

직선, 평면, 조화함수, 극소곡면

유클리드 기하학에서 가장 많이 등장하는 것은 직선이다. 두 점을 지나는 직선, 한 직선에 평행한 직선 등 거의 모든 명제에 직선이란 말이 나온다. 여기서 쓰인 직선의 의미는 두 가지로 볼 수 있다. 첫째 두 점을 잇는 가장 짧은 곡선으로서 직선의 의미가 있고, 둘째 앞으로 곧게 뻗을 수 있다는 직선의 의미가 있다. 즉 최소 길이의 특성과 균형이 잡혀있다는(곧다는) 특성을 직선은 가지고 있다. 평면 위에서 두 점을 끝점으로 갖는 곡선들의 집합에 곡선의 길이라는 함수를 정의하자. 이 함수의 도함수는 바로 곡선의 곡률이 된다. 그러므로 두 점을 지나는 가장 짧은 곡선인 직선에서는 도함수가 0이어서 곡률이 0이 되고, 바로 이 때문에 직선은 옆으로 구부러지지 않고 앞으로 곧게 뻗어나가는 것이다.

평면은 직선을 한 차원 높인 것으로서 직선과 비슷한 특성을 가지고 있다고 볼 수 있다. 평면을 공간 속에 있는 것으로 본 다음 평면의 일부를 곡면으로 변형시키면 넓이가 증가한다는 것이다. 평면도 앞으로 뻗어나가며 옆으로 구부러지지 않는다. 달리 말하면 평면의 곡률은 0이고 그래서 균형이 잡혀있다.

그러면 함수 중에서 직선, 평면처럼 균형 잡힌 함수는 무엇인가? 직선은 길이를 최소로 하고 평면은 넓이를 최소로 하는 것처럼, 함수 중에서 Dirichlet 적분을 최소로 하는 것은 조화함수이다. 그러므로 조화함수는 Dirichlet 적분이라는 functional의 도함수가 0이 된다는, 즉 Euler-Lagrange 방정식인 라플라스 방정식을 만족한다. 조화함수의 예는 물리학에서 많이 찾을 수 있다. 중력장의 위치에너지, 전기장 자기장의 포텐셜은 균형 잡힌 함수이다. 중력장, 전기장, 자기장의 flux(유량)는 어떤 폐곡면에 대해서도 값이 변하지 않는다는 물리적 성질로 인해서 이 함수를 균형이 잡혀있다고 말할 수 있는 것이다.

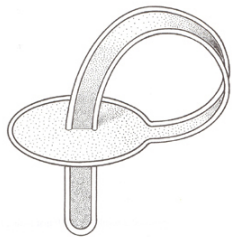
평면이 직선과 다른 점은 평면 위에는 폐곡선이 있다는 것이다. 예를 들어 원은 자신을 포함하는 한 평면을 결정한다. 그런데 어떤 폐곡선은 휘어져있기 때문에 평면위에 놓을 수 없는 경우가 있다. 그러면 휘어진 폐곡선을 포함하는 곡면으로서 평면처럼 균형 잡힌 것은 존재하는가? 이와 관련되어 벨기에의 물리학자 플래토는 1847년 비누막 실험에 관한 연구결과를 발표하였다. 철사를 구부려 조르단 곡선(단순한 닫힌 곡선) C 를 만든 다음 비눗물에 담갔다 꺼내면 비누막이 생기는데 그는 이에 관한 여러 가지 재미있는 실험을 하였다. 이 비누막은 표면장력으로 인해 철사를 경계로 갖는 모든 곡면 중에서 넓이가 최소인(또는 극소인) 것이 된다.

그런데 플래토의 실험에서 중요한 수학적 문제가 제기된다. 과연 모든 폐곡선에 대해 최소넓이의 곡면이 존재할 것인가? 다시 얘기해서 공간에 조르단 곡선 C 가 있을 때 C 를 경계로 갖는 곡면 중에서 가장 넓이가 작은 곡면 Σ 가 존재할 것인가? 이것은 플래토의 문제라고 불리는데 수많은 수학자들이 풀어보려고 시도했

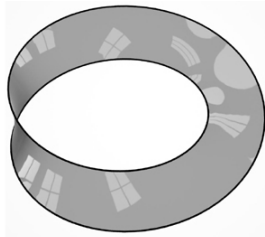
던 문제이다. 이 문제를 두 점을 지나는 직선을 찾을 때와 비슷한 방법으로 접근해 보자. C 를 경계로 갖는 모든 곡면들의 집합에 곡면의 넓이라는 functional을 도입하자. 그러면 이 functional의 도함수는 평균곡률이 된다. 그러므로 최소넓이의 곡면에서는 평균곡률이 어디서나 0이어야 한다(Euler-Lagrange 방정식). 그래서 최소넓이의 곡면은 바로 평면처럼 균형이 완전하게 잡힌 곡면이라고 볼 수 있다. 이런 곡면 Σ 를 극소곡면이라고 부른다. 사실 Σ 의 존재문제는 예상 밖으로 상당히 어려운 것이어서 이 문제가 제기된 후 80여년이 지난 1930년에야 Douglas와 Radó에 의해 독립적으로 풀렸다. 더 일반적인 해법을 제시한 더글러스는 이 업적으로 수학의 첫 필즈메달을 수상하였다.

폐곡선을 경계로 하는 극소곡면의 존재문제가 해결된 후 이 곡면의 성질에 관해서 여러 가지 문제가 제기되었다. 먼저 비누막의 유일성이 관심을 끌었다. 어떤 철사는 두 개 이상의 비누막을 만들어낸다는 사실을 플래토는 이미 실험적으로 보였는데 그러면 과연 딱 한 개의 비누막만 존재하는 철사는 어떠한 것인가? 이에 대해 1973년 니체(Nitsche)는 폐곡선의 전곡률이 4π 보다 작으면 한 개의 극소곡면만 존재함을 보였다. 평면 위 볼록 다각형의 전곡률은 외각의 총합이어서 2π 가 되며, 원의 전곡률도 2π 이다. 그러므로 전곡률이 4π 이라는 것은 굽어진 정도가 원의 두 배라는 것이다.

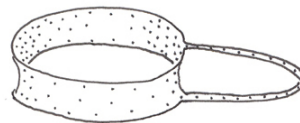
폐곡선으로 만든 극소곡면이 과연 자기 자신과 부딪히는지(self intersection)의 여부도 흥미로운 문제였다. 철사가 매우 구부러졌을 때 생기는 비누막은 보통의 매끄러운 비누막과 달리 철사가 비누막을 뚫고 나오는 경우도 있게 된다. 이 문제는 지난 2002년에야 세 수학자에 의해서 풀렸다[1]. 그들은 철사의 전곡률이 4π 보다 작으면 비누막은 절대로 자기 자신과 부딪히지 않음(embedded 임)을 증명하였다. 그리고 이들은 철사의 전곡률이 3π 보다 작으면 뫼비우스 띠 모양의 비누막이 생길 수 없을 것이라고 예상하였지만 이 문제는 아직 미해결이다. 이보다 어려운 문제로서 철사의 전곡률이 4π 보다 작으면 비누막은 도나쓰의 겉면과 같은 핸들이 없어야한다는 예상이 오래 전에 제기되었는데 이 예상의 해결은 요원한 상태이다.



자신과 부딪히는 비누막 (전곡률 $>4\pi$)



뫼비우스 띠 비누막 (전곡률 $>3\pi$?)

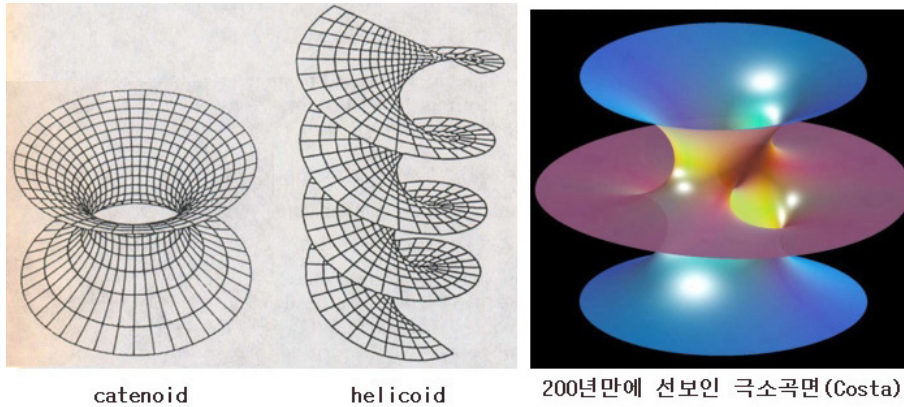


핸들을 가진 비누막 (전곡률 $>4\pi$?)

평면 전체에서 정의된(entire) 조화함수가 유한하다면 그것은 상수함수이어야 한다는 것이 Liouville의 정리이다. 마찬가지로 복소평면에서 정의된 해석적 함수의 절대값이 유한하다면 상수이어야 한다. 이와 비슷한 정리가 극소곡면에도 있

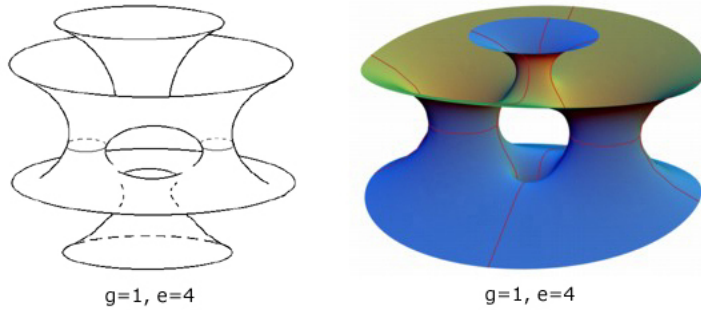
다. n 차원($n \leq 7$) 유클리드 공간에 정의된 함수의 그래프가 극소곡면이라면 이 함수는 선형함수이고 이 극소곡면은 n 차원 평면이어야 한다. n 이 8 이상일 때는 반례가 있다. 이 정리는 Simons가 S^6 의 임의의 극소다양체 Σ 에 대한 $\text{cone } O \rtimes \Sigma$ 는 불안정적이나 S^7 의 극소다양체 $\Sigma : S^3(1/\sqrt{2}) \times S^3(1/\sqrt{2})$ 에 대한 $\text{cone } O \rtimes \Sigma$ 는 안정적이라는 사실을 이용하여 증명하였다[2]. Simons는 이후 르네상스 테크놀로지라는 헤지펀드사를 차려 2008년에는 28억불을 벌어서 세계최고의 개인소득을 기록한 바 있다.

Entire 함수처럼 무한히 뻗을 수 있는 곡면을 완비(complete) 곡면이라고 부른다. 평면은 완비극소곡면이다. 철사를 경계로 갖는 극소곡면 중 일부는 평면처럼 무한히 확장 가능한 완비극소곡면이 있다. 즉 완비극소곡면은 또 다른 평면이라고 볼 수 있다. 완비극소곡면 중 대표적인 것은 Catenoid와 Helicoid이다. Catenoid는 오일러가 처음 발견하였는데 오일러와 라그랑지는 변분법을 창시하며 Euler-Lagrange equation의 첫 보기로서 극소곡면의 편미분방정식을 찾아낸 것이다. Catenoid는 회전곡면인데 현수선(Catenary)을 회전시킨 것이다. 이 극소곡면은 두 평행한 원을 경계로 하는 최소넓이의 비누막이다. 현수선은 무거운 실의 양끝을 고정시켰을 때 실이 축 늘어지며 생기는 곡선이다. 이 곡선은 실의 위치에너지가 최소로 하기 때문에 현수교를 만들 때 이용된다. Helicoid는 수평선을 수직선 따라 들어 올리며 회전시켜서 얻는 곡면인데 건축물에서 자주 보는 회전계단이 바로 Helicoid를 본뜬 것이다. 그런데 재미있는 것은 회전계단을 현수교로부터 만들어낼 수 있다는 것이다. 위치에너지를 최소로 만드는 곡선과 구조적으로 가장 견고한 계단 사이의 오묘한 수학적 관계성을 우리는 복소수함수를 이용하여 찾아낼 수 있다.



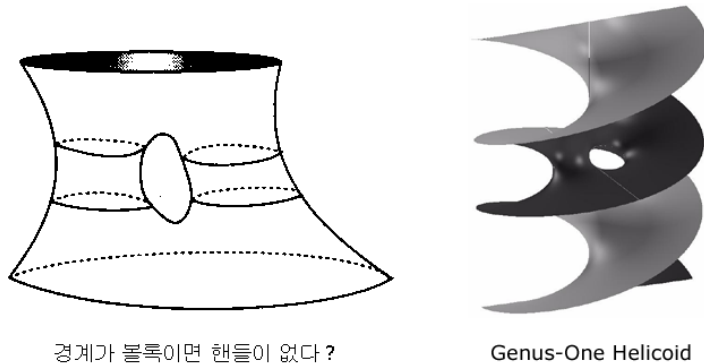
완비극소곡면 중 간단한(embedded이며 유한한 위상을 갖는) 것은 지난 200여년간 평면과 Catenoid와 Helicoid, 세 개만 알려졌었는데 20년 전 브라질의 대학원생 Costa가 핸들(genus)이 한 개이며 무한경계(end)가 세 개인 완비극소곡면을 찾아내어 기하학계에 큰 반향을 일으켰다. 그 이후 터진 붐물처럼 수십 개의 아름다운 완비극소곡면이 발견되었다. 그런데 이 곡면들의 genus g 와 end의 개수 e 사이에는 관계식 $g + 2 \geq e$ 가 항상 성립한다. 그러면 $g + 2 < 2$ 를 만족하는 완비극소

곡면은 존재하지 않는다고 말할 수 있는가? 이 예상은 아직 난해한 문제로 남아있다.



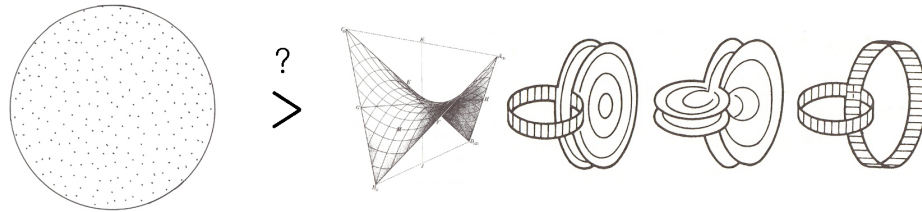
존재하지 않는 완비극소곡면 ?

위에서 언급했듯이 Catenoid는 두 평행한 원을 경계로 갖는다. 이 중 한 원을 평면위에서 조금 움직여도 두 원으로 만들어지는 비누막은 내부가 여전히 무한개의 평행한 원들로 이루어져있다. 이 두 경계 원을 볼록 곡선으로 대체해서 생기는 비누막은 핸들이 없다면 내부가 무한개의 평행한 볼록 곡선으로 이루어져 있다. 극소곡면은 균형이 잡힌 곡면이기 때문에 경계의 볼록성이 내부의 볼록성을 유지케 하는 것이다. 그러면 과연 두 경계곡선이 볼록인 철사는 핸들 있는 비누막을 만들어내지 못할 것인가? 이런 극소곡면은 존재하지 않을 것이라는 예상이 오래 전에 제기됐으나 수많은 사람들의 노력에도 불구하고 지난 30년간 아무도 해결하지 못했다. 한편 2005년에는 Helicoid 모양에 핸들이 하나 있는(genus 1) 극소곡면이 발견되기도 했다[3].



극소곡면에 관해서 정말 오래된 문제는 등주부등식 문제이다. 고대 그리스 시대에 디도 여왕은 평면에서 같은 길이의 폐곡선 중 가장 큰 넓이를 둘러싼 것은 원이라는 사실을 보였었다. 그런데 평면을 일반화한 것이 극소곡면이므로 90년 전에 수학자들은 디도여왕의 문제를 극소곡면 위에서 생각하기 시작하였다. 같은 길이의 철사가 만들어내는 비누막 중에서 가장 큰 넓이를 갖는 것은 원모양의 철

사인가? 이 문제에 대하여 처음으로 긍정적인 결과를 얻은 사람은 1921년 Carleman인데 그는 단순연결인 극소곡면에 대하여 등주부등식을 증명한 것이다. 그 이후 1950년대에 경계가 하나인 극소곡면에 대해, 1980년대에는 경계가 두개인 극소곡면에 대해 증명되었을 뿐이었다. 그런데 2009년 필자와 Schoen은 경계의 개수가 세 개인 극소곡면에 대하여 등주부등식을 증명하였다. 그러나 경계의 개수가 네 개 이상일 경우는 아직 요원하기만 하다. 왜 이렇게 간단히 제기되는 문제가 이다지도 풀기 어려운지 오랫동안 이 문제를 생각해온 필자는 답답하기만 할 따름이다.



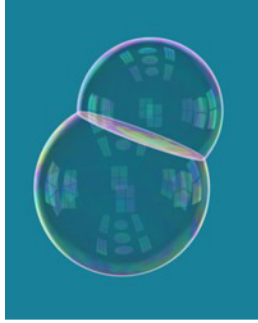
같은 길이의 철사로 만든 비누막 중에서 넓이가 가장 큰 것은 왼쪽의 원일 것인가?

비누막의 넓이는 반드시 최소는 아니고 극소인 경우도 있다. 다시 얘기해서 비누막은 철사를 경계로 하는 모든 곡면 중에서 넓이가 최소일 필요는 없고, 단지 비누막 근처에 있는 곡면들 중에서 넓이가 제일 작기만 하면 된다. 즉 비누막은 조금 변형시키면 넓이가 증가하며 따라서 비누막은 극소넓이를 갖는다. 극소곡면은 단순히 넓이함수의 도함수가 0인 곡면이라고 정의한다면, 비누막은 극소곡면이면서 넓이함수의 이차 도함수가 양수인 곡면이다. 그래서 극소곡면은 균형만 잡힌 곡면이지만 비누막은 균형이 잡혀있을 뿐 아니라 안정적인 곡면인 것이다. 물론 최소넓이의 곡면도 안정적인 극소곡면이다.

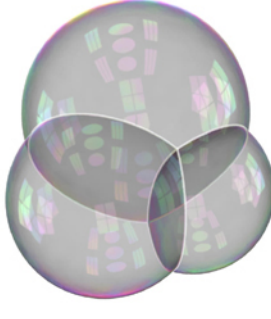
유클리드 공간보다 일반적인 공간인 리만다양체에서도 이러한 최소넓이의 곡면이 존재한다는 것은 어렵지 않게 보일 수 있다. 이 곡면의 안정성으로부터 우리는 리만다양체의 위상, 곡률, 물리적 성질에 관한 소중한 정보를 얻을 수 있다. 예를 들어 삼차원 구면의 diffeomorphism의 고정점 집합은 꼬이지 않았다(unknotted)라는 Smith의 예상, irreducible인 삼차원 리만다양체의 covering space도 irreducible이라는 정리, 양의 스칼라 곡률을 갖는 리만다양체의 위상은 극히 제한적이라는 정리, 양의 sectional curvature를 갖는 Kähler 다양체는 complex projective space와 biholomorphic하다는 Frankel의 예상, 일반상대성 이론에서 우주 공간의 질량과 중력에서 생기는 총 에너지는 양수이어야 한다는 positive mass 정리, 블랙홀의 수학적 존재정리 등을 비롯한 수많은 정리들을 7-80년대에 Schoen과 Yau 등이 안정적인 극소곡면의 존재성을 이용해서 증명하였다.

곡면의 넓이를 무조건 최소로 만드는 문제와 달리, 어떤 조건하에 넓이를 최소로 만드는 문제가 있다. 예를 들어 주어진 부피를 에워싸는 폐곡면 중에서 넓이가 최소인 것을 찾는 문제가 그것이다. 바로 비누방울 같이 동그란 구면이 이 문제의

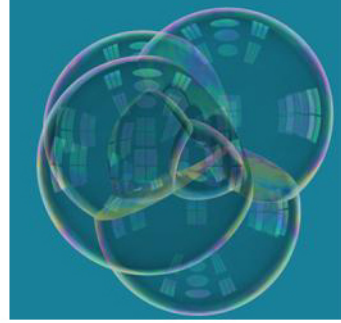
해답이다. 이런 곡면은 주어진 조건 때문에 평균곡률이 상수이어야 한다는 것이 알려져 있다. 이 문제는 170년 전에 풀렸는데, 이보다 일반적인 문제로서 상수평균곡률곡면 중 embedded인 것은 구면 밖에 없다는 정리는 50년 전에 증명되었다. 그런데 어떤 비누방울은 두개 붙어있는 경우가 있다. 두 영역의 부피가 주어졌을 때 두 영역을 함께 에워싸는 곡면 중에서 넓이가 최소인 곡면이 바로 이런 2중 비누방울일 것이다. 2중 비누방울은 세 개의 곡면으로 이루어졌고 이 곡면의 경계에서 서로 120° 의 각도로 만난다. 세 곡면이 각각 동그란 구면의 일부라는 사실은 지난 2002년에야 풀렸다[4]. 그러면 3중, 4중 비누방울도 구면들로 이루어졌을까? 이 문제는 아직 해결되지 않았다. 그러나 5중 비누방울 중에는 동그랗지 않은 것이 존재한다.



2중 비누방울



3중 비누방울 (동그랗까?)



동그랗지 않은 6중 비누방울

조화함수를 일반화 한 것으로 조화사상이란 것이 있다. 리만다양체 (M, g) 에서 (N, h) 로 보내는 사상 u 가 있을 때, u 의 에너지 density $|du|^2 := \text{tr}_g(u^*h)$ 를 정의한 뒤 u 의 에너지 functional $E(u) := \int_M |du|^2 dv_M$ 를 정의한다. 이때 M, N 사이의 함수공간에서 E 의 critical point를 조화사상이라고 부른다. $u : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ 가 조화사상이면 $\mathbb{R}^n$ 의 직교좌표 $x_1, \dots, x_n$ 에 대해 $x_1 \circ u, \dots, x_n \circ u$ 는 M 에서 조화함수이며, $u : M^1 \rightarrow N$ 이 조화사상이면 $u(M)$ 은 N 에서 geodesic이며, $u : M^2 \rightarrow N$ 이 조화사상이고 등각사상이면 $u(M)$ 은 N 에서 극소곡면임이 알려져 있다. 1950년대 Heinz는 단위원 D 에서 복소평면 $\mathbb{C}$ 로 가는 harmonic diffeomorphism이 존재하지 않음을 보였다. 그 이후 역으로 C 에서 쌍곡곡률을 갖는 D 로 가는 harmonic diffeomorphism이 과연 존재하는가 하는 문제가 오래전에 제기되었다. 마침내 2007년 Collin과 Rosenberg는 이 diffeomorphism을 만들어내 사람들을 놀라게 하였다[5]. 그들은 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 에서 minimal graph를 만든 다음 이것을 $\mathbb{H}^2$ 로 정사영 함으로써 조화미분동형사상을 찾아낸 것이다.

$\mathbb{R}^3$ 속에서 알려진 완비극소곡면은 그 수가 적는데 $\mathbb{S}^3$ 속의 극소곡면은 더욱 적은 수만 알려져 있다. 이 중에서 특히 Lawson은 모든 자연수 g 에 대해 g 를 genus로 갖고 embedded인 극소곡면이 존재함을 증명하였다. 이들 중 $g = 1$ 인 것은 Clifford torus라고 부르는 $\mathbb{S}^1(1/\sqrt{2}) \times \mathbb{S}^1(1/\sqrt{2})$ 이다. 여기서 Lawson은 $\mathbb{S}^3$ 의 극소곡면 중 genus가 1이고 embedded인 것은 Clifford torus 밖에 없을 것이라는 예상을 내놓았

다. 이 예상은 40여년간 전혀 진전이 없었다. 그러던 중 2년 전 Kilian과 Schmidt가 Lawson의 예상을 증명하였다고 주장하기 시작하였다[6]. Schmidt는 7-8년 전에 Willmore의 예상을 풀었다고 주장했다가 오류가 발견된 전력이 있어서 사람들은 그들의 주장을 선뜻 받아들이지 않았다. 더구나 두 예상은 같은 방법인 integrable system을 이용해서 증명된 것이다. 그런데 요즘 Kilian과 Schmidt의 증명이 옳다고 믿는 사람들이 점점 늘어나고 있다. Schmidt는 한 술 더 떠 Willmore 예상의 증명을 다시 시도하고 있는 중이라고 한다. Willmore의 예상이란 $\mathbb{R}^3$ 속의 torus T 가 평균곡률 H 를 가지면 $\int_T H^2 dA \geq 2\pi^2$ 가 성립한다는 것이다.

$\mathbb{R}^3$ 의 직교좌표 x_1, x_2, x_3 는 $\mathbb{R}^3$ 의 극소곡면 위에서 조화함수가 된다. 이와 달리 $\mathbb{R}^{n+2}$ 의 직교좌표 $x_1, \dots, x_{n+2}$ 는 $\mathbb{R}^{n+2}$ 속 단위구면 $\mathbb{S}^{n+1}$ 의 극소초곡면 Σ^n 위에서 라플라시안의 고유값 n 인 고유함수가 된다. 과연 이 고유값은 첫 고유값인가? 이에 대해 Yau는 Σ 가 compact embedded이라면 n 이 첫 고유값일 것이라고 30년 전에 예상하였다. 이와 관련되어 Montiel과 Ros는 Yau의 예상이 옳다면 Lawson의 예상도 옳다는 것을 증명하였다. 그런데 2009년 필자와 Soret는 지금까지 알려진 $\mathbb{S}^3$ 속의 모든 극소곡면에 대해 Yau의 예상이 옳음을 증명하였다. 그러나 필자는 현재 $\mathbb{S}^3$ 속에 어떤 극소곡면들을 만들고 있는 중인데, 이 곡면에서는 Yau의 예상이 옳음을 증명하기보다 옳지 않음을 보이는 방향으로 연구를 진행하고 있다.

$\mathbb{R}^3$ 와 $\mathbb{S}^3$ 를 비롯한 리만공간에서 균형 잡히고 아름다운 곡면인 극소곡면은 극소수만 존재한다. 이들은 초야에 묻혀 은거하며 그 고아한 아름다움을 속으로만 발하는 들꽃과 같은 존재이다. 필자는 이 극소곡면을 찾아 리만 공간의 깊은 산속을 거닐고 있다. 그리고 존재하지 않는다고 증명해야 할 극소곡면을 찾아서 논리의 미로를 헤매고 있다.

참고문헌

- [1] T. Ekeland, D. Wiyholtz and B. White, Embeddedness of minimal surfaces with total boundary curvature at most 4π , Ann. of Math. 155 (2002), 109-234.
- [2] J. Simons, Minimal varieties in riemannian manifolds. Ann. of Math. 88 (1968), 62-105.
- [3] M. Weber, D. Hoffman and M. Wolf, An embedded genus-one helicoid. Ann. of Math. 169 (2009), 347-448.
- [4] M. Hutchings, F. Morgan, M. Ritor? and A. Ros, Proof of the double bubble conjecture. Ann. of Math. 155 (2002), 459-489.
- [5] P. Collin and H. Rosenberg, Construction of harmonic diffeomorphisms and minimal graphs, <http://lanl.arxiv.org/abs/math.DG/0701547v1>, to appear in Ann. of Math.
- [6] M. Kilian and M.U. Schmidt, On the moduli of constant mean curvature cylin-

ders of finite type in the 3-sphere, <http://arxiv.org/abs/0712.0108>

〈대한수학회 소식 2010년 1월호 ‘수학계의 최근동향’란 게재〉