

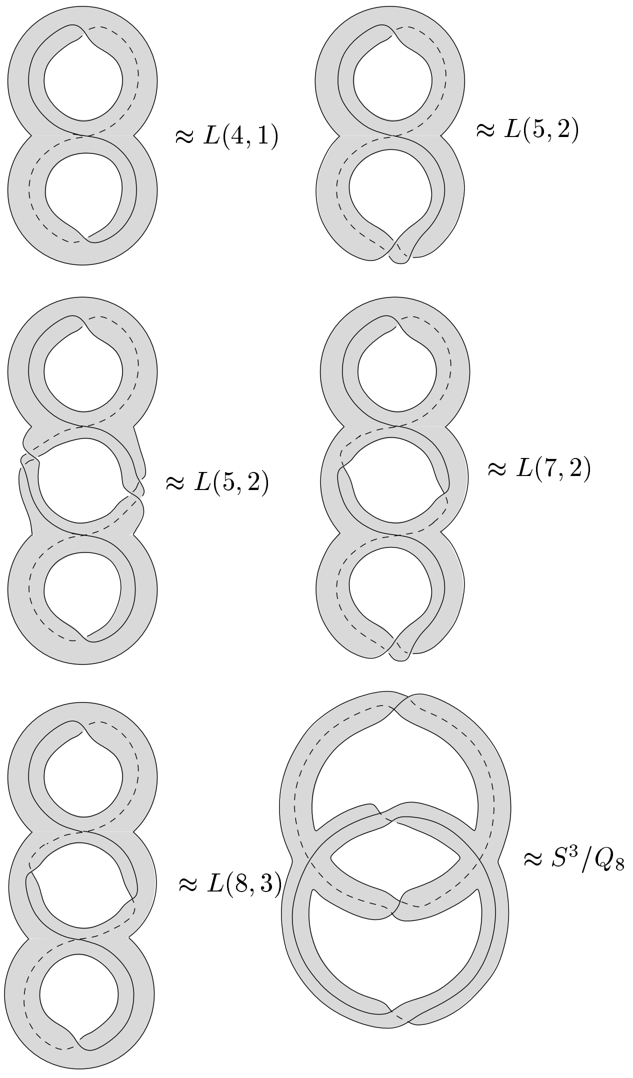


Abbildung 6.5: Spezielle Spines mit ein oder zwei echten Ecken

Da man Graphen leicht zeichnen kann, erhält man so eine elegante Möglichkeit, jede 3-Mannigfaltigkeit durch eine Zeichnung darzustellen. Natürlich ist der singuläre Graph einer speziellen Pseudofläche nicht immer ein ebener Graph. Abbildung 6.5 zeigt einige Beispiele[3]. Dabei ist $Q_8 = \langle x, y \mid x^2 = (xy)^2 = y^2 \rangle$ die Quaternionengruppe, die auf der 3-Sphäre (aufgefasst als Einheitssphäre im Schiefkörper der Quaternionen) operiert. Es wäre natürlich zuviel verlangt, sich das Ankleben von Scheiben an $U(\Gamma(P))$ noch im $\mathbb{R}^3$ vorzustellen, da Pseudoflächen in der Regel nicht in $\mathbb{R}^3$ einbettbar sind. Nicht jede spezielle Pseudofläche tritt als Spine einer 3-Mannigfaltigkeit auf. Man kann jedoch ziemlich leicht algorithmisch erkennen, ob eine gegebene spezielle Pseudofläche Spine einer 3-Mannigfaltigkeit ist [42].

Zwar ist eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit M im Wesentlichen durch ihren Rand und durch einen speziellen Spine P bestimmt, doch ist P nicht eindeutig durch M bestimmt: In Abbildung 6.6 sieht man zwei Prozesse T und T_0, die P in einen anderen speziellen Spine von M überführen. Gezeigt ist jeweils ein Ausschnitt von P, der in einem Dreiball in M liegt und durch einen anderen ersetzt wird (Der Rest von P bleibt natürlich unverändert). T heißt Matveev-Piergallini-Prozeß.

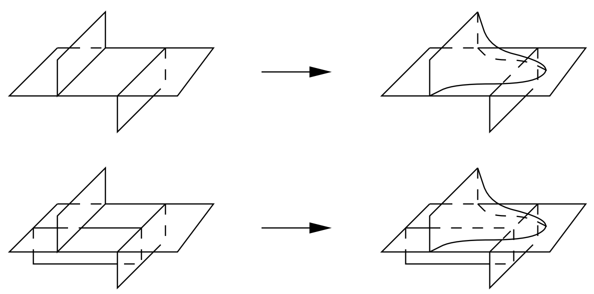


Abbildung 6.6: Die Prozesse T_0 (oben) und T („Matveev-Piergallini-Prozeß“)

Man löst sich nun von der Realisierung dieser Prozesse in M und faßt sie als Prozesse auf speziellen Pseudoflächen auf. T besitzt offenbar ein Inverses. Ein inverser T_0-Prozeß führt nicht immer auf eine spezielle Pseudofläche, denn es werden zwei Flächenstücke verbunden, die im ungünstigen Falle einen Annulus oder ein Möbiusband bilden — in diesem Fall ist die Anwendung von T_0 nicht zulässig. Mit dieser Einschränkung definieren T, T_0 und ihre Inversen eine Äquivalenzrelation $\sim_T$ auf speziellen Pseudoflächen. Das folgende Theorem wurde 1988 unabhängig von Matveev [40] und Piergallini [48] gefunden. Wir werden in den folgenden Unterabschnitten einen Beweis nach [42] skizzieren.

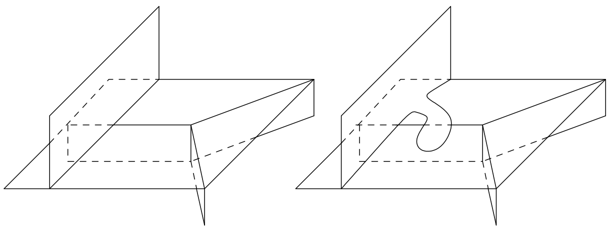
Theorem 6.1.7 *Sind P_1 und P_2 spezielle Spines einer kompakten Dreimannigfaltigkeit M, so folgt $P_1 \sim_T P_2$.*

[3] Matveev definiert den Begriff der *fast speziellen Spines*. Er zeigte, dass jeder fast spezielle Spine einer geschlossenen irreduziblen 3-Mannigfaltigkeit M mit einer minimalen Anzahl von echten Ecken bereits *speziell* ist — außer wenn $M \approx S^3, \mathbb{R}P^3$ oder $L(3,1)$. In diesem Fall besitzt ein minimaler fast spezieller Spine gar keine echten Ecken. Die Abbildung 6.5 zeigt nach Matveev alle geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten mit minimalen fast speziellen Spines mit ein oder zwei echten Ecken. Inzwischen hat er Algorithmen entwickelt, die alle geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten mit minimalen fast speziellen Spines von bis zu 11 echten Ecken finden, siehe [43].

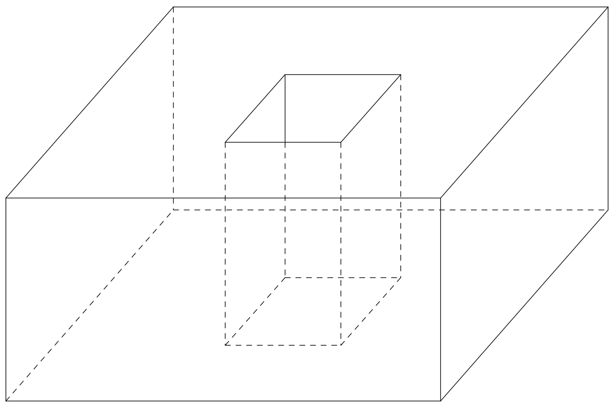
In der ersten der folgenden Übungen soll eine Verschärfung dieses Theorems bewiesen werden: Wenn zwei spezielle Spines P_1 und P_2 einer kompakten Dreimannigfaltigkeit jeweils mindestens zwei echte Ecken besitzen, so gehen sie durch eine endliche Kette von T- und T^{-1}-Prozessen ineinander über. Der Prozess T_0 ist also überflüssig, denn *jede* kompakte 3-Mannigfaltigkeit besitzt spezielle Spines mit mindestens zwei echten Ecken. Genauer gesagt gibt es nur endlich viele 3-Mannigfaltigkeiten, die auch spezielle Spines mit nur einer Ecke besitzen.

Übung 6.1.8

1. Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt aus einer Pseudofläche mit mindestens zwei echten Ecken. Die rechts abgebildete Pseudofläche entsteht aus der linken durch Anwendung eines T_0-Prozesses. Zeige, dass man den gleichen Effekt auch durch mehrfache Anwendung von $T^{\pm 1}$-Prozessen erreichen kann. Zeige, dass man *jeden* T_0-Prozess durch Anwendung des im Bild gezeigten Prozesses und ggf. weitere T-Prozesse erhalten kann.



2.
   - Zeichne einen speziellen Spine $\mathcal{P}$ des Volltorus (Abbildung). Zeichne auch $U(\Gamma(\mathcal{P}))$.

   - Allgemeiner: Überlege Dir eine Konstruktion, die spezielle Spines von Henkelkörpern liefert.
   - Es sei c eine einfach geschlossene Kurve im Rand des Volltorus. Wie kann man aus $\mathcal{P}$ einen speziellen Spine $\tilde{\mathcal{P}}$ des durch Dehn-Füllung an c definierten Linsenraums gewinnen? Konkretes Beispiel, möglichst mit Zeichnung von $U(\Gamma(\tilde{\mathcal{P}}))$!

6.1.1 Der Prozeß S

Im Beweis von Theorem 6.1.7 werden wir zunächst zeigen, dass zwei spezielle Spines eine Mannigfaltigkeit durch eine Kette von T- und T_0-Prozessen sowie eines weiteren Prozesses S ineinander übergehen. Dieser Prozess S transformiert einen speziellen Spine zwar wieder in eine spezielle Pseudofläche, doch ist diese nicht mehr Spine der ursprünglichen Mannigfaltigkeit. Im darauffolgenden Unterabschnitt werden wir den S-Prozess aber wieder loswerden. Im Folgenden bezeichne M nicht nur eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit, sondern zugleich eine fest gewählte Triangulation.

Der Transformationsprozess S besteht im Hinzufügen einer Scheibe an eine Kante eines speziellen Spines, siehe Abbildung 6.7. Dadurch entstehen zwei neue echte Ecken. Der Prozess S ändert die Euler-Charakteristik $\chi(P)$ um $+1$. T, T_0

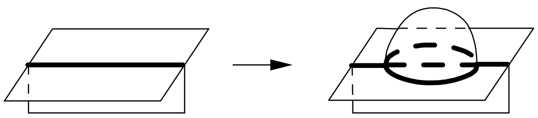


Abbildung 6.7: Der S-Prozess

und S (mit inversen Prozessen) definieren eine Äquivalenzrelation $\sim_{ST}$.

Behauptung 6.1.9 *Es sei P eine Pseudofläche, und es entstehe sowohl Q_1 als auch Q_2 aus P durch jeweils einen S-Prozess. Dann folgt $Q_1 \sim_T Q_2$. (Man kann nämlich die für Q_1 angeklebte Scheibe mittels T_0 und T entlang des zusammenhängenden Graphen $\Gamma(P)$ verschieben und erhält so Q_2.)* □

Definition 6.1.10 *Es sei K ein zusammenhängender, von einem Punkt verschiedener Teilkomplex von M und M' die baryzentrische Unterteilung der Triangulation von M.*

$$L(K, M') := \bigcup_{v \in K^0} \mathrm{lk}(v, M').$$

$L(K, M')$ liegt also im Zweigerüst der dualen Zellenzerlegung von M und ist eine Pseudofläche. Wenn für alle $v \in K^0$ der Link von v in K' zusammenhängend ist, ist $L(K, M')$ sogar speziell: Mit dieser Zusatzbedingung sind die Flächen von $L(K, M')$ Scheiben (sie liegen jeweils in $\mathrm{lk}(v, M')$), und der Graph $\Gamma(L(K, M'))$ ist zusammenhängend.

Lemma 6.1.11 *Ein Teilkomplex P von M sei eine spezielle Pseudofläche. Dann gilt $L(P', M'') \sim_{ST} P$.*

Beweis Wir nummerieren die in P enthaltenen Ecken $v_1, \ldots, v_n$ von M' so, dass v_1 sogar eine *echte* Ecke von P ist und dass $v_i v_{i+1}$ eine Kante von M' ist, für alle $i = 1, \ldots, n-1$. Es sei

$$P_i := \left(P' - \bigcup_{k=1}^{i} \mathrm{st}\,(v_k, P'') \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{i} \mathrm{lk}\,(v_k, M'') \right)$$

Man kann leicht zeigen, dass P_1 aus P durch einen S-Prozess in der Nähe von v_1 und einen T-Prozess hervorgeht, welcher die durch S erzeugte „Blase" über v_1 hinwegzieht. Des weiteren entsteht P_{i+1} aus P_i durch einen S-Prozeß und Verschieben der Scheibe mit T- und T_0-Prozessen über die Ecke v_i. Die Wahl der Nummerierung $v_1, \ldots, v_n$ sorgt dafür, dass P_i eine spezielle Pseudofläche ist, für alle $i = 1, \ldots, n$. Per definitionem gilt $P_n = L(P', M'')$. □

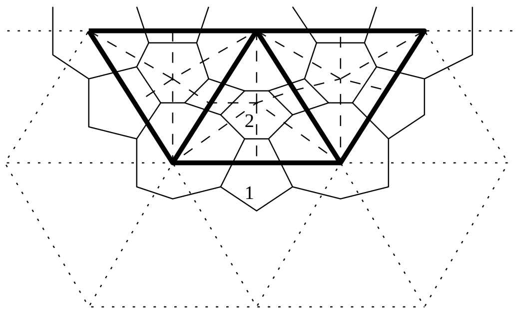


Abbildung 6.8: Das Duale eines Elementarkollapses

Lemma 6.1.12 *Es seien K_1, K_2 zwei von einem Punkt verschiedene Teilkomplexe von M, und es kollabiere K_2 simplizial auf K_1. Ferner sei $\operatorname{lk}(v, K_i')$ für alle Ecken v und für $i = 1, 2$ zusammenhängend. Dann folgt*

$$L(K_1', M'') \sim_{ST} L(K_2', M'').$$

Beweis Man betrachtet einen Elementarkollaps von K_2 auf K_1. Dabei wird auch das Entfernen eines 2-Simplexes mit *zwei* freien Seiten in einem Zug als elementar angesehen; der sonst übliche Umweg über ein 1-Simplex mit einer freien Seite wird vermieden, weil sonst die Eckenlinks nicht mehr zusammenhängend wären. Wenn beim Elementarkollaps ein 3-Simplex mit einer freien Seite oder ein Zweisimplex mit einer freien Seite entfernt wird, so entsteht $L(K_1', M'')$ aus $L(K_2', M'')$ durch zwei inverse S-Prozesse. Wird ein 2-Simplex mit zwei freien Seiten entfernt, so entsteht $L(K_1', M'')$ aus $L(K_2', M'')$ durch 4 inverse S-Prozesse. Abbildung 6.8 zeigt als Beispiel einen zweidimensionalen Komplex K_1 (dick gezeichnet) und dessen baryzentrische Unterteilung (gestrichelt) in der triangulierten Mannigfaltigkeit (gepunktet; man stelle sie sich aufgedickt vor). Die durchgezogenen Linien zeigen die Projektion von $L(K_1', M'')$ in die Ebene, man stelle sich $L(K_1', M'')$ als Prisma vor. Das mittlere der drei Dreiecke von K_1 kollabiert nun. Entferne die mit 1 bezeichnete Fläche von $L(K_1', M'')$ (auch im Prisma ist das nur *eine* Fläche), danach die mit 2 bezeichnete (dies geht erst nach Entfernen der ersten Fläche). Es entsteht also $L(K_2', M'')$ durch zwei inverse S-Prozesse, wie behauptet. □

Satz 6.1.13 *Es seien P_1 und P_2 zwei spezielle Spines von M. Dann gilt $P_1 \sim_{ST} P_2$.*

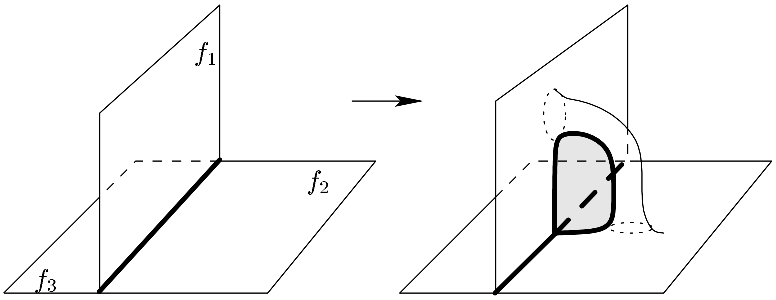


Abbildung 6.9: Der Brückenprozess B

Beweis Es sei $N \subseteq M$ ein Teilkomplex von M, so dass $M \setminus N \approx \partial M \times [0,1[$ und $P_1 \cup P_2 \subset N$ gilt. Man kann zeigen, dass dies keine Einschränkung ist, denn ein solcher Teilkomplex existiert immer nach zweimaliger baryzentrischer Unterteilung von M. Alle Eckenlinks von P_1', P_2' und N' sind zusammenhängend. N kollabiert sowohl auf P_1 als auch auf P_2 — genauer gesagt wird auch dies wieder nötigenfalls durch baryzentrisches Unterteilen erreicht. Also gilt mit Lemmas 6.1.11 und 6.1.12, dass $P_1 \sim_{ST} L(P_1', M'') \sim_{ST} L(N', M'') \sim_{ST} L(P_2', M'') \sim_{ST} P_2$. □

6.1.2 Der Brückenprozess

Das Ziel dieses Unterabschnitts ist es, die im vorigen Unterabschnitt eingeführten $S^{\pm 1}$-Prozesse in eine Folge von $T^{\pm 1}$- und $T_0^{\pm 1}$-Prozesse zu zerlegen. Dazu definieren wir einen weiteren Prozess B, der sich als eine Art Inverses zu S herausstellen wird. Es sei $P \subset M$ eine spezielle Pseudofläche. Der Prozess B (*Brückenprozess*) verbindet zwei Flügel f_1 und f_2 einer echten Kante von P durch einen Schlauch und stopft das entstehende Loch zwischen Kante und Schlauch durch ein scheibenförmiges 2-Stratum; vgl. Abbildung 6.9. Man kann sich leicht überlegen, dass dadurch wieder eine spezielle Pseudofläche entsteht. Der Prozess B wird nur dann angewandt, wenn der Schlauch zwei verschiedene Zusammenhangskomponenten von $M \setminus P$ verbindet, wenn also der Flügel f_3 in Abbildung 6.9 an zwei verschiedene Zusammenhangskomponenten von $M \setminus P$ stößt.

Es bezeichne $S(Q)$ das Resultat eines auf eine spezielle Pseudofläche Q angewendeten Prozesses S. Nach Behauptung 6.1.9 ist es bis auf T-Äquivalenz gleichgültig, an welcher Stelle der Prozess S angewandt wird. Mit $B(S(Q))$ wird dann eine spezielle Pseudofläche bezeichnet, die durch einen Brückenprozess an der durch den Prozess S entstandene „Blase" aus $S(Q)$ entsteht; vgl. Abbildung 6.10 rechts unten.

Lemma 6.1.14 *Es sei Q eine spezielle Pseudofläche. Dann gilt $B(S(Q)) \sim_T Q$.*

Beweis Siehe Abbildung 6.10. Die in der Abbildung links oben gegebene Ecke lässt sich notfalls durch einen vorherigen T_0-Prozeß erzeugen. □

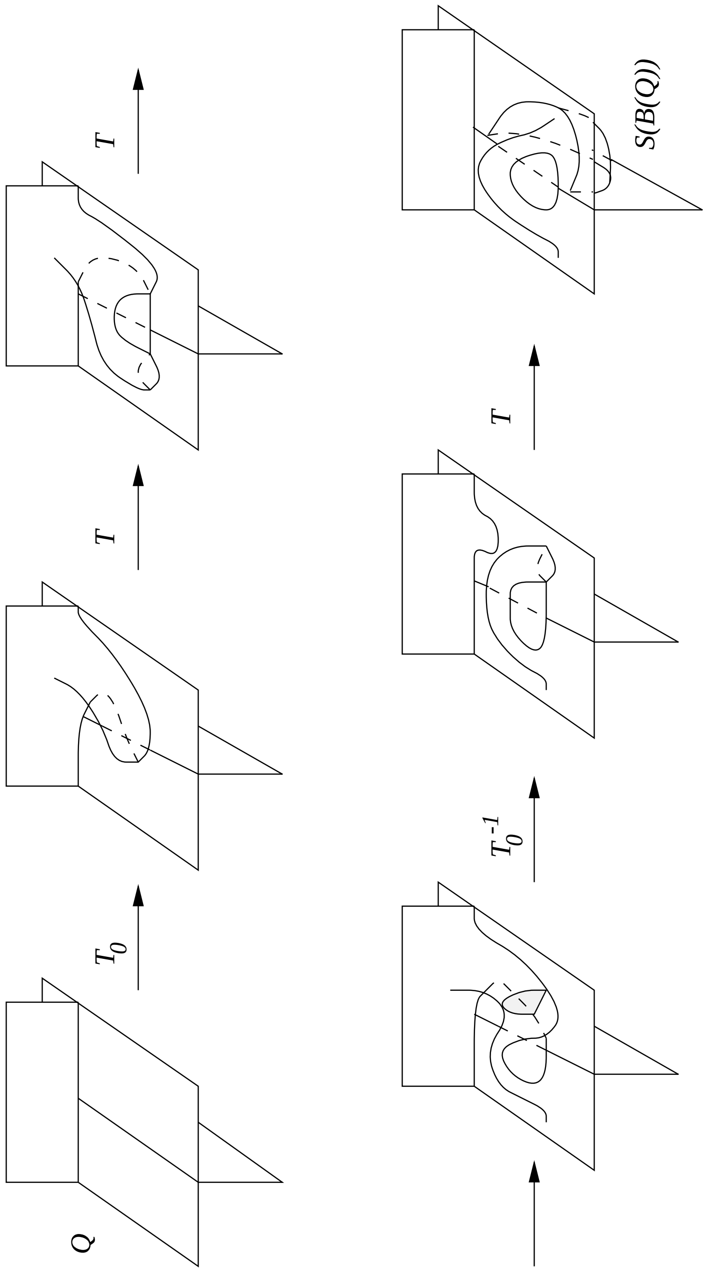


Abbildung 6.10: $B\left(S\left(Q\right)\right) \sim_T Q$

Die Voraussetzungen des folgenden Lemmas hören sich ziemlich kompliziert an. Die Skizze in Abbildung 6.11 hilft hoffentlich, die Aussage und den Beweis des Lemmas zu verstehen.

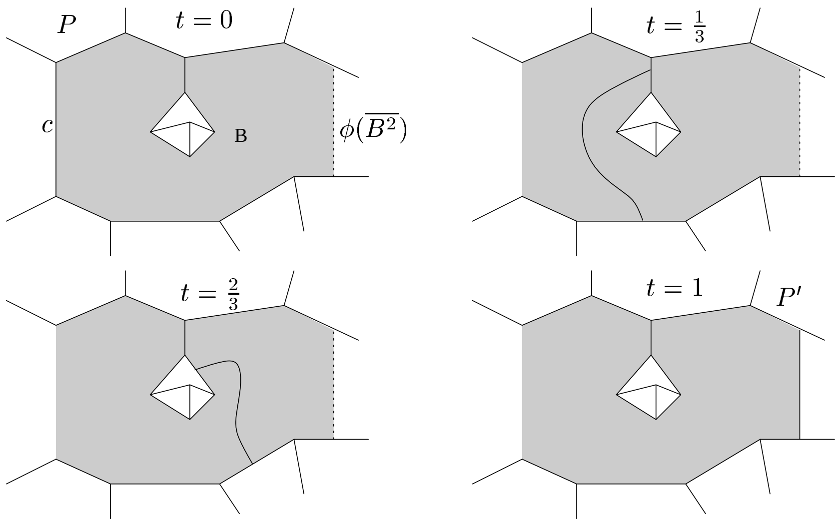


Abbildung 6.11: Scheibenaustauschlemma

Lemma 6.1.15 (Scheibenaustauschlemma) *Es sei $P \subset M$ eine spezielle Pseudofläche, und es sei $\phi\colon \overline{B^2} \hookrightarrow M$ eine Einbettung mit $\phi(\overline{B^2}) \cap P = \phi(\partial \overline{B^2})$, so dass $P \cup \phi(\overline{B^2})$ eine spezielle Pseudofläche ist. Ferner sei B eine zu B^3 homöomorphe Zusammenhangskomponente von $M \setminus (P \cup \phi(\overline{B^2}))$, die an $\phi(\overline{B^2})$ stößt.*

Es sei c ein an B stoßendes 2-Stratum von P, so dass der Abschluss von c in P eine abgeschlossene Scheibe ist, und $c \cap \phi(\overline{B^2}) = \emptyset$. Ferner sei $P \setminus c$ eine spezielle Pseudofläche. Dann ist auch $P' := (P \cup \phi(\overline{B^2})) \setminus c$ eine spezielle Pseudofläche, und $P \sim_T P'$.

Beweis Aus den Voraussetzungen des Lemmas folgt, dass es eine stetige Abbildung $\Phi\colon \overline{B^2} \times [0,1] \to M$ gibt, so dass $\Phi|_{B^2 \times [0,1]}$ eine Isotopie von c nach $\phi(B^2)$ ist und $\Phi(B^2 \times]0,1[) = B$ gilt. Weil $\Phi(\partial \overline{B^2} \times \{t\})$ für $t \in [0,1]$ im Allgemeinen kein eingebetteter Kreis ist, ist Φ selbst *keine* Isotopie.

Es sei nun $P_t := (P \setminus c) \cup \Phi(\overline{B^2} \times \{t\})$ und $\gamma_t := \Phi(\partial \overline{B^2} \times \{t\})$ für $t \in [0,1]$. Nach Konstruktion ist $P_0 = P$ und $P_1 = P'$. Mit ähnlichen Argumenten wie schon in früheren Kapiteln („Allgemeine Lage") kann man voraussetzen, dass es für alle $t \in [0,1]$ nur endlich viele transversale Doppelpunkte sowie höchstens eine der folgenden „Ausnahmestellen" gibt:

1. einen tangentialen Doppelpunkt von γ_t, enthalten in einem 2-Stratum von $P \setminus c$,

2. einen Tangentialpunkt von γ_t mit einer echten Kante von $P \setminus c$,

3. einen in einer echten Kante k von $P \setminus c$ enthaltenen transversalen Doppelpunkt von γ_t, wobei γ_t zu k transversal ist, oder

4. eine in γ_t enthaltene echte Ecke v von $P \setminus c$, wobei jeder v enthaltende Abschnitt von γ_t zwei verschiedene Flügel von v trifft.

Die zugehörigen Übergänge von $P_{t-\epsilon}$ nach $P_{t+\epsilon}$ für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ sind in Abbildung 6.12 skizziert, wobei $\Phi(\overline{B^2} \times \{t\})$ schattiert ist. Man kann

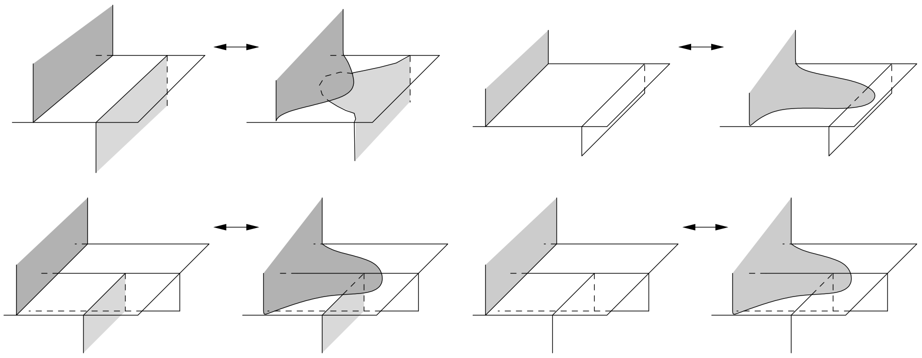


Abbildung 6.12: Übergänge an Ausnahmestellen

zeigen (Übung oder [42]), dass P_t eine spezielle Pseudofläche ist, falls γ_t keine Ausnahmestelle besitzt. Diese speziellen Pseudoflächen gehen an den Ausnahmestellen durch $T_0^{\pm 1}$-Prozesse (Fälle 1.+2.) oder $T^{\pm 1}$-Prozesse (Fälle 3.+4.) ineinander über, wodurch das Lemma bewiesen ist. □

Lemma 6.1.16 *Es seien P_1, P_2 zwei spezielle Spines von M. Wenn $S(P_1) \sim_T S(P_2)$, so folgt $B(S(P_1)) \sim_T B(S(P_2))$.*

Beweis Es sei P eine in der Transformation von $S(P_1)$ nach $S(P_2)$ auftretende spezielle Pseudofläche. Jeder $T^{\pm 1}$- oder $T_0^{\pm 1}$-Prozess in der Transformation von $S(P_1)$ zu $S(P_2)$ lässt sich auch noch nach Anwendung eines B-Prozesses auf P noch durchführen, solange die durch den B-Prozess erzeugte echte Ecke nicht in dem durch den $T^{\pm 1}$- oder $T_0^{\pm 1}$-Prozess geänderten Bereich enthalten ist. Wir können also induktiv voraussetzen, dass es eine durch einen B-Prozess aus P entstandene spezielle Pseudofläche $B(P)$ gibt mit $B(S(P_1)) \sim_T B(P)$. Falls die Brücke von $B(P)$ bei der Ausführung des nächsten $T^{\pm 1}$- oder $T_0^{\pm 1}$-Prozesses stört, so wollen wir sie unter Anwendung von Lemmas 6.1.14 und 6.1.15 mit folgender Technik an eine andere Stelle verschieben.

Nach Konstruktion verbindet die Brücke von $B(P)$ zwei verschiedene Zusammenhangskomponenten von $M \setminus P$, wobei mindestens eine von ihnen homöomorph zu B^3 ist. Es gibt daher eine Einbettung $\phi\colon \overline{B^2} \hookrightarrow M$, so dass $B(P) \cup \phi(B^2)$ von der Form $B(S(P))$ ist (vgl. Abbildung 6.10 rechts unten) und eine Zusammenhangskomponente B von $M \setminus (B(P) \cup \phi(B^2))$ homöomorph zu B^3 ist. Durch Anwenden eines T_0-Prozesses können wir voraussetzen, dass $B(P)$ ein 2-Stratum wie in Lemma 6.1.15 besitzt. Dann ist nach Lemma 6.1.15 $B(P) \sim_T (B(P) \setminus c) \cup \phi(B^2) = B(S(P \setminus c))$. Nach Lemma 6.1.14 ist aber $B(S(P \setminus c)) \sim_T P \setminus c$. Nun kehren wir das Argument um, erzeugen mit Lemma 6.1.14 ein Blase-Brücke-Paar an einer anderen Stelle von $P \setminus c$ und formen mit Lemma 6.1.15 weiter in eine spezielle Pseudofläche um, die aus P durch einen B-Prozess entstanden ist, deren Brücke an einer anderen Stelle als bei $B(P)$ liegt und nicht mehr stört. □

Wir kommen nun zum Ende des Beweises von Theorem 6.1.7. Es seien P_1 und P_2 zwei spezielle Spines einer triangulierten 3-Mannigfaltigkeit M. Nach Satz 6.1.13 ist $P_1 \sim_{ST} P_2$. Ferner ist $\chi(P_1) = \chi(P_2) = \chi(M)$, also muss die Anzahl der ausgeführten S-Prozesse gleich der Anzahl der ausgeführten *inversen* S-Prozesse sein. Es ergibt sich folgende Situation im Falle eines S-S^{-1}-Paares: $P_1 \longrightarrow_S Q_1 \sim_T Q_2 \longleftarrow_S P_2$. Einerseits gilt $P_1 \sim_T B(Q_1)$ und $P_2 \sim_T B(Q_2)$ nach Lemma 6.1.14, andererseits gilt $B(Q_1) \sim_T B(Q_2)$ nach Lemma 6.1.16. Insgesamt erhält man also $P_1 \sim_T P_2$. Im Falle mehrerer S-S^{-1}-Paare folgt $P_1 \sim_T P_2$ durch Induktion.

Ist damit nun Theorem 6.1.7 bewiesen? Noch nicht ganz. Wir haben nämlich bisher im Beweis M nicht nur als kompakte 3-Mannigfaltigkeit aufgefasst, sondern als *triangulierte* (nicht etwa nur *triangulierbare*!) 3-Mannigfaltigkeit. Auch die Definition von Spines erfordert durch den Bezug auf simpliziale Kollapse die Wahl einer Triangulation von M. Können wir Theorem 6.1.7 auch dann beweisen, wenn P_1 und P_2 spezielle Spines von M bezüglich verschiedener Triangulationen von M sind? Ja, aber das beruht auf einem tief liegenden im Jahre 1952 bewiesenen Theorem von Moise, der so genannten „Hauptvermutung" (englisch *hauptvermutung*).[4] Die Hauptvermutung besagt, dass je zwei Triangulationen $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ einer kompakten 3-Mannigfaltigkeit eine gemeinsame Unterteilung besitzen, dass es also eine Triangulation $\mathcal{T}_0$ von M gibt, so dass $\mathcal{T}_1^2 \cup \mathcal{T}_2^2$ im 2-Gerüst von $\mathcal{T}_0$ enthalten ist. Man beachte, dass die entsprechende Aussage in höheren Dimensionen nicht gilt! Aus der Hauptvermutung folgt also, dass man zu zwei beliebigen speziellen Spines P_1 und P_2 von M eine Triangulation $\mathcal{T}$ von M finden kann, die sowohl auf P_1 als auch auf P_2 simplizial kollabiert. Damit ist Theorem 6.1.7 bewiesen. □

Übung 6.1.17 Warum genügt es für den Beweis von Lemma 6.1.16 nicht, die Brücke so wie in Abbildung 6.13 zu verschieben?

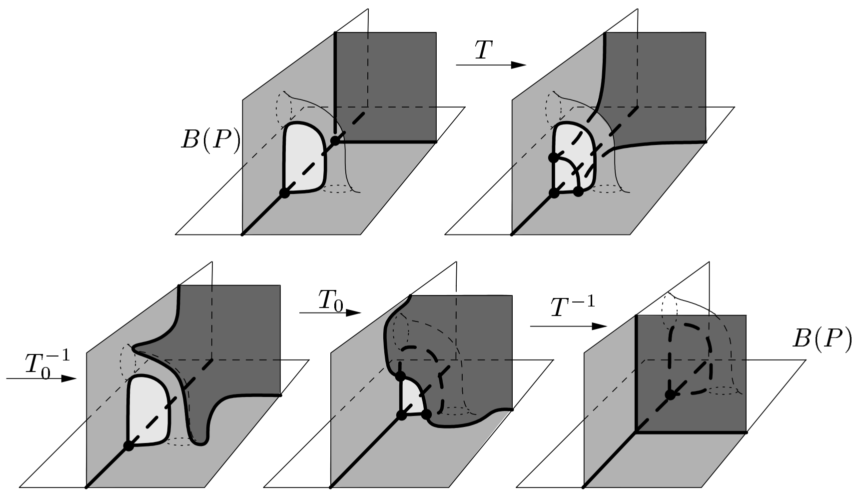


Abbildung 6.13: Verschieben einer Brücke

[4] Matveev ist in seinem Beweis über diesen technischen Punkt ohne Kommentar hinweg gegangen.

6.2 Existenz von speziellen Spines

Mit den Mitteln aus dem Beweis von Theorem 6.1.7 können wir relativ leicht einen Existenzbeweis für spezielle Spines skizzieren. Grundlage des Beweises ist der Satz von Moise [45], dass *jede* kompakte 3-Mannigfaltigkeit eine Triangulation besitzt, was wir hier nicht beweisen werden.

Es sei $\mathcal{T}$ eine Triangulation einer kompakten 3-Mannigfaltigkeit M mit nichtleerem Rand.[5] Durch zweifaches baryzentrisches Unterteilen können wir voraussetzen, dass ein Teilkomplex $K \subseteq M$ von $\mathcal{T}$ mit $M \setminus K \approx \partial M \times [0,1[$ existiert. Es sei $L(K,\mathcal{T}')$ wie in Definition 6.1.10. Offenbar besteht $M \setminus L(K,\mathcal{T}')$ aus einer zu $\partial M \times [0,1[$ homöomorphen Zusammenhangskomponente sowie einigen 3-Bällen, nämlich den offenen Sternen der Ecken von $\mathcal{T}$ in $\mathcal{T}'$. Wir wenden nun B-Prozesse an, wodurch jeweils verschiedene Zusammenhangskomponenten von $M \setminus L(K,\mathcal{T}')$ durch eine Brücke verbunden werden. Nach endlich vielen Schritten entsteht eine spezielle Pseudofläche, deren Komplement zu $\partial M \times [0,1[$ homöomorph ist, also ein spezieller Spine von M.

6.3 Turaev-Viro–Invarianten

Bereits im Unterabschnitt 3.4.2 lernten wir mit dem Jones-Polynom eine Invariante kennen, die Bezüge zur Quantentheorie besitzt (auch wenn wir dies nicht sehr deutlich herausstellten). Wir werden nun Invarianten von 3-Mannigfaltigkeiten beschreiben, für die ebenfalls solche Bezüge bestehen. In Versuchen zu einer Quantentheorie der Gravitation tauchten einige Größen auf, die sich als Invarianten von 3-Mannigfaltigkeiten auffassen lassen — wobei allerdings das Problem bestand, ob diese Größen überhaupt wohldefiniert sind. Im Rahmen der Theorie der Quantengruppen wurden dann in den frühen 1990er Jahren mehrere Klassen wohldefinierter Invarianten entwickelt, die den ursprünglichen quantentheoretischen Ideen entsprachen. Hier sind hauptsächlich die Klassen der Reshetikhin-Turaev- und der Turaev-Viro-Invarianten zu nennen. Diese sind auf den ersten Blick völlig verschieden definiert — Reshetikhin-Turaev-Invarianten durch Dehn-Eingriffe an Verkettungen (vgl. Unterabschnitt 5.3.2), Turaev-Viro-Invarianten durch Triangulationen [71] oder (wie hier) durch spezielle Spines. Es zeigte sich jedoch, dass die Turaev-Viro-Invarianten durch die Reshetikhin-Turaev-Invarianten vollständig bestimmt sind. Für eine umfassende Einführung in die Theorie, siehe [71].

Zwar ist der Aufwand zur Berechnung der Turaev-Viro-Invarianten exponentiell in der Anzahl der echten Ecken eines speziellen Spines, doch lohnt sich der Aufwand, denn die Berechnung vermeidet die bei der Bestimmung der Fundamentalgruppe auftretenden gruppentheoretischen Entscheidungsprobleme, und die Turaev-Viro-Invarianten enthalten Informationen, die im Falle von Nicht-Haken-Mannigfaltigkeiten über die Möglichkeiten der Fundamentalgruppe hinaus gehen. Bei der Auflistung aller kompakter 3-Mannigfaltigkeiten mit speziellen Spines von bis zu 11 Ecken durch Matveev waren die Turaev-Viro-Invarianten ein wichtiges Hilfsmittel. Es gibt noch andere Invarianten, die nicht schon durch die Fundamentalgruppe bestimmt sind, wie etwa die Reidemeister-Torsion, doch sind diese noch schwerer zu berechnen.

[5] Für geschlossene Mannigfaltigkeiten erzeugt man einen Rand durch Entfernen eines offenen 3-Balles.

6.3.1 Invarianzbedingung für Turaev-Viro-Invarianten

Die Turaev-Viro-Invarianten wurden 1992 in [70] von Vladimir Turaev und Oleg Viro zum ersten Mal konkret beschrieben. Die Idee ist, die Kanten einer triangulierten Dreimannigfaltigkeit zu färben, dem Sechstupel von Farben, die an einem Tetraeder auftreten, eine komplexe Zahl ($6j$-Symbol) zuzuordnen, für jede mögliche Färbung das Produkt zu bilden und über die Färbungen zu summieren („Zustandssumme“). Das Ergebnis ist einfach eine komplexe Zahl. Natürlich müssen die Werte der $6j$-Symbole geeignet gewählt werden, wenn das Ergebnis eine Homöomorphie-Invariante sein soll. Die Bedingungen werden in Satz 6.3.3 formuliert. Im folgenden Unterabschnitt werden wir grob skizzieren, wie man Lösungen dieser Bedingungen aus der Theorie der Quantengruppen systematisch gewinnt. In Unterabschnitt 6.3.3 werden wir eine von Matveev stammende Lösung vorstellen, die sehr einfach ist, allerdings nicht direkt aus der Theorie der Quantengruppen stammt.

Wenn man wie in [70] die Invariante bezüglich einer Triangulation formuliert, so muss man für die Invarianzbedingung drei lokale Transformationsprozesse berücksichtigen, die den Prozessen T_0, T und S entsprechen. Es ist einfacher, wenn man die Invariante stattdessen mit Hilfe spezieller Spines formuliert, denn hier bleibt nur der Prozess T zu berücksichtigen. Dies werden wir in Anlehnung an [42] hier tun.

Definition 6.3.1 *Es sei K ein kommutativer Ring mit Eins, I eine endliche Indexmenge, P eine spezielle Pseudofläche, $V(P)$ die Menge ihrer echten Ecken und $D(P)$ die Menge ihrer 2-Strata. Jedem Element $i \in I$ wird ein invertierbares Ringelement $|i| \in K^*$ (sein **Gewicht**) zugeordnet. Eine **Färbung** von P mit I ist eine Abbildung $\phi\colon\ D(P) \to I$. Einer Ecke V wird ein Element $\langle V^\phi \rangle = \left|\begin{smallmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{smallmatrix}\right| \in K$ zugeordnet, wobei i, j und k die ϕ-Farben dreier Flügel von V sind, welche eine Kante gemeinsam haben, und l, m bzw. n die ϕ-Farben der Flügel, die i, j bzw. k gegenüber liegen. Dann heißt $\left|\begin{smallmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{smallmatrix}\right|$ ein $6j$-**Symbol**. Damit es wohldefiniert ist, muß das $6j$-Symbol die Symmetrie der Ecke respektieren, es muß also gelten:*

$$\left|\begin{smallmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{smallmatrix}\right| = \left|\begin{smallmatrix} j & i & k \\ m & l & n \end{smallmatrix}\right| = \left|\begin{smallmatrix} i & k & j \\ l & n & m \end{smallmatrix}\right| = \left|\begin{smallmatrix} i & m & n \\ l & j & k \end{smallmatrix}\right| = \left|\begin{smallmatrix} l & m & k \\ i & j & n \end{smallmatrix}\right| = \left|\begin{smallmatrix} l & j & n \\ i & m & k \end{smallmatrix}\right|.$$

Definition 6.3.2 *Es sei M eine kompakte Dreimannigfaltigkeit und P ein spezieller Spine von M. Ein Ausdruck der Form*

$$|M| := \sum_{\phi} \prod_{D \in D(P)} |\phi(D)| \prod_{V \in V(P)} \langle V^\phi \rangle ,$$

*wobei über sämtliche Färbungen ϕ von P summiert wird, heißt **Invariante vom Turaev-Viro-Typ**, falls $|M|$ nicht von P abhängt.*

Da es nur endlich viele Farben und damit nur endlich viele Färbungen von P gibt, ist der Ausdruck $|M|$ definiert, sobald die Gewichte und die $6j$-Symbole definiert sind.

Satz 6.3.3 *$|M|$ ist eine Invariante vom Turaev-Viro-Typ, falls für die $6j$-Symbole und die Gewichte folgende Gleichung für alle $j_0, \ldots, j_9 \in I$ gilt:*

$$\sum_{j \in I} |j| \left|\begin{smallmatrix} j_1 & j_2 & j_5 \\ j_3 & j_6 & j \end{smallmatrix}\right| \left|\begin{smallmatrix} j_1 & j & j_6 \\ j_4 & j_0 & j_7 \end{smallmatrix}\right| \left|\begin{smallmatrix} j_2 & j_3 & j \\ j_4 & j_7 & j_8 \end{smallmatrix}\right| = \left|\begin{smallmatrix} j_5 & j_3 & j_6 \\ j_4 & j_0 & j_8 \end{smallmatrix}\right| \left|\begin{smallmatrix} j_1 & j_2 & j_5 \\ j_8 & j_0 & j_7 \end{smallmatrix}\right|$$

Die im Satz formulierte Gleichung ist aus der Quantenmechanik wohlbekannt. Dort beschreiben die $6j$-Symbole die Wechselwirkung von Teilchen mit Spin, vgl. [38], und die Gleichung heißt **Biedenharn-Elliott-Gleichung**.

Beweis [Satz 6.3.3] Es genügt, die Invarianz von $|M|$ bezüglich eines T-Prozesses zu prüfen. Mit den Bezeichnungen wie in Abbildung 6.14 ist sie aus der Biedenharn-Elliott-Gleichung direkt abzulesen. $\square$

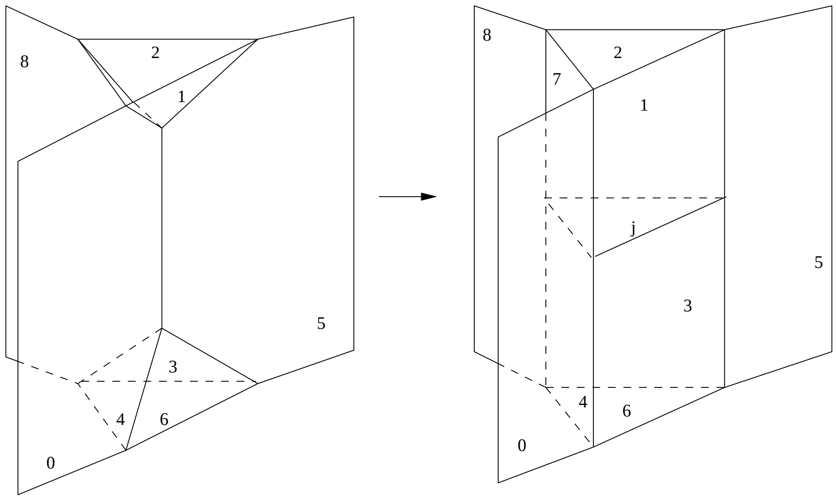


Abbildung 6.14: Invarianz von $|M|$

Schon für Färbungen mit nur zwei Farben führt Satz 6.3.3 auf ein System von 74 kubischer Gleichungen mit 13 Unbekannten, die für die Definition einer Invariante simultan erfüllt sein müssen. Es grenzt an ein Wunder, dass man vielfältige topologisch relevante Lösungen für jede Anzahl von Farben finden kann.

6.3.2 Quanteninvarianten

Wir werden in diesem Unterabschnitt grob skizzieren, was eine halbeinfache Algebra ist, was ihre $6j$-Symbole sind, und wie dadurch die Biedenharn-Elliott-Gleichung erfüllt werden kann.

Zu Beginn erinnern wir an einige Eigenschaften von Vektorräumen über einem Körper K. Jeder K-Vektorraum ist direkte Summe von eindimensionalen K-Vektorräumen. Es gibt bis auf Isomorphismen nur einen eindimensionalen K-Vektorraum, nämlich K selbst, und der Raum der linearen Selbstabbildungen eines eindimensionalen K-Vektorraums ist isomorph zu K. Wenn wir uns nun für die endlich erzeugten Moduln über einem kommutativen Ring K mit 1 (oder auch über einer Algebra) interessieren, ist die Lage im allgemeinen nicht so schön wie bei Vektorräumen. Für K-Moduln ist analog zu Vektorräumen ein Tensorprodukt $\otimes_K$ definiert. Wir nennen einen K-Modul V **einfach**, wenn der K-Modul $\mathrm{Hom}_K(V,V)$ der K-linearen Selbstabbildungen von V ein freier K-Modul vom Rang 1 ist. Es sei $\{V_i\}_{i\in I}$ für eine Indexmenge I die Menge der

Isomorphieklassen einfacher K-Moduln, wobei wir ein Element $0 \in I$ auszeichnen mit $V_0 \cong K$.

Wir setzen nun voraus, dass K **halbeinfach** ist, was insbesondere bedeutet, dass jeder K-Modul direkte Summe von einfachen K-Moduln ist, dass für verschiedene Elemente $i, j \in I$ gilt $\mathrm{Hom}_K(V_i, V_j) = 0$, und dass für alle K-Moduln V und W gilt

$$\bigoplus_{i \in I} (\mathrm{Hom}_K(V, V_i) \otimes_K \mathrm{Hom}_K(V_i, W)) \overset{*}{\cong} \mathrm{Hom}_K(V, W).$$

Dabei wird der letztgenannte Isomorphismus auf den einzelnen Summanden durch Komposition der Morphismen aus $\mathrm{Hom}_K(V, V_i)$ und $\mathrm{Hom}_K(V_i, W)$ erzeugt. Schöne Beispiele stammen aus der Theorie halbeinfacher Lie-Algebren.

Für $i, j, k \in I$ definiert man die **Multiplizitätsmoduln**

$$\begin{aligned} H_i^{jk} &:= \mathrm{Hom}_K(V_i, V_j \otimes_K V_k) \text{ und} \\ H_{ij}^k &:= \mathrm{Hom}_K(V_i \otimes_K V_j, V_k). \end{aligned}$$

Analog zum obigen Isomorphismus $*$ gilt

$$\bigoplus_{k \in I} \left(H_m^{kl} \otimes_K H_k^{ij} \right) \cong \mathrm{Hom}_K(V_m, (V_i \otimes_K V_j) \otimes_K V_l)$$

für alle $i, j, k, l, m, n \in I$, wobei der Isomorphismus durch Komposition gegeben ist. Ebenso gilt $\bigoplus_{n \in I} \left(H_m^{in} \otimes_K H_n^{jl} \right) \cong \mathrm{Hom}_K(V_m, V_i \otimes_K (V_j \otimes_K V_l))$. Da das Tensorprodukt bis auf Isomorphismus assoziativ ist, gilt zudem

$$\mathrm{Hom}(V_m, (V_i \otimes_K V_j) \otimes_K V_l) \cong \mathrm{Hom}(V_m, V_i \otimes_K (V_j \otimes_K V_l)).$$

Durch Verknüpfen der Einbettung direkter Summanden, der oben erwähnten Isomorphismen und der Projektion auf direkte Summanden erhalten wir ein durch 6-Tupel $i, j, k, l, m, n \in I$ parametrisiertes System K-linearer Abbildungen

$$\left| \begin{smallmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{smallmatrix} \right| : \; \left(H_m^{kl} \otimes_K H_k^{ij} \right) \to \left(H_m^{in} \otimes_K H_n^{jl} \right),$$

die $6j$-Symbole von K. Per definitionem gilt also mit kleinem Notationsmissbrauch

$$(y \otimes \mathrm{Id}_{V_l}) x = \sum_{n \in I} \left(\left(\mathrm{Id}_{V_i} \otimes (\cdot)_n^{jl} \right) (\cdot)_m^{in} \right) \left| \begin{smallmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{smallmatrix} \right| (x \otimes y)$$

für $x \in H_m^{kl}$ und $y \in H_k^{ij}$. Abbildung 6.15 zeigt eine graphische Darstellung dieser Gleichung, deren Sinn hoffentlich nach einiger Meditation klar wird.

In der Formulierung, die wir im vorigen Unterabschnitt für Invarianten vom Turaev-Viro-Typ vorstellten, waren die $6j$-Symbole (komplexe) Zahlen. Wenn die Multiplizitätsmoduln alle freie K-Moduln vom Rang eins sind, kann man auch die $6j$-Symbole von K als Elemente von K auffassen. Tatsächlich kann man den Begriff einer Invariante vom Turaev-Viro-Typ auch noch dann sinnvoll formulieren, wenn die Multiplizitätsmoduln komplizierter sind. Es stellt sich nun heraus, dass die $6j$-Symbole eine Verallgemeinerung der Biedenharn-Elliott-Gleichung auf Tensoren erfüllen.

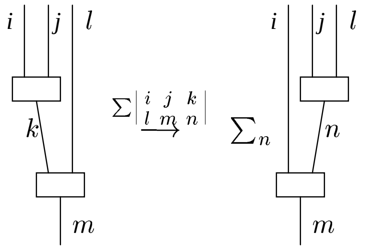


Abbildung 6.15: Grundeigenschaft der $6j$-Symbole

Satz 6.3.4 *Für die $6j$-Symbole gilt die verallgemeinerte Biedenharn-Elliott-Gleichung*

$$\sum_{j\in I}\left(\mathrm{Id}\otimes\begin{vmatrix} j_2 & j_3 & j \\ j_4 & j_7 & j_8\end{vmatrix}\right)\circ\left(\begin{vmatrix} j_1 & j & j_6 \\ j_4 & j_0 & j_7\end{vmatrix}\otimes\mathrm{Id}\right)\circ\left(\mathrm{Id}\otimes\begin{vmatrix} j_1 & j_2 & j_5 \\ j_3 & j_6 & j\end{vmatrix}\right)$$
$$=\left(\begin{vmatrix} j_1 & j_2 & j_5 \\ j_8 & j_0 & j_7\end{vmatrix}\otimes\mathrm{Id}\right)\circ T_{23}\circ\left(\begin{vmatrix} j_5 & j_3 & j_6 \\ j_4 & j_0 & j_8\end{vmatrix}\otimes\mathrm{Id}\right)$$

in dem K-Modul

$$\mathrm{Hom}_K(H^{j_6j_4}_{j_0}\otimes_K H^{j_5j_3}_{j_6}\otimes_K H^{j_1j_2}_{j_5}, H^{j_1j_7}_{j_0}\otimes_K H^{j_2j_8}_{j_7}\otimes_K H^{j_3j_4}_{j_8}).$$

Dabei ist T_{23} die Vertauschung des zweiten und dritten Faktors eines Tensorproduktes.

Beweis Die Beweisidee ist, mit Hilfe der $6j$-Symbole eine nach rechts geöffnete Gabel mit drei Zinken in eine nach links geöffnete zu überführen. Dies geht auf zwei verschiedene Arten, wie in den Bildern 6.16 und 6.17 zu sehen ist, wobei ich die Gleichung durch „$\sum_j Q_1Q_2Q_3 = Q_1'T_{23}Q_3'$“ abkürzen möchte ($Q_i$ bzw. Q_i' steht dabei für die verschiedenen auftretenden $6j$-Symbole). Dabei gibt es zunächst zu viele Summen. Da die zu j_7 und j_8 gehörenden Terme jeweils in verschiedenen *direkten* Summanden des K-Moduls $H^{j_1j_2j_3j_4}_{j_0}$ liegen, gilt die Gleichung schon für jeden einzelnen der Summanden, und dies ergibt die Biedenharn-Elliott-Gleichung. □

Man könnte nun versuchen, aus den $6j$-Symbolen von K eine Invariante vom Turaev-Viro-Typ zu gewinnen. Die Farbenmenge wäre dabei I. Das Gewicht $|i|$ der Farbe i entspräche einer geeignet definierten Dimension des Moduls V_i. Um tatsächlich eine Invariante zu erhalten, müssten die $6j$-Symbole zusätzlich noch die Tetraeder-Symmetrie besitzen. Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall, und es ist ein großer technischer Aufwand, symmetrische $6j$-Symbole zu konstruieren; durch das Symmetrisieren entsteht der Faktor $|j|$ in der gewöhnlichen Biedenharn-Elliott-Gleichung. Zudem benötigen wir eine *endliche* Menge von Farben. Das war das größte Problem in der Konstruktion von Invarianten. Die schon lange bekannten $6j$-Symbole halbeinfacher Lie-Algebren halfen nämlich nicht weiter, weil hier unendlich viele Isomorphieklassen einfacher Moduln auftreten. Die Lösung gelang schließlich mit der Theorie der Quantengruppen. Die ersten Beispiele gewann man aus so genannten Quantendeformationen der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ an Einheitswurzeln, auf denen letztlich auch das Jones-Polynom

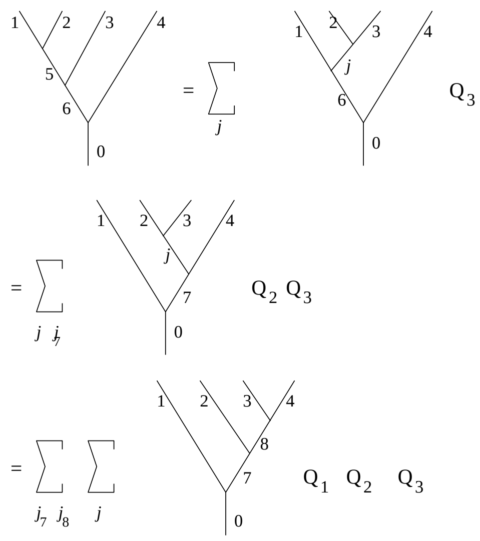


Abbildung 6.16: Linke Seite der Biedenharn-Elliott-Gleichung

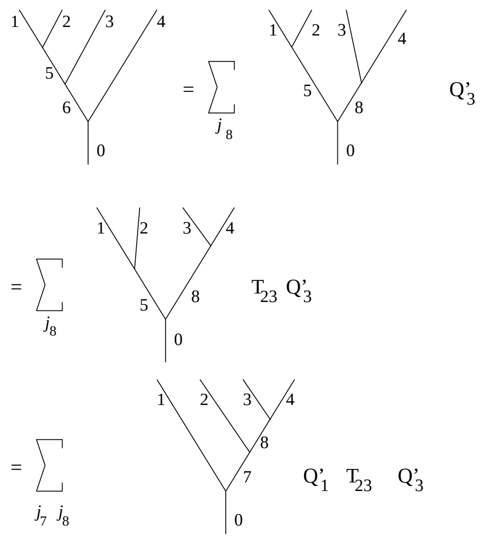


Abbildung 6.17: Rechte Seite der Biedenharn-Elliott-Gleichung

basiert. Die mit Hilfe von Quantengruppen gewonnenen Invarianten nennen wir **Turaev-Viro-Invarianten**. Für weitere Informationen seien die Bücher [26] oder [71] empfohlen.

6.3.3 Matveevs t-Invariante

Wir werden zum Abschluss noch Matveevs t-Invariante vorstellen. Sie ist sehr einfach zu konstruieren, und es zeigt sich, dass sie vom Turaev-Viro-Typ ist. Allerdings kommt sie nicht direkt von einer Quantengruppe, ist also keine Turaev-Viro-Invariante. Wir wählen eine Lösung von $\epsilon^2 = \epsilon + 1$, also $\epsilon := \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$.

Es sei P im Folgenden stets ein spezieller Spine einer kompakten Dreimannigfaltigkeit M mit mindestens zwei echten Ecken. Es sei $\mathcal{F}(P) := \{Q \subseteq P | \ Q$ *ist Pseudofläche*$\}$ (nicht notwendig *spezielle* Pseudofläche). Weil Pseudoflächen keinen Rand besitzen, gehört für $Q \in \mathcal{F}(P)$ jedes 2-Stratum entweder *ganz* zu Q oder es ist zu Q disjunkt. Aus demselben Grund sind für jede echte Kante von P entweder kein oder mindestens zwei Flügel in Q enthalten.

Übung 6.3.5 Bestimme $\mathcal{F}(P)$, wenn P Bings Haus, das Seeohr oder eine der in Abbildung 6.5 gegebenen speziellen Pseudoflächen ist.

Definition 6.3.6 *Es sei $Q \in \mathcal{F}(P)$, $\nu(Q)$ die Anzahl der echten Ecken und $\chi(Q)$ die Euler-Charakteristik von Q. Das* ***Gewicht*** *von Q ist*

$$\omega(Q) := (-1)^{\nu(Q)} \epsilon^{\chi(Q)-\nu(Q)}.$$

Matveevs t-Invariante ist

$$t(P) := \sum_{Q \in \mathcal{F}(P)} \omega(Q),$$

$t(P)$ ist also ein Element von $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Satz 6.3.7 *$t(P)$ ist eine Invariante von M.*

Beweis Es genügt, die Wirkung eines T-Prozess von P nach P' wie in Abbildung 6.18 bzw. seines Inversen zu betrachten. Eine Pseudofläche $Q \in \mathcal{F}(P)$ heiße reich, wenn Q alle Flügel $F_1, \dots, F_6$ enthält, und sonst arm. Wir erhalten zwei Hauptfälle:

Wenn Q arm ist, so gibt es genau ein $Q' \in \mathcal{F}(P')$, das außerhalb des Bildes mit Q übereinstimmt. Q und Q' sind zueinander isotop, also ist $\omega(Q) = \omega(Q')$.

Wenn Q reich ist, dann kann Q nicht genau eines der G_i enthalten, denn sonst entstünde ein Rand. Stets gibt es zu Q zwei Pseudoflächen $Q_1, Q_2 \in \mathcal{F}(P')$, die außerhalb des Bildes mit Q übereinstimmen, wobei Q_2 D enthalten und Q_1 D nicht enthalten soll. Es sei χ, χ_1, χ_2 die Euler-Charakteristik und ν, ν_1, ν_2 die Anzahl der echten Ecken von Q, Q_1, Q_2. Wir erhalten drei Unterfälle

1. Wenn Q keines der G_i enthält, so ist $\chi_1 = \chi - 2$, $\chi_2 = \chi - 1$, und $\nu_i = \nu$. Damit ist $\omega(Q_1) = \epsilon^{-2}\omega(Q)$ und $\omega(Q_2) = \epsilon^{-1}\omega(Q)$. Der Beitrag von Q zur Summe $t(P)$ gleicht den Beiträgen von Q_1 und Q_2 zu $t(P')$ wegen $1 = \epsilon^{-2} + \epsilon^{-1}$.

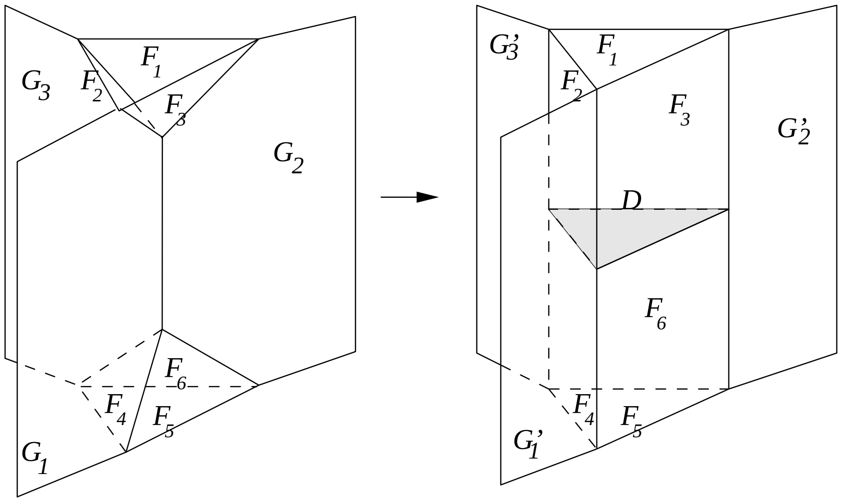


Abbildung 6.18: Invarianz der t-Invariante

2. Wenn Q genau zwei der G_i enthält, so ist $\chi_1 = \chi - 1$, $\chi_2 = \chi$, $\nu_1 = \nu$ und $\nu_2 = \nu + 2$. Damit ist $\omega(Q_1) = \epsilon^{-1}\omega(Q)$ und $\omega(Q_2) = \epsilon^{-2}\omega(Q)$. Der Beitrag von Q zur Summe $t(P)$ gleicht den Beiträgen von Q_1 und Q_2 wegen $1 = \epsilon^{-1} + \epsilon^{-2}$.

3. Wenn Q alle G_i enthält, so ist $\chi_1 = \chi - 1$, $\chi_2 = \chi$, $\nu_1 = \nu - 2$ und $\nu_2 = \nu + 1$. Damit ist $\omega(Q_1) = \epsilon\,\omega(Q)$ und $\omega(Q_2) = -\epsilon^{-1}\omega(Q)$. Der Beitrag von Q zur Summe $t(P)$ gleicht den Beiträgen von Q_1 und Q_2 wegen $\epsilon^{-1} = 1 - \epsilon^{-2}$.

Es gibt kein reiches $Q \in \mathcal{F}(P)$, das genau eines der G_i enthält; es gibt jedoch Paare Q_1, Q_2 von reichen Pseudoflächen aus $\mathcal{F}(P')$, welche genau eines der G'_i enthalten, eine davon mit D, eine ohne. Es ist dann $\chi_2 = \chi_1 + 1$ und $\nu_2 = \nu_1 + 1$. Damit ist $\omega(Q_1) = -\omega(Q_2)$, also heben sich die Beiträge zu $t(P')$ auf. □

Übung 6.3.8 Berechne $t(\cdot)$, ausgedrückt als Polynom in ϵ, von S^3, $L(5,1)$ und $L(5,2)$. Spezielle Spines für $L(5,1)$ und $L(5,2)$ sind in Abbildung 6.5 gegeben.

Bemerkung 6.3.9 Wie in der vorigen Übung gezeigt wurde, kann die t-Invariante die Räume S^3, $L(5,1)$ und $L(5,2)$ voneinander unterscheiden. Dabei ist die Unterscheidung von $L(5,1)$ und $L(5,2)$ besonders hervorzuheben, denn diese Linsenräume haben isomorphe Fundamentalgruppen. Zwar kann die t-Invariante Linsenräume nicht klassifizieren, aber dafür ist der hier gezeigte Beweis von $L(5,1) \not\approx L(5,2)$ erheblich einfacher als die Berechnung der Reidemeister-Franz-Torsion; vgl. Theorem 5.3.20.

Wir werden nun noch zeigen, dass $t(P)$ eine Invariante vom Turaev-Viro-Typ ist. Die 2-Strata von P werden mit zwei Farben 0 und 1 gefärbt. Eine solche Färbung ϕ heißt zulässig, wenn an jeder Kante entweder kein Flügel oder mindestens zwei Flügel die Farbe 1 tragen. Wie oben erläutert, entsprechen zulässige Färbungen den Pseudoflächen $Q \in \mathcal{F}(P)$, mit der Konvention, dass ein 2-Stratum genau dann die Farbe 1 trägt, wenn es in Q enthalten ist. Für ein 2-Stratum D von P sei das Gewicht definiert durch $g_\phi(D) := \epsilon$, falls D die Farbe 1 trägt (also zu Q gehört), und durch $g_\phi(D) := 1$, falls nicht. Für jede echte Ecke V von P sei $\mu_\phi(V)$ die Anzahl der Kanten in dem Graph $Q \cap SP$, die an V anstoßen. Dann gilt:

$$\epsilon^{\chi(Q)} = \prod_D g_\phi(D) \prod_{V;\mu_\phi(V)>0} \epsilon\sqrt{\epsilon}^{-\mu_\phi(V)}.$$

μ_ϕ zählt die Anzahl der Kantenenden, also zweimal die Anzahl derjenigen Kanten von P, die auch in Q noch Kante sind. Dieser Faktor 2 im Exponenten wird durch $\sqrt{\epsilon}$ ausgeglichen. Wir definieren nun $\langle V \rangle_\phi := \epsilon\sqrt{\epsilon}^{-\mu_\phi(V)}$, falls $\mu_\phi(V) > 0$ und V keine Ecke in Q ist, $\langle V \rangle_\phi := -\sqrt{\epsilon}^{-\mu_\phi(V)} = -\epsilon^{-2}$, falls V eine Ecke von Q ist, und 1 sonst. Für nicht-zulässige Färbungen gibt es Kanten, bei denen genau ein Flügel die Farbe 1 trägt. Für eine echte Ecke V, die an eine solche Kante grenzt, setzen wir $\langle V \rangle_\phi := 0$. Somit gilt

$$t(P) = \sum_\phi \prod_D g_\phi(D) \prod_V \langle V \rangle_\phi .$$

Also ist t vom Turaev-Viro-Typ.

Anhang A

Das Tensorprodukt

Tensorrechnung ist ein Weg, multilineare Abbildungen auf lineare Abbildungen zurückzuführen. Im Prinzip ließe sich also die Lineare Algebra als Bestandteil der Tensorrechnung auffassen. Wenn man Riemannsche Geometrie oder Physik betreibt, wird man häufig auf Tensoren stoßen: Die Geometrie riemannscher Mannigfaltigkeiten wird durch Tensoren beschrieben, und die Quantenmechanik lässt sich nach Heisenberg mit Hilfe von Tensoren formulieren. Wir nutzen die Tensorrechnung nur auf sehr niedrigem Niveau, nämlich als kompakte Schreibweise für lineare Abbildungen.

A.1 Tensorprodukte von Vektorräumen

Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K mit Basis $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_m$. Jeder Vektor in V lässt sich also als Linearkombination $\sum_{i=1}^m x^i \mathfrak{v}_i$ schreiben, mit $x^i \in K$ für $i = 1, \ldots, m$. Dabei ist i kein Exponent von x^i, sondern ist ein oberer Index; die Unterscheidung von oberen Indizes (bei x^i) und unteren Indizes (bei $\mathfrak{v}_i$) wird sich im Folgenden als sehr nützlich erweisen.

Eine **Linearform** ist eine Abbildung $\phi\colon\ V \to K$, so dass $\phi(x\mathfrak{v}) = x\phi(\mathfrak{v})$ und $\phi(\mathfrak{v} + \mathfrak{w}) = \phi(\mathfrak{v}) + \phi(\mathfrak{w})$ gilt für alle $x \in K$ und $\mathfrak{v}, \mathfrak{w} \in V$. Natürlich ist ϕ wie jede lineare Abbildung durch die Bilder der Basisvektoren bestimmt, also durch n Werte $\phi_i := \phi(\mathfrak{v}_i) \in K$ (mit $i = 1, \ldots, n$). Dann gilt $\phi(\sum x^i \mathfrak{v}_i) = \sum \phi_i x^i$. Die Linearformen bilden in natürlicher Weise einen n-dimensionalen K-Vektorraum, den **Dualraum** von V, den wir mit V^* bezeichnen.

Einige spezielle Beispiele von Linearformen sind solche, die einen Basisvektor auf $1 \in K$ abbilden und alle anderen Basisvektoren auf $0 \in K$ abbilden. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{v}^i \in V^*$ die Linearform, welche durch $\mathfrak{v}^i(\mathfrak{v}_i) = 1$ und $\mathfrak{v}^i(\mathfrak{v}_j) = 0$ (für $j \neq i$) definiert ist. Eine Linearform $\phi \in V^*$ lässt sich nach Definition von ϕ_i schreiben als $\sum_{i=1}^m \phi_i \mathfrak{v}^i$. Weil die Summe endlich ist, ist $\mathfrak{v}^1, \ldots, \mathfrak{v}^m$ also eine Basis von V^*; sie heißt die zu $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_m$ **duale Basis**.

In den vorigen Abschnitten traten mehrfach Summen über Produkte auf, wobei der Summationsindex jeweils in einem Faktor ein *oberer*, im anderen ein *unterer* Index war. Wir vereinfachen die Notation durch folgende **Summenkonvention**: Wenn in einem Produkt ein Index genau einmal als oberer und als unterer Index auftritt, so wird über ihn summiert.

Beispiel A.1.1 $\phi_i \mathfrak{v}^i$ bedeutet $\sum_i \phi_i \mathfrak{v}^i$.
$a^j_{i,j}$ bedeutet $\sum_j a^j_{i,j}$. Bei $a^i_{j,j}$ hingegen würde nicht summiert werden, weil j zweimal als unterer Index auftritt, jedoch nicht als oberer. In $\phi^{i,m}_k x_i x^k$ würde sowohl über i als auch über k summiert, aber nicht über m.

Nun seien V, W zwei endlichdimensionale Vektorräume über K. Eine **Bilinearform** ist eine Abbildung $\phi\colon\ V \times W \to K$, so dass $\phi(x\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = \phi(\mathfrak{v}, x\mathfrak{w}) = x\phi(\mathfrak{v}, \mathfrak{w})$, $\phi(\mathfrak{v} + \tilde{\mathfrak{v}}, \mathfrak{w}) = \phi(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) + \phi(\tilde{\mathfrak{v}}, \mathfrak{w})$ und $\phi(\mathfrak{v}, \mathfrak{w} + \tilde{\mathfrak{w}}) = \phi(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) + \phi(\mathfrak{v}, \tilde{\mathfrak{w}})$, für alle $x \in K$, $\mathfrak{v}, \tilde{\mathfrak{v}} \in V$ und $\mathfrak{w}, \tilde{\mathfrak{w}} \in W$. Das Produkt $V \times W$ betrachten wir hier *nicht* als einen K-Vektorraum — ob und wie man eine Vektrorraumstruktur auf $V \times W$ definiert, hängt vom Kontext ob. Es sei $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_m$ eine Basis von V und $\mathfrak{w}_1, \ldots, \mathfrak{w}_n$ eine Basis von W. Bekanntlich ist eine Bilinearform ϕ auf $V \times W$ durch die Bilder von Paaren von Basisvektoren bestimmt, also durch $m \cdot n$ Werte $\phi_{i,j} := \phi(\mathfrak{v}_i, \mathfrak{w}_j)) \in K$.

Wir wollen nun einen K-Vektorraum $V \otimes W$ konstruieren, so dass der Raum der *Linearformen* auf $V \otimes W$ in isomorph ist zum Raum der *Bilinearformen* auf $V \times W$.[1] Wir definieren $V \otimes W$ dadurch, dass die Paare $(\mathfrak{v}_i, \mathfrak{w}_j)$ (mit $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$) als K-Basis von $V \otimes W$ sein sollen. Anders gesagt besteht $V \otimes W$ aus formalen Linearkombinationen von Paaren $(\mathfrak{v}_i, \mathfrak{w}_j)$, die wir der besseren Unterscheidung wegen mit $\mathfrak{v}_i \otimes \mathfrak{w}_j$ notieren. Der Unterschied zu $V \times W$ ist, dass in $V \times W$ die Elemente $(x\mathfrak{v}_i, \mathfrak{w}_j)$ und $(\mathfrak{v}_i, x\mathfrak{w}_j)$ verschieden sind, während es in $V \otimes W$ nur *ein* Element $x(\mathfrak{v}_i \otimes \mathfrak{w}_j)$ gäbe. Nach Konstruktion ist $\dim_K(V \otimes W) = (\dim_K V) \cdot (\dim_K W)$. Eine Linearform $\phi\colon\ V \otimes W \to K$ ist durch die Bilder der Basisvektoren bestimmt, also durch $\phi_{i,j} := \phi(\mathfrak{v}_i \otimes \mathfrak{w}_j)$ (mit $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$). Durch die $m \cdot n$ Werte $\phi_{i,j}$ wird aber wie im vorhergehenden Absatz ebenso eine *Bi*linearform auf $V \times W$ definiert. Bilinearformen auf $V \times W$ sind also im Wesentlichen dasselbe wie Linearformen auf $V \otimes W$.

Beispiel A.1.2 Der Raum der $\mathbb{R}$-Bilinearformen auf $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$ ist isomorph zu $(\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R})^*$. Wenn x, y eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist und z eine Basis von $\mathbb{R}$, dann ist $x \otimes z, y \otimes z$ eine Basis von $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}$. Daher ist der Raum der $\mathbb{R}$-Bilinearformen auf $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$ isomorph zu $(\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R})^* \cong (\mathbb{R}^2)^* \cong \mathbb{R}^2$, während der Raum $(\mathbb{R}^3)^*$ der Linearformen auf $\mathbb{R}^3$ zu $\mathbb{R}^3$ isomorph ist.

Wir zeigen nun $V^* \otimes W^* \cong (V \otimes W)^*$. Per definitionem ist $\{\mathfrak{v}^i \otimes \mathfrak{w}^j\}$ (mit $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$) eine Basis von $V^* \otimes W^*$. Wir können $\mathfrak{v}^i \otimes \mathfrak{w}^j$ als Element von $(V \otimes W)^*$ auffassen, also als Linearform auf $V \otimes W$, indem wir $\mathfrak{v}^i \otimes \mathfrak{w}^j(\mathfrak{v}_k \otimes \mathfrak{w}_l) := \mathfrak{v}^i(\mathfrak{v}_k)\mathfrak{w}^j(\mathfrak{w}_l) \in K$ definieren. Man prüft leicht nach, dass dadurch $\{\mathfrak{v}^i \otimes \mathfrak{w}^j\}$ mit der zu $\{\mathfrak{v}_i \otimes \mathfrak{w}_j\}$ dualen Basis von $(V \otimes W)^*$ identifiziert wird. Jede Linearform auf $V \otimes W$ lässt sich also in der Form $\phi_{i,j}\mathfrak{v}^i \otimes \mathfrak{w}^j$ (das ist nach der Summenkonvention $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \phi_{i,j}\mathfrak{v}^i \otimes \mathfrak{w}^j$) schreiben.

In ähnlicher Weise lassen sich auch Lineare Abbildungen $\phi\colon\ V \to W$ beschreiben. Auch hier ist ϕ durch die Bilder der Basisvektoren bestimmt, und wir definieren $\phi^j_i \in K$ durch $\phi(\mathfrak{v}_i) =: \phi^j_i \mathfrak{w}_j$ (Summenkonvention!). Für einen Vektor $\mathfrak{x} =: x^i \mathfrak{v}_i \in V$ gilt also $\phi(\mathfrak{x}) = x^i \phi^j_i \mathfrak{w}_j$ (Doppelsumme!). Wie in den Grundvorlesungen kann man ϕ durch eine Matrix bzgl. der Basen von V und W beschreiben — in der j-ten Zeile und i-ten Spalte steht der Koeffizient ϕ^j_i,

[1] Man kann zeigen, dass dadurch $V \otimes W$ bis auf Isomorphismen eindeutige bestimmt ist. Man nennt dies die *universelle Eigenschaft* des Tensorproduktes.

wie man leicht überprüft. Wir können $\mathfrak{v}^i \otimes \mathfrak{w}_j$ als lineare Abbildung von V nach W ansehen, wenn wir

$$\mathfrak{v}^i \otimes \mathfrak{w}_j(\mathfrak{v}_k) := \begin{cases} \mathfrak{w}_j & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$

definieren. Damit ist $\phi = \phi_i^j \mathfrak{v}^i \otimes \mathfrak{w}_j$, und der Raum $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(V, W)$ der linearen Abbildungen von V nach W erweist sich als isomorph zu $V^* \otimes W$.

Wenn weiterhin U ein K-Vektorraum mit Basis $\mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_l$ ist, dann ist $(U \otimes V) \otimes W$ isomorph zu $U \otimes (V \otimes W)$, indem wir $(\mathfrak{u}_l \otimes \mathfrak{v}_m) \otimes \mathfrak{w}_n$ mit $\mathfrak{u}_l \otimes (\mathfrak{v}_m \otimes \mathfrak{w}_n)$ identifizieren. Das Tensorprodukt von Vektorräumen ist also bis auf Isomorphismen assoziativ. Wir schreiben $V^{\otimes k}$ für das k-fache Tensorprodukt $\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k \text{ mal}}$.

A.2 Tensorprodukt von linearen Abbildungen

Es seien $V_1, \ldots, V_k, W_1, \ldots, W_k$ endlichdimensionale K-Vektorräume mit Basen $(\mathfrak{v}_i)_1, \ldots, (\mathfrak{v}_i)_{m_i}$ bzw. $(\mathfrak{w}_j)_1, \ldots, (\mathfrak{w}_j)_{n_j}$, für $i, j = 1, \ldots, k$. Damit bilden alle Produkte der Form $(\mathfrak{v}_1)_{p_1} \otimes \cdots \otimes (\mathfrak{v}_k)_{p_k}$ eine Basis von $V := V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$, und analog für $W := W_1 \otimes \cdots \otimes W_k$ Ferner sei $\phi\colon\ V \to W$ eine lineare Abbildungen. Bezüglich der Basen von V und W lässt sich ϕ durch Werte $\phi_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$ beschreiben, wobei analog zum vorigen Abschnitt gilt

$$\phi = \phi_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} (\mathfrak{v}_1)^{i_1} \otimes \cdots \otimes (\mathfrak{v}_k)^{i_k} \otimes (\mathfrak{w}_1)_{j_1} \otimes \cdots \otimes (\mathfrak{w}_k)_{j_k}.$$

Natürlich hängt $\phi_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$ von den gewählten Basen ab, doch das soll hier nicht unser Problem sein.

Wenn $\phi_i\colon\ V_i \to W_i$ für $i = 1, \ldots, k$ lineare Abbildungen sind, so definieren wir die lineare Abbildung $\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_k\colon\ V \to W$ durch $(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_k)_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} := (\phi_1)_{i_1}^{j_1} \cdots (\phi_k)_{i_k}^{j_k} \in K$.

Wenn $U_1, \ldots, U_k$ endlichdimensionale K-Vektorräume sind und $\psi_p\colon\ U_p \to V_p$ (für $p = 1, \ldots, k$) weitere lineare Abbildungen, so können wir auch die Hintereinanderausführung von ψ_p und ϕ_p im Tensorenkalkül beschreiben: Es sei ψ_p durch $(\psi_p)_h^i$ bezüglich einer Basis von U_p beschrieben; dann ist $\phi_p \circ \psi_p$ beschrieben durch $(\phi_p \circ \psi_p)_h^j = (\phi_p)_i^j (\psi_p)_h^i$ (mit Summenkonvention). Der Beweis dieser Aussage ist genauso wie in Linearer Algebra I, denn $(\phi_p)_i^j (\psi_p)_h^i$ ist im Grunde nur die Multiplikation der „Matrizen“ $(\phi_p)_i^j$ und $(\psi_p)_h^i$.

Übung A.2.1
Man beweise $(\phi_1 \circ \psi_1) \otimes \cdots \otimes (\phi_k \circ \psi_k) = (\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_k) \circ (\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_k)$.

Besonders praktisch ist das Tensorprodukt, wenn man aus „einfachen“ Abbildungen komplizierte aufbauen möchte. Das ist analog zu Gruppenpräsentationen: Jedes Gruppenelement lässt sich als Produkt von Erzeugenden schreiben, und diese Erzeugenden haben oft (wie die Erzeugenden σ_i der Zopfgruppen) eine sehr einfache Struktur. Es seien $\phi_1, \ldots, \phi_k\colon\ V \to V$ Endomorphismen. Für jeden Vektorraum W bezeichnet Id_W die *identische Abbildung*, also $Id_W(\mathfrak{w}) = \mathfrak{w}$ für alle $\mathfrak{w} \in W$. Es ist also $\phi_i \circ Id_V = Id_V \circ \phi_i = \phi_i$. Daher gilt nach der obigen Übung

$$\phi_1 \otimes \phi_2 \otimes \cdots \otimes \phi_k = (\phi_1 \otimes Id_{V^{\otimes k-1}}) \circ (Id_{V^{\otimes 1}} \otimes \phi_2 \otimes Id_{V^{\otimes k-2}}) \circ \cdots \circ (Id_{V^{\otimes k-1}} \otimes \phi_k),$$

wobei die Reihenfolge der geklammerten Terme auf der rechten Seite beliebig ist.

Zum Schluss definieren wir noch die **Spur** eines Endomorphismus $\phi\colon V \to V$, wobei V ein K-Vektorraum sei. Wenn ϕ bezüglich einer Basis $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_m$ von V durch ϕ_i^j beschrieben wird, so ist die Spur von ϕ definiert als $tr(\phi) := \phi_i^i$, also als die Summe der Koeffizienten von $\phi \in V^* \otimes V$ entlang der „Diagonale“ $\mathfrak{v}^i \otimes \mathfrak{v}_i$. Diese Definition stimmt offenbar mit der Definition der Spur einer Matrix überein. Mit Hilfe der (von uns übersprungenen) Transformationsformeln für ϕ_i^j unter Basiswechseln kann man zeigen, dass $tr(\phi)$ nicht von der gewählten Basis abhängt. Wenn $\psi\colon V \to V$ ein weiterer Endomorphismus ist, so ist $tr(\phi \circ \psi) = tr(\psi \circ \phi)$ wegen des Kommutativgesetzes in K: es gilt

$$tr(\phi \circ \psi) = \phi_i^j \psi_j^i = \psi_j^i \phi_i^j = tr(\psi \circ \phi).$$

Literaturverzeichnis

[1] Ian Agol, Joel Hass, William P. Thurston: The Computational Complexity of Knot Genus and Spanning Area. Preprint (2002), `arxiv:math.GT/0205057`.

[2] James W. Alexander: An Example of a Simply Connected Surface Bounding a Region which is not Simply Connected. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **10,** (1924) pp. 8-10.

[3] James W. Alexander: Note on two three-dimensional manifolds with the same group. *Trans. AMS* **20,** 339–342 (1919).

[4] David Bachman: A note on Kneser-Haken finiteness. Preprint 2002, `arxiv:math.GT/0210215`.

[5] Riccardo Benedetti, Carlo Petronio: *Lectures on Hyperbolic Geometry.* Springer-Verlag 1992.

[6] Stephen Bigelow: Braid groups are linear. *J. Amer. Math. Soc.* **14,** 471–486 (2001).

[7] Morton Brown: A proof of the generalized Schoenflies theorem. *Bull. Amer. Math. Soc.,* 66, (1960) 74-76.

[8] Heinz Bruggesser und Peter Mani: Shellable decompositions of cells and spheres. *Math. Scand* **29,** 197–205 (1971).

[9] Bernd Brügmann, Rodolfo Gambini, Jorge Pullin: How the Jones polynomial gives rise to physical states of quantum general relativity. *Gen. Relativity Gravitation* **25,** 1–6 (1993).

[10] Gerhard Burde, Heiner Zieschang: *Knots.* Zweite Auflage. de Gruyter Studies in Mathematics, 5. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2003.

[11] Gerhard Burde, Heiner Zieschang: Eine Kennzeichnung der Torusknoten. *Math. Ann.* **167,** 169–176 (1966).

[12] Burtis G. Casler: An impedding theorem for connected 3-manifolds with boundary. *Proceedings of the AMS* **16,** 559–566 (1965).

[13] Patrick Dehornoy: From large cardinals to braids via distributive algebra. *J. Knot Theory Ramifications* **4,** 33–79 (1995).

[14] Claus Ernst, De Witt Sumners: Solving tangle equations arising in a DNA recombination model. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **126,** 23–36 (1999).

[15] Leonhard Euler: 1. Elementa doctrinae solidorum. 2. Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris inclusa sunt praedita. *Novi Comment. Acad. scient. imper. Petropolitanae* **4,** 109–160 (1758). In *Leonhardi Euleri opera omnia,* series prima, volumen XXVI (Lausanne 1953).

[16] Roger Fenn, M. T. Greene, M. T., Dale Rolfsen, Colin Rourke, Bert Wiest: Ordering the braid groups. *Pacific J. Math.* **191,** 49–74 (1999).

[17] Freedman, M. H.: The topology of four-dimensional manifolds. *J. Differential Geom.* **17,** 357–453 (1982).

[18] Cameron McA. Gordon, John Luecke: Knots are determined by their complements. *J. Amer. Math. Soc.* **2,** 371–415 (1989).

[19] Joel Hass, Jack Snoeyink, William P. Thurston: The size of spanning disks for polygonal curves. *Discrete Comput. Geom.* **29,** 1–17 (2003).

[20] Joel Hass, Jeffrey C. Lagarias: The number of Reidemeister moves needed for unknotting. *J. Amer. Math. Soc.* **14,** 399–428 (2001).

[21] Allen Hatcher: *Notes on Basic* 3*-Manifold Topology.* Buchprojekt, online erhältlich auf `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/`

[22] Cynthia Hog-Angeloni, Wolfgang Metzler, Allan J. Sieradski: *Two-dimensional Homotopy and Combinatorial Group Theory.* London Math. Soc. Lecture Note Series 197. Cambridge University Press, 1993.

[23] Witold Hurewicz, Henry Wallman: *Dimension Theory.* Princeton Mathematical Series, v. 4. Princeton University Press 1941.

[24] Gil Kalai: Many triangulated spheres. *Discrete Comput. Geom.* **3,** 1–14 (1988).

[25] Michael Kapovich: *Hyperbolic manifolds and discrete groups.* Progress in Mathematics, 183. Birkhäuser 2001.

[26] Christian Kassel: *Quantum Groups.* Graduate Texts in Mathematics, 155. Springer-Verlag, 1995.

[27] Louis H. Kauffman: Statistical mechanics and the Jones polynomial. In *Braids (Santa Cruz, CA, 1986)*, 263–297, Contemp. Math. **78,** Amer. Math. Soc., 1988.

[28] Louis H. Kauffman: *Knots and physics.* Series on Knots and Everything, 1. World Scientific Publishing Co., 2001.

[29] Simon King: The size of triangulations supporting a given link. *Geometry & Topology* **5,** 369–398 (2001).

[30] Simon King: *Polytopality of Triangulations.* Dissertation, Université Louis Pasteur de Strasbourg 2001.

[31] Simon King: Crossing number of links formed by edges of a triangulation. *J. Knot Th. Ramif.* **12,** 281–286 (2003).

[32] Simon King: Complexity of triangulations of the projective space. *Top. Appl.* **132,** 261–270 (2003).

[33] Simon King: How to make a triangulation of S^3 polytopal. *Trans. AMS* **356,** 4519–4542 (2004).

[34] Hellmuth Kneser: Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten. *Jahresber. Deut. Math. Ver.* **38,** 248–260 (1929).

[35] Daan Krammer: Braid groups are linear. *Ann. of Math. (2)* **155,** 131–156 (2002).

[36] Robion Kirby: A calculus for framed links in S^3. *Invent. Math.* **45,** 35–56 (1978).

[37] Sofia Lambropoulou, Colin P. Rourke: Markov's theorem in 3-manifolds. Special issue on braid groups and related topics (Jerusalem, 1995). *Topology Appl.* **78,** 95–122 (1997).

[38] Lev D. Landau, L. D., Evgenij M. Lifschitz: *Lehrbuch der theoretischen Physik („Landau-Lifschitz").* Band III. Quantenmechanik. Aus dem Russischen übersetzt von A. Kühnel. Achte Auflage. Akademie-Verlag, Berlin,1988.

[39] W.B. Raymond Lickorish: A representation of orientable combinatorial 3-manifolds. *Ann. of Math. (2)* **76,** 531–540 (1962).

[40] Sergei V. Matveev: Transformations of special spines and the Zeeman conjecture. *Math. USSR-Izvestiya* **31,** 423–434 (1988).

[41] Sergei V. Matveev, Maxim V. Sokolov: On a simple invariant of Turaev-Viro type. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov.* **234,** 137–142 (1996).
Übersetzung in *J. Math. Sci.* **94,** 1226–1229 (1999).

[42] Sergei V. Matveev: *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds.* Algorithms and Computation in Mathematics, 9. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[43] Sergei V. Matveev: Algorithmen für die Auflistung von speziellen Spines. `http://www.csu.ac.ru/~trk/`

[44] Kenneth C. Millett, Eric J. Rawdon: Energy, ropelength, and other physical aspects of equilateral knots. *J. Comput. Phys.* **186,** 426–456 (2003).

[45] Edwin E. Moise: Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung. *Ann. of Math* **57,** 547–560 (1952).

[46] Grisha Perelman: *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, `arxiv:math.DG/0211159`
Ricci flow with surgery on three-manifolds, `arxiv:math.DG/0303109`
Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, textttarxiv:math.DG/0307245. Preprints (2003).

[47] Julian Pfeifle und Günter M. Ziegler: Many Triangulated 3-Spheres. Preprint 2002.

[48] Riccardo Piergallini: Standard moves for standard polyhedra and spines. *Rendiconti del circolo matematico di Palermo* **37,** 391–414 (1988).

[49] Henri Poincaré: Complément à l'analysis situs. *Rend. Circ. Mat. di Palermo* **13,** 285–343 (1899). In *Œuvres de Henri Poincaré,* Tome VI (Paris 1953).

[50] Henri Poincaré: Cinquième complḿent à l'analysis situs. *Rend. Circ. Mat. di Palermo* **18,** 45–110 (1904). In *Œuvres de Henri Poincaré,* Tome VI. (Paris 1953).

[51] Kurt Reidemeister: Elementare Begründung der Knotentheorie. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **5,** 24–32 (1927).

[52] Kurt Reidemeister: *Knotentheorie.* Ergebn. Math. Grenzgeb. **1**, Springer-Verlag 1932.

[53] Kurt Reidemeister: Homotopieringe und Linsenräume. *Abh. Math. Sem. Universität Hamburg* **11,** 102–109 (1935).

[54] Dale Rolfsen: *Knots and Links.* Publish or Perish Press, 1976.

[55] Colin Rourke, Bert Wiest: Order automatic mapping class groups. *Pacific J. Math.* **194,** 209–227 (2000).

[56] J. Hyam Rubinstein: *Polyhedral minimal surfaces, Heegaard splittings and decision problems for 3-dimensional manifolds.* Proc. Georgia Topology Conf. (Amer. Math. Soc./ Intl. Press, 1993).

[57] J. Hyam Rubinstein: An algorithm to recognise small Seifert fiber spaces. *Turkish J. Math.* **28,** 75–87 (2004).

[58] Ludwig Schläfli: Theorie der vielfachen Kontinuität. Geschrieben 1850–1852. In *Ludwig Schläfli, Gesammelte Mathematische Abhandlungen,* Bd. I, 167–387 (Birkhäuser, Basel 1950).

[59] Alexander Schrijver: *Theory of linear and integer programming.* Wiley-Interscience, Chichester 1986.

[60] Horst Schubert: *Topologie. Eine Einführung.* Vierte Auflage. Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner, Stuttgart, 1975.

[61] Smale, S.: Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four. *Ann. of Math. (2)* **74,** 391–406 (1961).

[62] Lynn Arthur Steen and J. Arthur Seebach Jr.: *Counterexamples in topology.* Neudruck der zweiten Auflage von 1978, Dover Publications 1995.

[63] Ernst Steinitz: *Polyeder und Raumeinteilungen.* Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, Band 3 (Geometrie), 1–139 (1922).

[64] Ralph Stöcker, Heiner Zieschang: *Algebraische Topologie. Eine Einführung.* Zweite Auflage. Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner, Stuttgart, 1994.

[65] Tao Li: An algorithm to find vertical tori in small Seifert fiber spaces. Preprint 2002, `arXiv:math.GT/0209107`

[66] Abigail Thompson: Thin position and the recognition problem for S^3. *Mathematical Research Letters* **1,** 613–630 (1994).

[67] Abigail Thompson: Algorithmic recognition of 3-manifolds. *Bull. Am. Math. Soc.* **35,1,** 57–66 (1998).

[68] William P. Turston: *Three-Dimensional Geometry and Topology.* Princeton University Press 1997.

[69] Hale F. Trotter: Non-invertible knots exist. *Topology* **2,** 275–280 (1963).

[70] Vladimir G. Turaev, Oleg Ya. Viro: State sum invariants of 3-manifolds and quantum $6j$-symbols. *Topology* **31,** 865–902 (1992).

[71] Vladimir G.Turaev: *Quantum invariants of knots and 3-manifolds.* de Gruyter Studies in Mathematics, 18. Walter de Gruyter & Co. 1994.

[72] John Henry Constantine Whitehead: On incidence matrices, nuclei and homotopy types. *Ann. Math.* **42,** 1197–1239 (1941).

[73] Günter M. Ziegler: *Lectures on polytopes.* Graduate Texts in Mathematics 152, (Springer Verlag 1995).

Index

Im Index sind besonders wichtige und häufig verwendete Begriffe **fett** gedruckt. Fett gedruckte Seitenzahlen verweisen auf Definitionen.