

홍콩 수학경시대회 항룡수학장(恒隆數學獎) 참관기

최재경 (고등과학원)

바야흐로 서세동점(西勢東漸)이 시작되고 있었다. 1839년 청나라는 영국과 벌인 아편전쟁에서 패해 홍콩을 영국에 빼앗겼다. 제국주의적 힘의 논리에 무력한 중국이 무릎을 꿇은 것이다. 그러나 155년 동안 홍콩에 영국식 교육 시스템을 도입하며 빅토리아 문화를 이식해온 영국은 1997년 중국에 홍콩을 돌려주었다. 그 이후 중국은 홍콩에 일국양제(一國兩制)의 제도를 도입하며 홍콩의 자치권을 보장했으나 최근에 중국과 홍콩 사이에는 민주주의에 관한 입장의 차이로 약간의 정치적인 마찰이 있다.

2014년 12월 필자는 항룡수학장(恒隆數學獎, Hang Lung Mathematics Awards)이라는 홍콩의 수학경시대회를 심사하기 위해 홍콩을 방문하였다. 항룡수학장은 홍콩의 부동산 재벌 항룡지산(恒隆地產, Hang Lung Properties)의 총수 진계중(陳啓宗, Ronnie C. Chan)의 재정적인 지원을 받아 홍콩 출신의 하버드대학교 수학교수 Shing-Tung Yau가 2004년에 시작한 수학경시대회이다. 매 2년마다 열려서 2014년에는 6회째 열린 것이다. Yau는 이를이라는 짧은 시간에 문제를

풀어서 경쟁하는 국제수학올림피아드(IMO)에 한계가 있다고 생각하여, 몇 달에 걸쳐 학생들이 수학 문제를 연구한 뒤 그 결과를 제출하는 수학경시대회를 만들고자 항룡수학장을 시작한 것이다.

이번 항룡수학장에는 인구 700만 명인 홍콩에서 42개의 중·고등학교가 총 200여 명의 68개 팀을 보내서 학생들의 수학 실력을 겨뤘다. 지난 8월 말에 제출한 학생들의 연구결과를 3명의 수학교수로 이뤄진 Screening Panel에서 전문적인 평가를 하였다. 그리고 15명으로 이뤄진 Scientific Committee가 이들의 평을 참조하고 학생들의 연구 결과를 직접 읽어서 40개의 팀 중에서 15개의 팀을 on-line으로 선발하였다. 이 15개의 팀이 12월 10일, 20분씩 직접 발표하는 것을 심사하여 Scientific Committee에서 최종 수상자를 선정하였다. Scientific Committee 위원 15명 중 7명은 미국과 유럽인, 7명은 홍콩인, 그리고 필자로 구성됐다. 그날 8시간 동안 15개 팀의 발표를 듣고 질문하며 심사가 진행되었는데, 필자는 홍콩 중·고교생들의 독창성과 수학 연구 내용의 깊이에 충격을 받았다.



Scientific Committee 심사 도중



(사진 왼쪽부터) 심사위원 Mark Stern, John Lee, Ingrid Daubechies 교수와 필자



금상을 받은 방욱윤(方鈺倫) 군과 지도교사

1위를 하여 금상을 받은 팀은 고2 학생 방욱윤 군 혼자 만으로 이루어진 팀인데 방 군의 연구 제목은 “Investigation of the Erdős–Straus Conjecture” 이다. 임의의 자연수 $n \geq 2$ 에 대해 $\frac{4}{n} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$ 를 만족하는 자연수 k_1, k_2, k_3 가 존재한다는 것이 이 예상이다. 방 군은 72쪽에 이르는 긴 논문에서

우선 삼각형의 내접원의 반지름 r 과 세 외접원의 반지름 x, y, z 는 $\frac{1}{r} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ 을 만족함을 보였다. 그리고 이 기하학적 성질을 이용하여 Erdős–Straus 예상이 성립하는 10가지 경우를 찾아내었는데, 예를 들면 $n \equiv 1, 3 \pmod{4}$ 일 때 예상이 옳음을 보였다. 방 군은 1년 반 동안 Erdős–Straus 예상에 대해 연구하여 논문을 썼다고 한다.

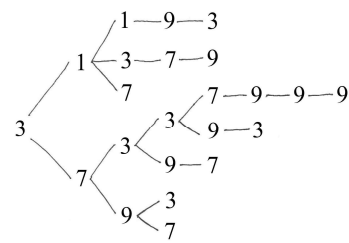
은상을 받은 팀은 Yau 교수의 모교 배정중학(培正中學)에 재학 중인 두 고교생인데 그들의 연구 제목은 “Pseudo Pythagorean Triples for Perpendicular Median Triangles”이다. 32쪽의 논문에서 이들은 삼각형의 꼭짓점에서 맞변의 중점에 이르는 중선 두 개가 서로 수직이기 위한 필요충분조건은 세 변의 길이가 a, b, c 이고 c 가 제일 짧을 때 $a^2 + b^2 = 5c^2$ 임을 우선 증명하였다. 그리고 이들은 기초적인 정수론 논리를 써서 이 디오판투스 방정식을 만족하는 모든 자연수해를 구하였는데 (예를 들어,

$a = 2m^2 + 2mn - 2n^2, b = n^2 + 4mn - m^2, c = m^2 + n^2$) 그 증명은 매우 정교하였다. 이 학생들은 맞변을 $t:1$ 로 내분하는 선 두 개가 서로 직교하기 위한 디오판투스 방정식 $a^2 + b^2 = (2t^2 + 2t + 1)c^2$ 을 푸는 더욱 일반적인 문제도 해결하였다.

동상은 네 명의 고2 학생으로 이루어진 팀이 받았는데 이들의 35쪽 논문의 연구 제목은 “Probability, Matrices, Colouring and Hypergraphs” 이다. 이 학생들은 1년 동안 확률론과 그래프 이론을 배운 뒤 $n \times n$ 행렬에서 기존에 알려진 사실들을 $n \times n \times n$ 큐브로 확장하였다. 예를 들어 $n \times n \times n$ 큐브의 각 성분에 $1, 2, \dots, n$ 을 각각 n^2 번씩 적을 때 $\sqrt[3]{n}$ 개 이상의 다른 수가 적힌 행/열/aisle이 적어도 하나 존재한다는 정리를 증명하였다. 그리고 edge의 개수가 $\frac{4^{n-1}}{3^n}$ 보다 작은 hypergraph의 vertex를 4개의 색으로 칠할 때 모든 edge가 4가지 색의 vertex를 모두 가지도록 칠할 수 있다고 보였다.

동상 아래인 장려상은 5개 팀이 받았다. 이 중에서 소수 분류 문제로 장려상을 받은 한 팀은 4명의 학생으로 이루어졌는데 중1 두 명, 중3과 고1 한 명씩으로 가장 어린 팀이었다. 그들이 3달 동안 연구하여 쓴 25쪽 논문의 제목은 “Classification of Prime Numbers by Prime Number Trees”이다. 소수 중에는 끝에 1, 3, 7, 9를 덧붙여도 소수가 되는 경우가 있다. 예를 들어 3에 1, 7을 덧붙인 수 31과 37은 여전히 소수이다. 이들에 다시 1, 3, 7, 9를 덧붙이면 311, 313, 317, 373, 379라는 소수가 생긴다. 이런 작업을 더 이상 소수가 만들어질 수 없을 때까지 계속 하면 <그림 1>과 같은 tree 구조를 얻게 된다.

이 학생들은 모든 소수는 꼭 하나의 prime number tree에 속한다고 증명하였다. Prime number tree 중에는 89, 107, 167, 251 같이 단 하나의



<그림 1> 3의 Prime Number Tree

소수로만 구성된 것들도 있다. 이들은 모든 prime number tree가 유한개의 소수로만 이루어졌을 것이라고 예상하였으나 이것을 증명하지는 못했다. 그러나 이 예상이 2진법의 수와 3진법의 수에서 성립한다는 사실은 증명하였다. 필자는 어린 나이의 학생들이 이런 문제를 생각해내는 독창성에 감동을 받았다. 그래서 이 팀에게 동상을 적극 추천하였으나 금상, 은상을 이미 정수론의 논문에 주었다는 이유로 인해 뜻을 이루지 못하였다.



Prime Number Tree를 설명하는 장려상 받은 팀과 Scientific Committee의 심사인들



(사진 왼쪽부터) 필자, ‘홀수 배수 판정법’으로 장려상을 받은 학생들의 학교 교장, 지도교사, 학생들과 Yau 교수

장려상을 받은 다른 팀은 5명의 학생으로 이뤄졌는데 4달 동안 연구하여 “A General Formula to Check the Divisibility by All Odd Divisors and its Extensions”라는 제목의 46쪽 논문을 썼다. 2, 3, 5, 9로 나뉘는 수를 판별하는 방법은 잘 알려져 있다. 그러면 7, 13, 19로 나눌 수 있는 수의 판정법은 무엇인가? 이 팀의 학생들은 모든 홀수 배수의 판정법을 다음과 같이 찾아냈다. 끝자리 수가 N 이고 그 앞자리 수가 M 인 수가 끝자리 수가 1인 홀수 D 의 배수이기 위해서는 $M+(-3)N$ 이 D 의 배수이어야 한다. 이 판정법을 다시 $M+(-3)N$ 에 적용할 수 있다. 예를 들어 20832가 31로 나뉘는가를 보자면

$$\begin{cases} 2083+2 \times (-3) = 2077 \\ 207+7 \times (-3) = 186 \\ 18+6 \times (-3) = 0 \end{cases} \text{이므로 31로 나뉘짐을 알}$$

수 있다. 1자리 수가 1인 모든 홀수의 배수판정법은 -3 을 이용한다. -3 을 1자리가 1인 수의 code라고 이 학생들은 부른다. 이렇게 1자리가 3, 7, 9인 홀수의 code는 각각 16, -14 , 6임을 이들은 보였다. 이들은 또한 끝의 두 자리수와 그 앞 자리수를 이용한 배수판정법에서는 code가 한 자리 code의 제곱임을 보였다. 즉, 이 경우 1, 3, 7, 9로 끝나는 홀수의 배수판정법의 code는 $(-3)^2$, 16^2 , $(-14)^2$, 6^2 이라는 것이다. 그러므로 208537이 31로 나뉘는가를 보자면 끝의 두 자리를 잘라내서 $\begin{cases} 2085+37 \times 9 = 2418 \\ 24+18 \times 9 = 186 \end{cases}$ 이다. 186이 31로 나뉘므로 208537도 나뉘는 것이다. 재미있는 것은 이 학생들이 배수판정법을 분석하는 과정에서 “몫”도 구할 수 있음을 발견한 것이다. 예를 들어 146969가 47로 나뉘는가를 판정할 때 code는 14인데, 배수판정법 과정에서 몫이 3127이라고 찾는 방법도 알아낸 것이다. 이 방법은 직접 나눗셈을 하여 몫을 구하는 것보다 조금은 빠르다고 한다.

작도방법에 관한 연구로 장려상을 받은 팀이 있었다. 이 팀은 5명으로 이루어졌는데 “On the Geometric Construction of Triangles and the

Algebraic Interpretation of the Notion of Constructibility”라는 제목으로 89쪽의 가장 긴 논문을 제출하였다. 이 학생들은 삼각형에서 변의 길이, 꼭짓점의 각도, 중선의 길이, 각2등분선의 길이, 수선의 길이에 대한 정보 중에서 3가지 정보가 주어졌을 때 자와 컴퍼스로 그 삼각형을 작도하는 방법을 일일이 찾아내었다. 3가지 정보가 주어지는 경우 모두 52가지의 서로 다른 삼각형이 존재하는데, 이 중에서 10가지는 작도불가능임을 보였고, 42가지는 작도방법을 보였다. 그 중에서 2가지 작도법은 이미 잘 알려진 것인데 예를 들면 세 변의 길이가 주어졌을 때와 세 수선의 길이가 주어졌을 때이다. 이들이 찾아낸 작도법 중에서 가장 복잡한 것은 삼각형 ABC 에서 꼭짓점 B 의 각도가 주어지고 꼭짓점 A, C 에서의 두 중선의 길이가 주어졌을 때 삼각형 ABC 를 작도하는 방법이다. 이들이 작도불가능을 보일 때 이용한 것은 대수학에서 나오는 정리, “작도가 가능한 수의 유리수체에 관한 차수는 2”이다라는 정리이다. 이 정리를 써서 두 변의 길이와 한 각2등분선의 길이가 주어진 삼각형은 3차 방정식을 풀어야 하므로 자와 컴퍼스로 작도불가능하다고 보였다.

나머지 두 장려상은 각각 “Two Methods for Investigating the Generalized Tic-Tac-Toe”와 “The Application of Graph Theory to Sudoku”라는 제목의 논문을 쓴 팀(유일한 고3 팀)이 받았는데, Tic-Tac-Toe game을 일반화한 (m, n, k, p, q) game을 풀기 위해 게임이론을 썼고, Sudoku 문제를 그래프 이론의 chromatic polynomial을 이용해서 풀었다.

이상 수상자들의 연구는 매우 놀라운 수준이었다. 필자는 처음 이들의 논문을 읽으며 믿어지지 않아 각 팀을 지도하는 지도교사가 많이 도와줬기 때문일 것이라고 짐작했었다. 그래서 심사도중 학생들에게 지도교사가 얼마만큼 도와줬냐고 직접 일일이 물어보았다. 학생들의 답은 내 짐작과 달랐다. 지도교사는 학생들이 문제를 스스로 찾

직접 해결하게 내버려두고 가끔 학생들이 원하면 한마디 해주는 정도의 도움만 줬다고 학생들이 말했다. 금상 수상자는 원래 완전수에 관심이 있었으나 지도교사의 소개로 Erdős-Straus 예상을 연구하게 됐다고 한다. 그리고 지도교사는 Excel 쓰는 방법과 몇 가지 특수해 구하는 작업만 도와줬다고 한다. 홀수 배수 판정법으로 장려상을 받은 팀은 지도교사가 Fermat's Little Theorem을 가르쳐주기만 했다고 한다. Generalized Tic-Tac-Toe 문제로 장려상을 받은 팀은 지도교사가 pairing strategy를 가르쳐줬다고 한다.

금상 팀은 3,550만원의 상금을 받는다. 지도교사는 710만원을 받고 출신학교는 1,420만원의 발전기금을 받는다. 그리고 출신학교의 한 교사가 홍콩중문대학교 석사과정을 다니도록 학비를 지원 받는다. 은상, 동상, 장려상으로 한 단계 내려갈 때마다 이 상금은 반으로 줄어든다. 향룽지산이 향룽수학장으로 매회 지출하는 비용은 4억7천만 원이라고 한다. 심사 후 간담회에서 필자가 한국에서는 수학경시대회에 이렇게 지원할 회사는 없을 것이라고 말했다. 그랬더니 심사위원 중 하나인 Ingrid Daubechies 전 국제수학연맹 회장(지난 여름 서울 ICM에 참석)이 “삼성 같은 회사가 쉽게 지원할 수 있지 않겠냐”고 해서 내가 “한 번쯤 지원은 해도 이렇게 2년마다 열성적으로 지원하지는 않을 것이다”고 말했다. 그랬더니 향룽지산의 진계종 총수가 말하길 “아시아에서 회사가 사회에 가장 적게 기부하는 두 나라가 있는데 그게 바로 한국과 일본이다”는 것이었다.

심사일 다음날 시상식이 있었다. 300여 명이 함께 점심식사를 하며 진행된 시상식에는 1957년 노벨 물리학상을 받은 92살의 C.N. Yang이 젊은 아내를 동반하고 참석하여 자리를 빛냈다. 진계종 총수는 시상식 연설에서 자기가 다시 태어난다면 수학자나 과학자가 될 것이라고 말해 주위사람을 의아하게 했고 다음날 신문에서도 이에 관한 기사가 났다. 자기는 Yau 보다 재산이 많을지 몰라도 지적인 부(富)는 적다고 말하며 학생들에게 독려하

길 사업가가 되는 것보다 수학자나 과학자가 되는 것이 사회에 더 큰 공헌을 하게 된다고 강조하였다. Yau는 시상식에서 연설하길 중국 학생이 미국 학생보다 수학을 잘한다고 흔히들 말하지만 그것은 오해라며, 이번 향룽수학장의 수상자보다 수학을 잘하는 학생이 미국에는 많다고 말하였다. 한테 Yau 자신도 경시대회에 떨어진 적이 있다며 이번엔 상을 받지 못한 학생들에게 격려의 말을 잊지 않았다.



시상식장



향룽지산 진계종 총수와 Mirrlees 교수

11명으로 구성된 향룽수학장 Steering Committee의 위원장인 1996년 노벨 경제학상 수상자 James A. Mirrlees 교수(케임브리지대학교)에게 간담회에서 필자는 질문하였다. “식민지 말레이시아에 대해 영국은 가혹하게 대했는데 왜 홍콩에서는 관대한 정책을 폈느냐”고 물었더니 그는 답을 잘 모르겠다고 하며 Yau에게 대신 묻는 것이었다. “중국이 공산화 된 이후 학정을 피해 많은 중국인들이 홍콩으로 피난 내려왔는데 그들 중에 지식인들이 많

있고 수준 높은 삶을 살려는 의지가 강해 영국정부도 그에 따른 정책을 폈으리라”는 것이 Yau의 답이었다. 영국 에든버러 출신이라는 Mirrlees에게 다시 “David Hume(철학자), Adam Smith(경제학자), James Hutton(지질학자), Joseph Black(화학자)과 같은 저명학자들이 18세기 후반에 에든버러라는 도시에 쏟아져 나와 활동하게 된 이유가 무엇이나”고 물었더니 그의 대답은 “그 당시 스코틀랜드 장로교회가 시민들의 교육에 힘썼기 때문”이라고 했다.

필자는 이번 항룽수학장 수학경시대회에 심사위원으로 참여하며 홍콩 중·고등학생들의 수학 수준에 깊은 감명을 받았다. 연구 문제를 스스로 찾아내는 독창성, 문제 풀이 능력, 유창한 영어 발표 능력, 지도교사들의 수준 높은 교육이 매우 인상적이었다. 그리고 홍콩의 수학 수준을 제고시키기 위해 의기투합한 동갑내기 두 친구 Yau와 진계중 총수는 다른 나라에서 찾아보기 힘든 단짝이다.

또한 Yau, Siu, Mok, Li 같은 세계적인 수학자들도 홍콩은 배출했다. 홍콩에서 어찌하여 이런 현상이 가능할까? 필자는 곰곰이 생각해 보았다. 그리고 내린 결론은 영국의 우수한 교육제도와 선진국 경영 know-how가 홍콩에 오래 전부터 뿌리내렸기 때문이라라는 것이다.

항룽수학장 수상식이 열리던 때 그곳에서 300미터 떨어진 홍콩금융 중심지에서는 경찰과 테모 참가자의 충돌이 있었다. 행정장관선거에 대한 중국정부의 방침에 항의하는 시민 불복종 운동으로 테모대가 75일 동안 농성 중이었는데 마침내 이날 경찰이 해산시키며 200여 명을 체포하였다. 선진국 수준의 경제와 우수한 교육제도를 갖춘 세계적 美港의 홍콩이 민주화 문제로 시련을 겪고 있다는 것은 역사의 아이러니이다.

▶ 항룽수학장 홈페이지:

<https://hlma.math.cuhk.edu.hk/index.php>



KMS