수학적 상상력

최재경(고등과학원)

수학은 논리다. 틀린 것은 수학이 되지 못한다. 논리에 합당한 것만이 수학을 만든다. 수학에서 모든 증명은 논리적으로 완벽하다. 그런데 여기에 문제가 있다. 논리 자체가 그 증명을 찾는데 아무 도움이 되지 못한다는 사실이다. 그러면 증명을 어떻게 찾을 것인가? 19세기의 大수학자 Henri Poincaré 는 "수학자로 하여금 추론에 의해 옳은 증명을 찾도록 도와주는 것은 직관력(intuition)이다" 라고 말하였다. 직관력을 써서 수학자는 증명대상 문제의 전체적인 체계를 파악하고 증명에의 길로 찾아나간다는 것이다. 그 직관력으로 수학적 아름다움을 느낄 수 있고, 수와 형태의 조화를 감상할 수 있으며, 기하학적 우아함을 음미할 수 있다.

이 글에서는 수학사의 몇 가지 중요한 발전과정을 돌이켜볼 것이다. 이 과정에서 수학자가 상상력을 어떻게 동원하여 문제를 해결했는가 엿보고자 한다.

1. 자연수에서 복소수로

나일강이 흐르는 나라 이집트에는 수 천년 전부터 태양신을 섬기는 족속이 있었다. 그들의 오래 전 선조 할아버지는 어느 날부터 아침에 떠오르는 태양을 세기 시작했다. 그날 뜨는 해는 1, 그 다음 날 뜨는 해는 2, 또 그 다음 날 뜨는 해는 3, 4, 5, 6, 7,..... 이렇게 아침에 뜨는 해마다 숫자가 탄생되었다. 그때 생긴 숫자에는 모두 다음 숫자가 따라온다. 왜냐면 태양은 다음 날 꼭 다시 떠오르니까. 늘어나는 태양의 숫자를 모아가던 그 족속은 그 숫자가 한없이 늘어갈 것이라고 믿게 되었다. 그래서 이렇게 하나씩 늘어나는 숫자는 무한하다는 생각을 자연스럽게 하게 되었다. 이것이 바로 인간이 무한이라는 개념을 받아들이게 된 시초이다. 이렇게 인간에게 무한이 탄생하게 되는 과정에는 사실 인간의 약속이 필요했다. 즉 자연수의 무한공리가 필요하다. 어떤 수의 집합이 1을 포함하며, n을 포함한다면 꼭 다음 수 $n+1$도 포함할 때 그 집합은 바로 자연수의 집합이라는 공리가 무한공리이다. 이 공리에 의해 자연수의 집합이 무한함을 알 수 있고, 수학적 귀납법이라는 증명방법도 성립한다. 한가지 예로서 자연수 n까지 세제곱의 합은 n까지 합의 제곱이라는 사실이 모든 자연수 n에 대해 성립함을 보일 수 있는 것도 이 무한공리를 받아들이기로 약속했기 때문이다.

나일 강변의 밭을 매던 사람들은 밭을 반으로 나눠야 할 때가 있었다. 어떤

때는 셋으로 나누기도 했다. 혹은 넷으로, 다섯으로, 여섯으로.... 이렇게 하여 유리수라는 수가 사람의 머리 속에 탄생하였다. 그런데 기원전 5세기 히파수스라는 그리스 사람이 무리수를 발견하였다. 그는 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이 $\sqrt{2}$는 유리수가 아님을 증명하였다. 항해 중 이 사실을 증명한 히파수스는 그 사실에 놀란 피타고라스 학파 동료들이 떠밀어 바다에 빠져 죽었다고 전해진다. 삼라만상은 자연수와 유리수로 표현할 수 있다고 굳게 믿던 학파였으므로.

음수의 개념은 기원 전 2세기 漢나라의 九章算術에 처음 나타났다. 이 책은 양수를 빨간 막대기로, 음수를 까만 막대기로 표현했다고 한다. 7세기경 인도에서 양수는 재산을, 음수는 빚을 나타내는 수로 쓰였다. 그러나 그리스의 수학자 디오판투스는 방정식 $\mathbf{4x+20=0}$을 터무니없는 방정식이라며 음수의 존재를 고려조차 하지 않았다. 무리수는 껄끄러운 수이긴 하지만 $\sqrt{2}$는 1.4142... 라고 쓰며 유리수로 근사값을 구할 수 있어서 사람들은 무리수를 받아들였다. 그러나 無인 수 0보다 더 작은 음수는 존재의미를 부여할 수 없어서 무리수보다 더 까다로운 수로 여겨졌다. 양수와는 방향이 반대인 수로서 그나마 음수는 존재의미가 있었다. 그렇지만 16세기의 유명한 수학자도 무리수와 음수를 허구의 수라고 불렀다고 한다.

제곱해서 -1이 되는 수를 $\sqrt{-1}$ 이라고 쓴다. 모든 수는 제곱하면 양수가 되므로 $\sqrt{-1}$ 같은 수를 허수라고 부른다. 존재할 수가 없는 수란 뜻이다. 허수는 판별식이 음수인 2차방정식의 근으로 나타난다. 예를 들어 서로 만나지 않는 원과 직선의 교점을 표현하는데 쓰인다. 이러한 교점은 존재하지 않으므로 16세기 사람들이 $\sqrt{-1}$ 과 같은 허수는 존재하지 않는다고 생각하는 것은 이해할 만하다. 그러나 3차 방정식을 다룰 때는 문제가 달랐다. 카르다노가 발표한 3차 방정식의 근의 공식에 의하면

$x^3 = 15x + 4$ 의 근은 $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ 이다.

여기서 근에 $\sqrt{-121}$ 이라는 허수의 항이 포함되지만 실제 근은 모두 실수인 4, $-2 \pm \sqrt{3}$ 이다. 이렇게 근은 실수이지만 허수를 포함한 식으로 밖에 표현할 수 없다는 사실이 매우 당혹스러웠다. 별 수 없이 카르다노는 허수를 궤변이라고 치부하였다. 그러면서도 그는 허수를 가지고 유희를 하였다. 합이 10이며 곱이 40인 두 수는 $5 \pm \sqrt{-15}$ 라고 보이면서 그는 이를 미묘하고 쓸모 없는 유희라고 불렀다.

한편 1572년 Bombelli는 카르다노 근의 공식에 있는 허수 $\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$ 을 $c + d\sqrt{-1}$ 의 꼴로 간단히 바꾸려는 시도를 하다가 중요한 결론에 도달했다. 오늘

날과 같은 복소수의 합과 곱의 계산법을 정한 것이다. 그 자신이 미처 그 중요성을 자각하진 못했지만. $\sqrt{-1}$ 을 imaginary number 라고 부른 것은 1637년 데카르트였다. 그만큼 상상 속에서만 존재하는 수라고 본 것이다.

그러면 복소수 $a+b\sqrt{-1}$ 는 기하학적으로 어떤 의미가 있는 것일까? 이 문제에 대한 열쇠는 1799년 Wessel과 1806년 Argand과 1831년 가우스가 독립적으로 정의한 복소평면에서 찾아볼 수 있다. 복소평면에서 복소수 $a+b\sqrt{-1}$ 은 좌표 (a,b)를 갖는 점이 된다. 즉 실수축과 허수축이 수직으로 만나는 2차원 평면이라는 것이 복소평면의 핵심이다. 아인슈타인에게 큰 영향을 끼친 철학자 마흐는 $\sqrt{-1}$ 를 $+1$과 -1 사이에서 평균 방향을 나타낸다고 해석하였다.

복소평면에서 두 복소수를 곱할 때 절대값끼리는 곱하고 편각끼리는 더해야 하는 것이다. 그러므로 복소평면을 통해서 곱하기가 더하기로 연결되는 것이다. 한편 드므와브르와 오일러 모두가 그들이 찾아낸 공식의 기하학적 의미를 깨닫지 못했다는 것은 그만큼 복소평면의 개념이 혁신적임을 뜻한다고 해석할 수 있다. 복소수의 곱하기는 복소평면에서 확대와 회전을 나타낸다. 이 때문에 복소수는 오묘한 물리현상을 표현하는 많은 방정식에서 그 위용을 드러내는 것이다.

허수는 수학자가 발견한 것 중 가장 위대한 것이라고 한다. 그러나 수학자가 허수를 능동적으로 찾아낸 것은 아니다. 이와 정반대로 허수가 수학자를 찾아왔으나 수학자는 허수를 피했고, 골치 아파했고, 다루기를 싫어했다. 그러나 자연 속에서 매우 자연스럽고 조화롭게 살고 있던 허수는 어느 날 실수와 짝을 이루면서 화려하게 등장하더니 그때부터 인간이 자연 현상을 이해하는 데에 크나큰 도움을 주고 있다.

2. 로그: 곱하기를 더하기로

1590년 스코틀랜드 제임스 왕의 御醫는 왕을 수행하여 노르웨이 행 배를 탔다. 그 전해에 왕의 신부가 될 덴마크의 공주가 스코틀랜드로 항해하던 중 폭풍을 만나 노르웨이에 피난했기 때문이다. 제임스 왕 일행도 악천후에 고생하였으나 결국 오슬로에 도착하여 신부와 결혼하였다. 귀국길에 왕 일행은 덴마크의 섬에 들러 천문학자 티코 브라헤를 만났다. 천문학자의 환대를 받던 수행원 중 어의는 특히 티코 브라헤와 그의 조수들이 애용하던 계산방법에 매료되었다. 1008년 이집트 사람들로부터 전해 내려온 쉬운 계산법인데 그것은 $2\cos x\cos y = \cos(x+y)+\cos(x-y)$ 라는 삼각함수식을 이용하여 코사인 표로부터 곱하기를 더하기로 바꾸는 방법(prosthaphaeresis)이었다.

복잡한 곱하기 계산을 쉬운 더하기 계산으로 바꾸는 방법을 찾는 것은 중세 때부터 많은 사람들의 꿈이었다. 한 방법은 지수법칙 $a^m a^n = a^{m+n}$을 이용하는 것이다. 예를 들어 2의 멱수들이 모여있을 때 이 수들의 곱을 구하자면 지수들을 더하면 되는 것이다. 문제는 2의 멱수들이 서로 많이 떨어져 있다는 점이었다. 이런 방법을 스코틀랜드의 한 영주인 네이피어가 친구에게 가르쳐주자 그는 흥미로운 얘기를 네이피어에게 들려주었다. 이 친구가 바로 제임스 왕의 어의였다. 친구로부터 prosthaphaeresis 방법을 전해 들은 네이피어는 지수법칙으로 곱하기를 더하기로 바꾸는 계산방법을 완성하기로 결심하였다. 그 아이디어는 서로 떨어져 있는 2의 멱수들을 2의 유리수 m제곱으로 이어주는(interpolation) 것이었다. 즉 모든 b에 대해 $b = 2^m$을 만족하는 지수 m을 찾는 작업이었다. 이 작업을 하기 위해 네이피어는 0.9999999^{100}를 계산하여 그 답이 0.99999이라고 보이는 작업부터 시작하였다. 이로부터 20년간 계산에 몰두한 끝에 네이피어는 1614년 로그표를 발표하였다. 막대한 계산작업에 고생하던 당대의 과학자들은 네이피어의 로그표를 크게 환영하였다.

셰익스피어는 그의 마지막 연극 템페스트를 1610년에 발표하였다. 공작에서 폐위된 뒤 마술사가 된 주인공 프로스페로가 외딴 섬에서 마법으로 폭풍을 일으켜서 항해하던 왕의 일행을 섬에 피난케 하는 이야기로 시작한다. 이 연극은 어쩌면 셰익스피어가 제임스 왕과 여왕의 고난 속 항해를 염두에 두고 쓴 것일지도 모른다는 의견이 있다. 티코 브라헤가 프로스페로의 모델일 수 있다. 연극 템페스트가 두 번이나 런던의 왕궁에서 공연됐는데 왕과 여왕은 공연을 감상하며 그들의 험난한 결혼과정을 떠올렸을지도 모른다는 것이다.

Prospero 는 Providence 와 sparrow 를 합성해서 셰익스피어가 만든 이름이라고 한다. 참새가 떨어지는 것에도 신의 섭리가 작용한 것이라고 셰익스피어는 썼다. 그러면 신의 섭리는 수학자에게 어떻게 다가오는가? 참새가 떨어진 뒤 죽은 몸은 자연의 법칙에 따라 필연적으로 분해된다. 이것은 마치 수학에서 증명의 논리가 필연적으로 가정을 옳은 결론으로 이끄는 것에 비견된다. 그리고 옳은 증명을 찾아낸 수학자의 직관력은 어쩌면 신의 섭리가 작용해서 생긴 것인지도 모른다.

3. 비유클리드 기하학: 否定의 無모순

고대 이집트 나일 강은 매년 홍수가 나서 강가의 비옥한 농토가 범람하였다. 홍수가 할퀴고 지나간 뒤 새롭게 땅을 구획하며 이집트인들의 측량술은 발달해나

갔다. 그리스인들은 이집트인들의 이런 유용한 기술을 받아들이며 땅의 측량술이라는 뜻의 이름 'geometry'를 지었다. 그러나 그리스인들은 이집트인들과 달리 기하학의 실용성만 다루는 것을 넘어서 그 이론적인 면에 더 관심을 가졌다. 그리스인들은 이집트인들의 경험적 접근에 만족하지 않고 기하학에 관련된 모든 사실을 연역적으로 증명하는 데 흥미가 있었다.

기원전 300년경 유클리드는 그 당시까지 그리스에 알려져 있던 기하학의 모든 내용을 담아 "원론"이라는 책을 펴냈다. 이 위대한 고전은 서구사상에 가장 영향력을 끼친 몇 가지 책 중의 하나이다. 그 중 기하학에 관한 수많은 정리는 다섯 개의 공리로부터 얻어낸 것이다. 여기서 공리란 워낙 자명한 것이어서 증명할 필요 없이 받아들여야 하는 전제이고, 정리란 공리로부터 연역적으로 증명하여 얻은 사실을 말한다. 유클리드가 도입한 다섯 가지 공리는 다음과 같다.

1. 평면 위에서 두 점은 한 선분을 결정한다.
2. 선분은 무한히 확장할 수 있다.
3. 한 점을 중심으로 하고 다른 한 점을 지나는 원은 존재한다.
4. 모든 직각은 같다.
5. 두 직선을 한 직선이 만날 때 만나는 각(같은 쪽)의 합이 180° 보다 작으면 두 직선은 180° 보다 작은 쪽에서 서로 만난다.

그런데 유클리드 시대 이래 19세기 초까지 사람들에게 하나 골치 아픈 것이 있었다. 그것은 평행선의 공리라고도 부르는 다섯째 공리가 앞의 네 공리에 비해 복잡하고 별로 자명해 보이지 않는다는 것이다. 그래서 사람들은 첫 네 개의 공리로 평행선 공리를 증명하여 이 공리가 정리임을 보이려고 한 것이다. 많은 사람들은 실제로 그렇게 증명하였다고 주장하였으나 이들의 논리에는 모두 오류가 있었다.

18세기에 사키에리 라는 논리학자는 진보된 논리를 펴 보았다. 즉 평행선 공리를 나머지 공리로 증명할 수 있다면 평행선 공리가 틀리다고 가정했을 때 모순에 봉착할 것이라고 믿었다. 그래서 그는 두 평행선으로 만든 사각형 내각의 합은 360° 보다 작다고 가정한 뒤 여러 가지 정리를 얻어냈다. 그러나 그는 원하던 모순된 정리를 끝내 얻지 못해서 포기하고야 말았다. 이 과정에서 그는 비유클리드 기하학의 일종인 쌍곡적 기하학의 정리를 많이 얻었지만 워낙 유클리드 기하학만이 유일한 기하학이라는 신념에 투철했던 지라 곧 그는 멍청한 결과를 얻었다고 스스로 생각하고는 이 논리를 포기하였다. 위대한 발견을 바로 눈앞에 두고도 놓쳐버린 셈이었다.

19세기 초 평행선 공리 문제를 붙들고 있던 대부분의 사람들은 이제 자포자기에 빠지게 되었다. F. 보여이(Bolyai) 라는 항가리 사람은 아들 J. Bolyai 에게 다음과 같은 편지를 보냈다. "너에게 간절히 부탁하는데 평행선 문제는 이제 포기하렴. 나는 지옥 같은 평행선의 바다를 항해하여 봤지만 그때마다 돛대는 부러지고 돛은 찢어지곤 했다." 아버지의 애원에 아랑곳 하지 않고 Bolyai 는 평행선 문제를 거듭 붙잡고 늘어진 끝에 1823년에 진리의 어렴풋한 빛을 발견하게 되었다. 그는 젊은이답게 선언하였다. "나는 無로부터 새 우주를 창조하였다." 그는 평행선 공리 대신, 한 점을 지나며 한 직선에 평행한 직선은 하나 이상 존재한다는 공리를 다섯째 공리로 받아들이는 (쌍곡적) 비유클리드 기하학은 유클리드 기하학과 다르지만 모순되지도 않음을 깨닫게 된 것이다.

비슷한 시기에 러시아의 수학자 로바체프스키도 쌍곡적 비유클리드 기하학을 발표하였다. 칸트의 철학에 따라 유클리드 기하학만이 절대불변의 진리라고 굳게 믿고 있던 19세기 사람들이 비유클리드 기하학의 출현으로 받은 충격은 무리수의 존재를 처음 발견한 피타고라스 학파가 느꼈던 당혹함 그 이상이었다. 그래서인지 비유클리드 기하학은 처음 출현한 이후 30여 년간 수학의 변방에서 맴돌았다. 1854년 독일의 수학자 리만은 직선 밖의 한 점을 지나는 평행한 직선은 하나도 존재하지 않는다는 공리를 받아들이는 타원적 비유클리드 기하학을 창시하였다. 리만은 여기서 그치지 않고 극히 일반적인 기하학을 완성하였다. 여태껏 기하학은 점, 직선, 평면, 공간을 매우 경직된 대상으로 다뤄왔으나 리만은 보다 유연하게 공간을 정의하였다. 그에 의하면 공간은 점으로 이루어졌고 공간 자체의 성질은 점 사이의 거리로 결정된다는 것이다. 이리하여 공간의 학문인 기하학은 가장 일반적이고 자연스러운 공간을 다룰 수 있게 되었다.

리만에 의하여 인간은 휘어진 공간을 자연스럽게 다룰 수 있게 되었고, 그 60년 후 아인슈타인은 리만의 이론을 토대로 일반상대성 이론을 완성하게 되었다. 아인슈타인에 의하면 우리가 사는 우주 공간은 중력에 의해 휘어졌다는 것이다. 3000여 년간 인간이 사는 공간은 전혀 휘지 않고 평평한 유클리드 공간이라고 믿고 있었으나, 인간의 호기심의 산물인 비유클리드 공간을 모델로 하여 중력이 우주공간을 휘게 만든 것이었다. 인간과 오랫동안 함께 해왔던 유클리드 공간은 이제 피안의 공간, 이상향이 되었고, 인간을 당혹케 하며 낯설게 다가오던 비유클리드 공간은 어느새 우리의 삶의 무대가 되었다.

4. 타원함수: 역발상

미분 적분은 뉴튼과 라이프니츠가 발견하였다. 모든 함수는 미분할 수 있다. 그러나 적분은 불가능한 함수가 존재한다. 적분은 존재하지만, 불가능하다는 말은 잘 알려진 함수로서 적분을 표현할 수 없다는 뜻이다. 적분이 불가능한 함수의 한 예는 타원의 길이를 표현하는 함수에서 볼 수 있다. 8자 모양의 곡선 렘니스케이트의 길이도 적분 불가능한 함수 $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ 로 표현된다. 그래서 이런 적분을 타원적분이라고 부른다. 이 타원적분은 다음과 같은 합의 성질을 갖고 있다:

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^{\frac{x\sqrt{1-y^4}+y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}. \qquad (*)$$

불란서의 유명한 수학자 르장드르는 여러가지 타원적분의 합의 성질과 변환 정리 등을 연구하는 데 40년의 세월을 보냈다. 그리고 수많은 아름다운 정리를 얻어냈다.

그런데 1823년 21살의 노르웨이 수학자 아벨은 $(*)$의 합의 성질에서 우변의 적분상한 $\frac{x\sqrt{1-y^4}+y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2}$ 을 주목하며 혁신적인 역발상을 하였다. 좌변 적분들의 역함수를 이용하자고. 그래서 $u(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ 라 놓고 함수 $u(x)$ 의 역함수 $x = sl(u)$ 를 도입하면 합의 성질 $(*)$는

$$sl(u+v) = \frac{sl(u)sl'(v) + sl(v)sl'(u)}{1 + sl^2(u)sl^2(v)}$$

와 같이 쓸 수 있게 된다. 마치 원의 길이를 구할 때 나오는 적분 $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ 의 역함수인 $x = \sin u$ 에 대해서 $(*)$와 같은 합의 성질은 바로 다름아닌 사인함수의 합의 공식 $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u$ 이 되듯이.

이런 타원적분의 역함수를 타원함수라고 부른다. 아벨의 타원함수는 르장드르의 40년 타원적분의 연구를 쓸모 없게 만들었다. 르장드르가 그렇게 오랫동안 씨름하던 타원적분의 난제들은 아벨의 역발상으로 쉽게 풀리기 시작하였다. 아벨에 이어 독일의 수학자 야코비는 타원함수를 더욱 꽃피웠고 리만과 포앙카레 등은 타원곡선 이론으로 발전시켰다. 결국 이와 같은 발전에 힘입어 와일즈는 320년 미해결 문제 페르마의 정리를 1995년 증명하였다.

르장드르는 아벨과 야코비의 논문을 읽고 두 젊은이를 진심으로 격려하였다. 그의 40년 노고의 걸작이 무산되는 것을 감수하면서도. 20대 초반의 젊은이와 70대 후반의 노학자는 서로에게 아낌없는 찬사를 보내는 훈훈한 서신을 교환하였다.

혹자는 르장드르와 아벨의 차이점에 대해서 르장드르는 마차를 말 앞에 두었고 아벨은 말을 마차 앞에 둔 격이라고 말한다. 통계학자 갈튼은 사람이 과음해서 타락한다기 보다 선천적으로 도덕적이지 못해 과음한다는 가설을 세우기도 했다. 한 아버지의 아들이란 사람이 도무지 이해 못할 성품을 지녔다면 발상의 전

환을 하여 그런 아들을 낳게 한 아버지를 이해하도록 하라는 사람도 있다.

필즈 메달리스트 스메일은 1958년 구면을 연속적으로 움직여 뒤집어서 속이 바깥으로 나오게 하는 것이 가능하다고 발표하였다. 수학에서는 앞과 뒤, 안과 밖, 왼쪽과 오른쪽이 자유롭게 오고 간다. 우리 사회에서는 좌와 우가 그렇게 원만하지 못한듯하다.

5. 초함수: 존재의 그림자

수학에는 많은 것이 존재한다. 數가 존재하고, 점과 직선과 평면이 존재하고, 삼각형과 사각형이 존재하고, 벡터와 함수가 존재한다. 그런데 수학에는 그림자로서 존재하는 것이 있다. 한 가지 예로 코벡터(covector)가 그것이다. 코벡터 v^*는 임의의 벡터 u에 대해 실수 값 $v^*(u)$를 선형적으로 대응시키는 그림자 같은 것이다. 사실 코벡터 v^*는 어떤 벡터 v의 그림자이다. 다시 말해서 내적 $<\ ,\ >$에 대해 $v^*(u) = < v, u >$가 성립한다는 말이다.

그림자로서 존재하는 것 중에 초함수라는 것도 있다. 초함수는 함수라고 부르는 것을 일반화 한 것으로서 매우 어렵게 탄생한 것이다. 1930년 물리학자 디락은 논란이 많은 델타함수를 도입하였다. 디락 델타함수는 원점에서 무한대이고 그 외의 점에서 0이며, 적분값이 1인 함수이다. 이것은 야구공이 타자의 배트에 부딪힐 때의 충격을 표시하는 함수로 쓰인다. 이러한 델타함수를 수학자들은 받아들일 수 없었다. 왜냐하면 함수는 무한대의 값을 가질 수 없으며, 한 점을 뺀 모든 점에서 0인 함수는 적분값이 0이기 때문이다.

야구공을 타자가 배트로 칠 때 매 순간 어느 정도 큰 힘이 작용하는가를 알려고 하기보다, 충격이 전달되는 전체시간 동안 전해지는 총 충격량만 알면 야구공의 속도를 예측할 수 있다는 것이 델타함수의 요점이다. 이렇게 함수 같지 않고 괴팍한 델타함수를 당시의 수학자들은 조소하였다. 그러나 크게 비웃을 수만은 없었던 것은 디락을 비롯한 물리학자들이 델타함수를 쓰며 항상 옳은 답을 얻어냈기 때문이다. 그래서 디락의 물리학적 직관력의 산물인 델타함수는 수학자들에게 큰 골칫거리였다. 그러다가 1940년대 후반 불란서의 수학자 슈바르츠가 초함수(distribution)를 논리적으로 엄밀하게 도입하며 델타함수가 초함수의 일종이라고 보였을 때 수학자들은 비로소 안도할 수 있었다.

슈바르츠의 성공요인은 델타함수를 기존의 함수처럼 보지 않고, 다른 함수에 끼치는 델타함수의 영향력을 봄으로서 간접적이고 인식론적인 접근을 시도한 데 있다. 즉 델타함수를 그림자로서 보고자 한 것이다. 아일랜드의 철학자 버클리에

의하면 우리가 보통 물체라고 부르는 사물은 실은 단지 감각에 의해 우리에게 주어진 관념들의 다발에 불과하다는 것이다. 우리가 물체라고 부르는 것에서 감각에 의해 주어지는 관념들을 하나씩 제거하면 나중에는 아무것도 남지 않는다. 따라서 물체의 존재란 지각된다는 것에 불과하다. 이로부터 버클리는 '존재란 지각됨이다'(esse est percipi; To be is to be perceived)라는 유명한 말을 남겼다.

수학자들이 디락 델타함수에 당혹스러워 한 이유는 전지전능한 이성으로 함수 자체를 인식하려고 시도하였기 때문이다. 칸트에 의하면 우리는 物自體(Ding an sich)의 세계에는 다다를 수 없고, 우리의 감성에 의해 구성되는 현상으로서의 대상만 인식할 수 있는 것이며, 인식의 대상은 주관의 선천적 형식에 의해 구성되는 것이라고 하였다. 이런 칸트의 인식론을 따라 슈바르츠의 초함수를 이해하기 위해 델타함수라는 대상을 우리의 주관으로 구성하여 보자. 그러자면 함수를 인식하기 위한 수학자 주관의 선천적 형식은 무엇인가? 이 선천적 형식 $\mathcal{F}$는 다음과 같이 정해진다:

큰 x값에 대해 $\varphi(x) = 0$이며 미분 가능한 함수 $\varphi(x)$들의 집합이 $\mathcal{F}$이다.

$\mathcal{F}$는 수학자의 감각기관이 되는 셈이다. 이 감각기관으로 함수들을 어떻게 지각할 것인가? 예를 들어서 함수 $f(x)$가 주어졌을 때 수학자가 $f(x)$를 $\mathcal{F}$속의 $\varphi(x)$로 느끼는 관념은 실수 값 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f(x)dx$ 로 정의된다. 이렇게 지각된 모든 관념들이 모여 생긴 관념다발이 기존의 함수 $f(x)$를 초함수로서 새롭게 정의하는 것이다. 일반적으로 하나의 초함수는 $\mathcal{F}$속의 모든 $\varphi(x)$에 대해 관념을 만들고, 이 관념들이 모여서 하나의 관념다발을 만든다. 슈바르츠는 이 관념다발로 원래의 초함수를 정의하였다. 이러한 초함수의 정의는 '존재란 지각됨이다'라는 버클리의 말을 연상시킨다.

디락 델타함수를 초함수로 정의하자면 다음과 같다:

$\mathcal{F}$ 속의 $\varphi(x)$로 실수값 $\varphi(0)$을 느껴서 생긴 관념다발이 바로 델타함수이다.

초함수의 정의를 이용하면 놀랍게도 초함수의 미분이 가능해진다. 영화 '스타트렉'에 등장하는 순간이동이란 것도 초함수로 볼 수 있는데, 순간이동을 미분하면 델타함수가 된다. 반면에 델타함수를 미분한 것만큼 충격을 가하면 야구공은 순간이동을 하게 된다.

돌이켜 보건대 디락은 충격함수 자체를 인식하려 들지 않고 그 함수의 간접적인 영향력에 관심을 둔 것이다. 디락의 이러한 간접적인 시각의 효용성을 인정한 슈바르츠는 논리적인 비약을 행하여 테스트 함수 $\varphi(x)$들의 집합 $\mathcal{F}$ 를 통해 델타함수를 비롯한 초함수를 간접적으로 인식하는 수학이론을 정립한 것이다. 수학

논리의 바깥에서 유유자적하던 디락을 슈바르츠는 수학 논리 안으로 끌어들인 것이다. 마치 칸트가 코페르니쿠스적 전회를 통해 경험론을 포용한 것처럼.

맺음말

인생은 유한하다. 그럼에도 불구하고 인간은 무한공리를 써서 무한한 자연수를 만들었다. 그리고 평행선 공리를 이용하여 무한히 먼 곳을 꿈꾸었다. 유한한 존재가 감히 무한을 범접해서인가? 괴델은 자연수 체계에는 증명할 수도 반증할 수도 없는 명제가 존재함을 증명하였다. 참이지만 증명할 수 없는 사실이 존재한다는 말이다.

창세기 11장에는 온 세상이 한 가지 말을 쓰던 옛날 이야기가 나온다. “이때 사람들은 바벨탑을 쌓아 하늘에 닿을 생각을 하였다. 이를 보고 하나님은 사람들이 하려고만 하면 못할 일이 없겠구나 우려하고, 땅에 내려와서 사람들의 언어를 혼잡하게 하여 서로 알아듣지 못하게 하였고 온 땅으로 흩으셨다.” 이런 창세기에 관해 문화와 언어의 다양함을 하나님의 심판으로 보는 것이 아니라 하나님의 축복이라고 해석하는 학자도 있다. 같은 논리로, 증명할 수 있는 참 뿐 아니라 증명할 수 없는 참도 있다는 것은 인간에게 주어진 축복일지도 모른다.

자연수 체계와는 달리 유클리드 기하학에는 증명할 수 없는 참은 없다. 대신 평행선 공리와 모순되는 비유클리드 기하학이 존재한다. 이 중에서 리만이 찾아낸 타원기하학에서는 공간이 유한하다. 인간이 사는 공간은 무한한 유클리드 공간이 아니라 바로 이런 유한한 우주인 것이다.

<數學>

존재의 문제
不在와 존재
존재의 그림자
그림자의 그림자
거울 속 존재
논리와 無모순
모순의 아름다움
無의 존재
무한의 수학

수학의 虛無 ...

상상력과 지식의 도약, 고등과학원 초학제연구총서 003, 이학사 2015