제 1 장

행렬과 행렬식

제 1 절 집합

- 두 집합 A, B 에 대하여

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 또는 } x \in B\} \quad (\text{합집합})$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 이고 } x \in B\} \quad (\text{교집합})$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 이고 } x \notin B\} = \{x \in A \mid x \notin B\} \quad (\text{차집합})$$

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ 이고 } y \in B\} \quad (\text{곱집합})$$

로 정의한다.

- 두 조건 p, q 에 대하여

$p \Rightarrow q$: p 이면 q, p 를 q 의 충분조건, 또는 q 를 p 의 필요조건임을 나타낸다.

$p \Leftrightarrow q$: $p \Rightarrow q$ 이고 $p \Rightarrow q$, p 는 q 의 필요충분조건, 또는 p, q 는 서로 동치일 때를 나타낸다.

- 임의의 원소 $x, y \in A \neq \emptyset$ 에 대하여 A 의 단 한 개의 원소 z 를 대응시키는 규칙을 A 위의 *"이항연산"* 또는 *"연산"* 이라고 한다. $x \circ y = z$ 라 쓰고, $\circ$ 는 A 위의 연산, A 위에 연산 $\circ$ 이 정의되어 있다라고 한다. 연산기호는 $\circ, *, +, \times, \cdot$ 등이다. A

의 부분집합 $B(\neq \emptyset)$ 에 대하여 $a, b \in B \Rightarrow a \circ b \in B$ 인 경우 B 는 *"$\circ$ 에 관하여 닫혀있다"* 라고 한다.

- 유리집합은 $\mathbb{Q}$, 실수 집합은 $\mathbb{R}$, 그리고 복소수 집합은 $\mathbb{C}$ 로 표시한다.

제 2 절 체와 행렬

정의 1.1 집합 F 위에 $+$ 와 $\circ$ 이 정의되어 있다. 임의의 $a, b, c \in F$ 에 대하여 다음 9 가지 성질을 만족할 때 F 를 *"체"* 라고 한다.

(A.1) $(a+b)+c = a+(b+c)$: 덧셈에 관한 결합법칙

(A.2) $a+b = b+a$: 덧셈에 관한 교환법칙

(A.3) 모든 원소 $a \in F$ 에 대하여 $a+0 = 0+a = a$ 를 만족하는 $0 \in F$ 이 존재

(A.4) 각 원소 $a \in F$ 에 대하여 $a+b = b+a = 0$ 이 되는 b 가 존재. 이 때 b 를 a 의 *"덧셈에 관한 역원"* 이라 하고 $(-a)$ 로 나타낸다.

(M.1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$: 곱셈에 관한 결합법칙

(M.2) $a \cdot b = b \cdot a$: 곱셈에 관한 교환법칙

(M.3) 모든 원소 $a \in F$ 에 대하여 $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ 를 만족하는 $1 \in F(1 \neq 0)$ 이 존재

(M.4) 0 이 아닌 각 원소 $a \in F$ 에 대하여 $a \cdot b = b \cdot a = 1$ 인 b 가 존재. 이 때 b 를 a 의 *"곱셈에 관한 역원"* 이라 하고 a^{-1} 로 나타낸다.

(D) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$: 분배법칙

- 실수 $\mathbb{R}$ 에서 뺄셈과 나눗셈은 $a - b = a + (-b)$, $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$ 와 같이 정의 된 것이다.

- 주로 F 를 체를 의미하는 기호로 쓸 것이다. 특별한 언급이 없는 경우는 체 F 위에서 논하는 것으로 이해한다.

Ex. 1.2 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 는 덧셈과 곱셈에 관하여 체를 이룬다. $\mathbb{N}$ 는 덧셈과 곱셈에 관하여 체인가?

Ex. 1.3 $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ 라 하자. 임의의 $x, y \in \mathbb{F}_3$ 에 대하여 $x + y$ 는 x 와 y 를 더하여 3 으로 나누어 남는 값으로 정의하고 $x \cdot y$ 는 x 와 y 를 곱하여 3 으로 나눈 값으로 정의할 때 $\mathbb{F}_3$ 는 체를 이룬다.

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

- $x_1, \ldots, x_n \in F$ 에 대하여 $(x_1, \ldots, x_n)$ 는 "순서 n 조"라고 한다.
  $F^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in F\}$.
  $(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n) \Longleftrightarrow a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$.

- $v = (a_1, \ldots, a_n)$, $w = (b_1, \ldots, b_n) \in F^n$ 와 $a \in F$ 에 대하여

$$v + w = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n), \quad av = (aa_1, \ldots, aa_n),$$
$$-v = (-1)v = (-a_1, \ldots, -a_n), \quad v - w = (a_1 - b_1, \ldots, a_n - b_n)$$
$$\mathbf{0} = (0, \ldots, 0).$$

정리 1.4 *임의의* $v, w, u \in F^n$, $a, b \in F$ *에 대하여*

(1) $(v + w) + u = v + (w + u)$

(2) $v + w = w + v$

(3) $v + \mathbf{0} = \mathbf{0} + v$

(4) $v + (-v) = (-v) + v = \mathbf{0}$

(5) $a(v+w) = av + aw,\ \ (a+b)v = av + bv,\ \ (ab)v = a(bv),$ *그리고* $1v = v$

을 만족한다.

- $a_{ij} \in F$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le m$(m, n은 정수)에 대하여

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

  을 "$m \times n$ 행렬"이라 한다. a_{ij}는 A의 (i, j) 성분이라 하고, $a_{i1}, \ldots, a_{in}$은 A의 제 i 행, $a_{1j}, \ldots, a_{mj}$은 A의 제 j 열이라 한다. $A = [a_{ij}]_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$으로 표기하기도 한다.

- $\mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$를 F 위의 $m\times n$ 행렬의 집합이라고 하자. $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$와 $a \in F$에 대하여

$$\text{모든 } 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n \text{ 에 대하여 } a_{ij} = b_{ij} \Longleftrightarrow A = B$$

  라 하고,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}, \quad aA = [aa_{ij}]_{m\times n},$$

$$-A = (-1)A = [-a_{ij}]_{m\times n}, \quad A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}$$

  로 정의하고 $O = O_{m\times n}$를 모든 성분이 0인 "$m \times n$ 행렬(영행렬)"이라고 하자.

정리 1.5 *$A, B, C \in Mat_{m\times n}(F)$, $a, b \in F$ 에 대하여*

(1) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(2) $A + B = B + A$

(3) $A + O_{m\times n} = O_{m\times n} + A = A$

(4) $A + (-A) = (-A) + A = O_{m\times n}$

(5) $a(A+B) = aA + aB$, $(a+b)A = aA + bA$, $(ab)A = a(bA)$, $1A = A$.

Ex. 1.6

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 9 \end{bmatrix},$$

$$2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

정의 1.7 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times r}$ 라고 하자. 이 때 $AB = [c_{ij}]_{m\times r}$ 는 각각의 $1 \le i \le m$ 와 $1 \le j \le r$ 에 대해서

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

와 같이 정의되는 $m \times r$ 행렬이다.

Ex. 1.8

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

와 같이 (3×2) 행렬과 (2×2) 행렬의연산은 (3×2) 의 행렬을 만든다.

정리 1.9 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times r}$, $C = [C_{ij}]_{r\times s}$, $D = [d_{ij}]_{n\times r}$, $a \in F$ 라고 하자.

(1) $(AB)C = A(BC)$

(2) $A(B+D) = AB + AD$, $(B+D)C = BC + DC$

(3) $a(AB) = (aA)B = A(aB)$

(4) $AO_{n\times r} = O_{m\times r}$, $O_{r\times m}A = O_{r\times n}$.

정의 1.10 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $a_{ij} \in F, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ 에 대하여

$$A^T = [{a_{ij}}']_{n\times m}, \quad {a_{ij}}' = a_{ji}$$

를 *"A 의 전치행렬"* 이라 한다. 즉,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ 이면 } A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

정리 1.11 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times r}$, $a_{ij} \in F$ 이고 $b_{ij} \in F$ 에 대하여 $(AB)^T = B^TA^T$.

partial pf.) 임의의 특정 크기의 행렬과 함께 정리를 살펴보자. $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$, $B = [b_{ij}]_{2\times 2}$ 라고 하자.

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

이므로

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

한편,

$$B^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

이므로

$$B^TA^T = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{21}a_{12} & b_{11}a_{21} + b_{21}a_{22} \\ b_{12}a_{11} + b_{22}a_{12} & b_{12}a_{21} + b_{22}a_{22} \end{bmatrix}.$$

$\therefore (AB)^T = B^TA^T$. □

Ex. 1.12 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 라 하자.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \& \quad (AB)^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \ \& \ A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

So $B^T A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$. $\therefore (AB)^T = B^T A^T$.

정의 1.13 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times r}$, $C = [C_{ij}]_{s\times n}$, $D = [d_{ij}]_{s\times r}$ 가 체 F 위에서의 행렬이라고 하자. 이때

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mr} \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & \cdots & c_{sn} \end{bmatrix},$$

그리고

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mr} \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & d_{11} & \cdots & d_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & \cdots & c_{sn} & d_{s1} & \cdots & d_{sr} \end{bmatrix}$$

을 *"덧붙인 행렬"*이라 하고 주어진 행렬을 위와 같이 나타내는 것을 *"분할한다"*고 한다.

연습문제 (숙제) 2: 2(3), 3, 5

제 3 절 정사각행렬

- $n \times n$ 행렬: *"n 차의 정사각행렬"* 또는 *"n 차의 행렬"*

  $\mathrm{Mat}_n(F)$: F 위의 n 차의 행렬의 전체집합.

- $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$: 항등행렬 또는 *단위행렬*.

- $A, B \in \mathrm{Mat}_n(F)$ 에 대하여

$$AB \neq BA$$

  일 수 있다. 예들들어, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 라고 할 때

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  이고

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- $A \in \mathrm{Mat}_n(F)$, 음이 아닌 정수 m, k 에 대하여

$$A^\circ = I_m, A^1 = A, A^2 = AA, \cdots, A^m = A^{m-1}A$$

  로 정의. 이때 $A^m A^k = A^{m+k}$ 이고 $(A^m)^k = A^m A^m \cdots A^m = A^{mk}$.

- $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 이고 m 은 양의 정수라고 하면

$$A^m = \begin{bmatrix} \cos m\theta & -\sin m\theta \\ \sin m\theta & \cos m\theta \end{bmatrix}.$$

$\because m = 2$ 인 경우를 살펴보자. 우선

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2,$$
$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2,$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta,$$
$$\text{그리고 } \cos 2\theta = (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2$$

임을 기억하자. 이 때

$$\begin{aligned} A^2 &= AA = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta^2 - \sin\theta^2 & -2\cos\theta\sin\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & -\sin\theta^2 + \cos\theta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

정의 1.14 영행렬이 아닌 $A \in Mat_n(F)$ 에 대하여

$$AB = BA = I_n$$

인 $B \in Mat_n(F)$ 가 존재할 때 A 를 *"정칙행렬"* 이라 한다. B 를 A 의 *"역행렬"* 이라 하고 A^{-1} 로 나타낸다.

$$AC = O_n \quad \text{또는} \quad CA = O_n$$

인 $C \in Mat_n(F)$, $C \neq O$ 가 존재하면 A 를 *"영인자"* 라고 한다.

- A 가 정칙행렬일 때, 역행렬은 단 하나 뿐이다.

Ex. 1.15 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 라고 할 때 $A \neq O$ 이고 $ad - bc \neq 0$ 이면

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

$A \neq O$ 이고 $ad - bc = 0$ 이면

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = O_2$$

이므로 A 는 영인자이다. 따라서 $\mathrm{Mat}_2(F)$ 는 영행렬, 정칙행렬, 영인자로 이루어져 있다.

정리 1.16 *(1) A, B 이 정칙행렬이면 AB 는 정칙행렬이고*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

(2) I_n 은 정칙행렬이고 ${I_n}^{-1} = I_n$.

(3) A 이 정칙행렬이면 A^{-1} 은 정칙행렬이고 $(A^{-1})^{-1} = A$.

(4) A 이 정칙행렬이면 A^T 은 정칙행렬이고 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

pf) (1) 과 (4) 을 증명한다.
(1) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I_n$. Similarly $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$.
(4) A 가 정칙행렬이면 $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$. $(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T$ 이고 $(A^{-1}A)^T = A^T(A^{-1})^T$. So

$$(A^{-1})^T A^T = {I_n}^T = I_n = A^T(A^{-1})^T.$$

$\therefore A^T$ 는 정칙행렬이고 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. □

- 양의 정수 m 에 대하여 $A^{-m} = (A^{-1})^m$ 으로 정의.

$$A^m(A^{-1})^m = A^{m-1}(AA^{-1})(A^{-1})^{m-1} = \cdots = I$$

  이므로

$$(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m = A^{-m}.$$

Ex. 1.17 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 이고 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 일 때

$$(AB)^T = B^T A^T \text{ 이고 } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

임을 확인하여라.

sol)

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (AB)^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

따라서

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = (AB)^T.$$

$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ 이고 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 이므로

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{3-2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

이므로 $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$. □

정의 1.18 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 일 때

$$\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \in F$$

A 의 "트레이스"(trace) 라고 한다.

정리 1.19 $A, B \in \mathrm{Mat}_n(F)$, $a \in F$ 에 대하여

(1) $\mathrm{tr}A^T = \mathrm{tr}A$

(2) $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B, \quad \mathrm{tr}(aA) = a(\mathrm{tr}A)$

(3) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

partial pf) A, B가 2차 행렬일 경우에 (3)을 살펴보자. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$라 하자.

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

이고

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{21}a_{12} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{bmatrix}.$$

따라서

$$\mathrm{tr}AB = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{ki}$$

이고

$$\mathrm{tr}BA = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} b_{ik}a_{ki} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} a_{ki}b_{ik}.$$

□

정의 1.20 $A \in \mathrm{Mat}_n(F)$에서 $A^T = A$, 즉 $a_{ji} = a_{ij}$, $1 \le i, j \le m$일 때 A를 *"대칭행렬"(symmetric matrix)*이라 하고

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a & \cdots & b \\ a & a_{22} & & c \\ \vdots & & \ddots & \\ b & c & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

의 형태이다. $A^T = -A$, 즉 $a_{ji} = -a_{ij}$, $1 \le i, j \le m$일 때 A를 *"교대행렬"(alternating matrix)*이라 하고

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & \cdots & b \\ -a & 0 & \cdots & c \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -b & -c & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

의 형태이다.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

형태의 행렬을 *"상삼각행렬"(upper triangular matrix)*,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

형태의 행렬을 *"하삼각행렬"(lower triangular matrix)*,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

형태의 행렬을 *"대각행렬"(diagonal matrix)* 이라 하고 $A = \mathrm{diag}\{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}$ 으로 나타낸다.

$$aI_n = \mathrm{diag}\{a, a, \cdots, a\}$$

을 *"스칼라행렬"(scalar matrix)* 이라고 한다.

연습문제 (숙제) 3: 5(2), 8(1)(2), 13(1)