거울대칭, 그리고 곡선 세기

글 _ 김범식
고등과학원 수학부 교수

쌍대 대칭성

거울대칭 이론은 쌍대 대칭성(duality) 중의 하나이다. 수학과 초끈이론의 한 분야로서, 지금도 이 두 학문 간에 아이디어들을 주고받으며 빠르게 발전하고 있다. 하지만, 이 분야의 수학적 정체성이 확립될 날은 멀다고 할 수 있다. 거울대칭은 아직 발견되지 않은 어떤 수학의 파생 현상이기 때문이다. 좁은 의미의 거울대칭도 이러한 현상 모임의 일부분을 차지한다고도 할 수가 있다. 이 원고에서, 거울대칭은 확장 진행형으로서, 넓고 수학적 의미로서 지칭됨을 밝힌다.

수학이 추구하는 것 중 하나가 대칭성이다. 하지만 언뜻 보이지 않던 대칭성도 좀 더 큰 틀 입장에서 보면 성립하는 예들이 많다. 다항식의 실근을 보자. 복소수체로 확장하면 대칭성이 보이고 일반적인 규칙인 '근의 존재성' 이 성립하며, 실근은 복소수근 중에서 켤레 사상의 고정되는 근으로 보는 관점으로 연구할 수 있다. 물론 과학자들은, 각자의 연구 분야에 여러 틀, 관점들을 갖고 싶어 한다. 너무 작아 이용범위에 한계가 있는, 너무 커서 특수한 경우들에 대해서 알려주는 바가 없는 것이 아닌, 각각의 질문에 맞는 틀을 갖고 위아래로 나아간다. 여기서 위란 상대적으로 큰 틀을 향하는 것이며, 아래는 특수한 경우들을 상대적으로 작은 틀로 보고자 하는 방향이다. 현대 물리학이, 옛 친구였던 수학에게 시사해 주는 아주 큰 틀은 '양자 보정(Quantum Correction)을 고려하면, 더 많은 대칭성이 가능하다' 는 것이다. 거울대칭이 바로 그 예다.

개요

거울대칭의 기원은 N=2 Super Conformal Field Theory (SCFT)[1]에서 비롯된다고 한다. 필자가 초끈이론을 전혀 이해하지 못하여서 위 문장이 뜻하는 바를 모르지만, 거울대칭 역사 및 앞으로의 발전에 있어서 가장 중요한 요소와 지향될 방향의 하나가 SCFT의 수학적인 이해가 아닌가 싶어 약간의 설명을 시도해 본다. 수학적으로 보면 매우 불명확한 모호한 이야기일 것이다. 다시 말하지만, 이러한 이유는, 아직까지 SCFT를 지탱해주는 엄밀한 수학[2]은 완성되어 있지 않고, SCFT와 관련되어 있는 수학들이 고전 수학을 비롯하여 근래에 발견된 것들이라 생소한 면도 있고 광범위하여, 필자의 제한된 능력으로는 이들을 제대로 이해하지 못한 탓이다.

SCFT들의 모임 즉, SCFT의 모듈라이 공간 M에서 Topological Conformal Field Theory로 가는 사상이 두 개 있다고 한다. A-모델 사상 a 와 B-모델 사상 b이다. 그리고 Mirror Map m은 M의 involution으로서 $a \circ m = b$를 만족하여 A-모델을 B-모델로 바꾸어 준다.

데이터 (X, I, $\beta + i\omega$)를 생각해보자. 단 여기서 X는 대수적 Calabi-Yau 다양체[3]이고 I는 복소 구조이며, $\beta + i\omega \in H^2(X, C)$로서 복소수를 계수로 하는 2차 코호몰로지 원소이다. 이 데이터에서 N=2 SCFT 한 개를 비선형 시그마 모델(nonlinear sigma model)을 이용하여 구성할 수가 있다. 수학적으로 관심이 있는 TCFT인 시그마 모델을 A 비틀림(twist) 또는 B 비틀림을 함으로써 얻게 된다. 그림 1과 같이, A 비틀림을 하면 사교(symplectic) 다양체 (X, ω)에서 구현되는 여러 가지 수학들이 되고 B 비틀림을 하면 대수적 복소 다양체 (X, I) 상에서 구현되는 여러 가지 수학들이 된다.

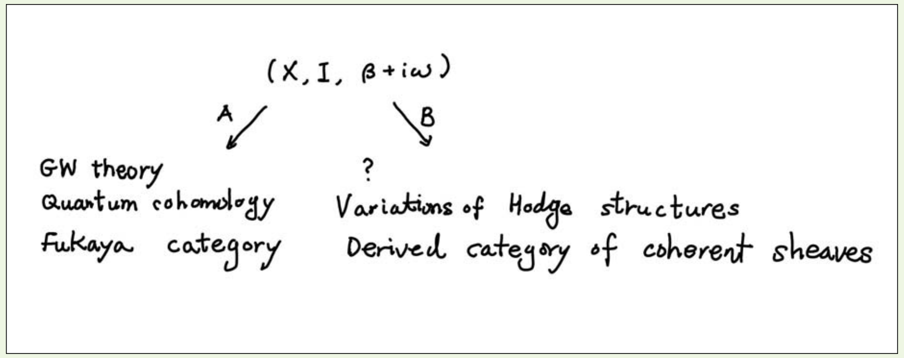

그림 1

1) 수학적으로는 각 SCFT는 한 Calabi-Yau A^{∞}-범주에 대응된다.
2) 뉴턴의 고전역학의 수학 기저가 미적분학이고, 아인슈타인의 상대성이론의 수학 기저가 리만기하학이듯이, SCFT의 기저가 되는 수학이 발견될 것이다.
3) Calabi-Yau 다양체에서만 국한하였는데, 사실, 현상에 따라서는 그 범위가 더 넓어진다. 예를 들면 Gromov-Witten 이론은 모든 매끄러운 대수적 사영 다양체 내지 옹골찬 사교 다양체에서 정의가 된다.

새로 탄생된 수학 분야들

거울대칭에서 파생된 새로운 수학 분야들을 보자. 수학 분야를 분류하는 Mathematical Subject Classification이 있다. 이 분류표의 1991년 버전에 없지만, 2010년 버전에 나와 있는, 거울대칭의 직접적인 파생 분야로 추가된 것은 다음과 같다.

11G42: Arithmetic mirror symmetry
14J33: Mirror symmetry
14N35: Gromov-Witten invariants, quantum cohomology, Gopakumar-Vafa invariants, Donaldson-Thomas invariants
53D37: Mirror symmetry, symplectic aspects; homological mirror symmetry; Fukaya category
53D45: Gromov-Witten invariants, quantum cohomology, Frobenius manifolds
55N32: Orbifold cohomology
55P50: String topology

거울대칭이 동기가 되어, 새로 발견된 분야이거나 또는 비약적인 발전을 하고 있는 기존 분야를 몇몇 열거해 본다.

18E30 Derived categories, triangulated categories
14A22 Noncommutative algebraic geometry
14D20 Algebraic moduli problems, moduli of vector bundles
14E18 Arcs and motivic integration
14T05 Tropical geometry
53D40 Floer homology and cohomology, symplectic aspects
53D42 Symplectic field theory; contact homology
81T45 Topological field theories

1990년대에는 거울대칭 파생 분야들의 무척 큰 관심에 우려되는 측면들도 있었으나, 지난 15년간의 발전들은 그것이 기우였음을 위에서 나열한 분야들이 보여주고 있다. 2010년대에도 계속적으로 흥미롭게 지평을 넓혀 나갈 것으로 확실시 된다. 고전적 거울대칭의 설명을 시작으로, 앞으로 나아갈 방향을 생각하며 필자가 연구해온 분야를 중심에 두고, 현재의 관점에서 좀 더 자세한 이야기를 전개하겠다.

고전적 거울대칭

범주적(Categorical) 입장에서의 접근법인 Kontsevich의 호몰로지컬 거울대칭 이론, 기하학적 입장의 접근법인 Strominger-Yau-Zaslow 가설 등은 조철현 교수의 글을 보기 바란다.

그로모프-위튼 이론

1990년대 초반 거울대칭 이론이 수학자들에게 지대한 관심을 끌기 시작한 이래 가장 잘 정돈된 새로운 분야라 하면 그로모프-위튼 이론이 아닌가 싶다. 일반적으로 옹골찬 사교 다양체에 그로모프-위튼 불변량들을 정의할 수가 있는데, 이를 복소 사영 다양체 X인 경우에 국한하여 다루어 보자. 점 입자가 다양체에서 시간에 따라 움직인 궤적을 생각하듯이, 끈의 시간적 궤적을 보면 실 2차원 곡면이 되는데, 어떤 작용의 극소는 그 곡면이 다양체 안에서 리만 곡면이 될 때이다. X안에 있는 이러한 리만 곡면들의 모임 $M(X)$을 생각해 보자. $C\subset X$가 이 모임 $M(X)$의 한 점이라 할 때, 이 점에서 $M(X)$의 접평면은 $H^0(C, N_{C/X})$이 된다. 이 코호몰로지의 다음 차수인 $H^1(C, N_{C/X})$가 Obstruction 공간이 되는데, C가 복소 1차원인 관계로 다른 모든 차수의 코호몰로지는 0이기 때문에 벡터 다발 $N_{C/X}$의 오일러 표수 (Euler characteristic) $\chi(C, N_{C/X})=\dim H^0(C, N_{C/X})-\dim H^1(C, N_{C/X})$은 Riemann-Roch의 정리에 의하여 위상적 지수(index)로 표현이 된다. 이 위상적 지수는 정확히 C의 종수 g, X의 first Chern class, 그리고 $C\subset X$ 표현하는 호몰로지 클래스 $[C\subset X]=\beta\in H_2(X)$에 의하여 결정되는데[4], 이를 이용하여 $M(X)=\coprod_{g,\beta} M_g(X,\beta)$로 쓸 수가 있다. 그런데 $M_g(X,\beta)$는 일반적으로 매끄러운 다양체도 아니고, $M_g(X,\beta)$의 콤포넌트가 여러 개이기도 하고, 이들 콤포넌트의 차원도 일정하지도 않다. 하지만 가상적 의미에서, $\chi(C, N_{C/X})$차원의 매끄러운 다양체[5]로 행동하는 것이 알려져 있다. 이를 이용하여 체계적이고 의미가 있는 불변량을 정의하고자 한다. 이를 위해 $M(X)$의 가상적으로 매끄러움을 유지하되 옹골찬 공간이

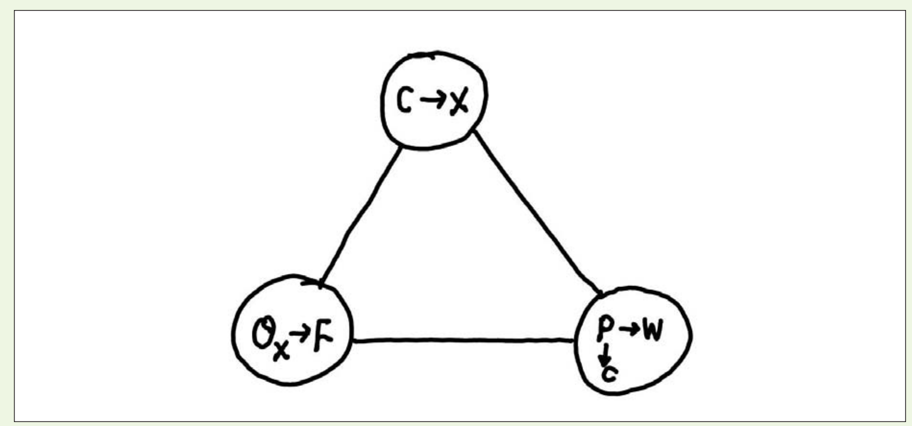

그림 2. 리만 곡면과 사상

4) $\chi(C, N_{C/X})=\langle c_1(T_X), [C]\rangle+(1-g)(\dim X-3)$
5) 가상적으로 매끄럽다는 개념은 GW 이론 연구에서 파생된 가장 유용한 개념 중의 하나로서, Kontsevich가 숨겨진 매끄러움(hidden smoothness)을 찾고자 하는 시도로부터 잉태되었다. 대수 기하적 방식, 사교 기하적 방식, 그리고 Derived Geomety 방식이 있다. 대수 기하적 방식으로는, Jun Li 와 Gang Tian 그룹과 Kai Behrend 와 Barbara Fantechi 그룹이 그 해결을 제시하였다. Derived Geometry 방식은 Ciocan-Fontanine, Kapranov 그룹이 해결하였다. 어느 공간 (varieties, schemes, stacks) M 이든지, 어느 한 점을 잡아 그 점 근방 (open neighborhood) U_p은 그 점의 접공간 (tangent space) T_p에 임베딩 할 수가 있다. U_p가 T_p의 부분공간으로서 만족되는 식들이 r개의 식들로 생성될 때, r-차원 복소 벡터공간 Ob_p를 obstruction 공간이라 부른다. U_p는 r개의 식으로 표현되는데, 이 r개의 식을 일반적으로 변형하여 그 식들이 정의하는 부분 다양체는 호몰로지 클래스로서는 잘 정의가 되었다. 점을 이동시키면서 생성되는 이러한 클래스들을 붙인 것을 가상적 기본류 (virtual fundamental class)라 하는데 이 기본류는 $H_{2\chi(c,N_{c/X})}(M,Q)$의 원소이다.

필요하다. 가상적 매끄러운 옹골화는 현재까지 다음 세 가지 방식이 알려져 있다.

* 사상적 (map 또는 string theoretic) 관점[6]: 가상적으로 매끄러운 옹골화의 첫 해로 Kontsevich (1998년 필즈상 수상자)가 제안한 $\overline{M}(X)=\{[f, C]: f: C\to X\}$가 있다. 여기서 f는 복소 정칙사상이고 C는 복소 곡선으로서 nodal singularity를 허용한다. 공간 $\overline{M}(X)$의 원소를 안정사상이라 부르자.

* 게이지적 (sheaf 또는 gauge theoretic) 관점: X가 3차원 복소 Calabi-Yau 다양체라 할 때, Hilbert Scheme을 이용한 방법으로 Thomas가 제안한 사영 대수 다양체 $DT(X)=\{I\subset O_X\}$로서의 가상적 매끄러운 옹골화이다. 단 여기서 I는 X의 ideal sheaves of 1 dimensional schemes (may not be pure dimensional)이며, 이 옹골화를 이용하여 얻어진 불변량을 Donaldson-Thomas 불변량이라 한다. 또 다른 방법은 Pandharipande와 Thomas가 제안한 PT 모듈라이 공간 $PT(X)=\{[O_X\to F]\}$로서, 단 여기서 F는 1차원 순수 층(pure sheaf)이고 $O_X\to F$의 공핵(Coker)은 0-차원이다. 이 공간이 주는 불변량을 PT 불변량이라 한다.

* 게이지 사상적 (gauged map theoretic) 관점: 다양체 X가 GIT quotient $W/\!/_{\chi}G$로 표현된다고 하자. 단 여기서 W는 국소적 완전 교차(LCI) 특이점만 허용되는 대수적 아핀 다양체라 하자. 예를 들면 5차 초곡면 Calabi-Yau 3-다양체를 포함하는, 모든 매끄러운 토릭 완전 교차 다양체가 이러한 형태로 표현이 된다. X가 이러한 경우에, C에서 X로 가는 사상을 데이터(C, P, u)로 재해석이 가능하다. 여기서 P는 C위에서 principal G-bundle이고 u는 P에서 W의 안정궤적(stable locus)으로 가는 G-equivariant 사상이다. u의 상(image)이 유한 점 위에서(nongenerically) W의 불안정궤적(unstable locus)을 치는 것도 허용하여 가상적으로 매끄러운 옹골화 $QMap(X)=\{[C, P, u]\}$가 가능함이 밝혀졌다. 이러한 사실은 Ciocan-Fontanine, Maulik, 그리고 필자와의 공동연구에서 최근 얻어진 결과이다. 공간 $QMap(X)$의 원소를 안정준사상(quasimap)이라 부르자.

각각의 옹골화들은 장점들이 있는데, 안정사상 옹골화는 모든 사영 복소 다양체에서 성립되며, 종수가 0인 경우엔, 양자 코호몰리지 $QH^*(X)$를 정의하게 한다. 양자 코호몰리지는 보통의 코호몰로지 환 $H^*(X)$의 변형(a family of deformation)이며, 거울사상에서 쓰이는 평탄(flat) 좌표들(coordinates)을 정의할 수 있게 한다.

고전적 거울대칭 예상은 다음과 같다고 할 수 있다. X가 Calabi-Yau 다양체일 때, 또 다른 Calabi-Yau 다양체 $X^\vee$가 있어서 이 다양체의 복소구조 변화에 따른 호지구조의 변화를 일반화한 Barannikov-Kontsevich의 호지구조 변화[7]와 X의 양자 코호몰로지 $QH^*(X)$가 Frobenius-Saito 구조로서 동형이고 그 반대형태도 성립한다.

6) 이러한 관점에서 새로운 옹골화가 Kresch, 오용근교수 그리고 필자와의 공동연구에서 제시되었다. 여기서 새로운 아이디어는 공변역(codomain) 공간도 돋보기를 이용하여 변화됨을 허용한다는 것이다.

안정사상 모듈라이를 이용한 GW 이론과 안정준사상 모듈라이를 이용한 Gauged GW 이론이 동치라고 예상된다. 정확한 형태는 종수가 0일 때만 제안되었다. 즉, 종수가 0인 불변량들로 이루어진 Givental의 Lagrange Cone들이 서로 일치할 것으로 예상된다. 일반적인 종수 g에서는 종수끼리 서로 대응되지는 않고, 종수가 g이하인 불변량들 모임끼리 대응이 될 것으로 예상하며, 이를 위한 대수적인 언어가 나오길 기대한다. 안정준사상 옹골화는, 공변역이 복소선으로 고정되어 있으면서 옹골화가 가능하다. 따라서, 복소선에 있는 원군 S^1작용이 의사사상 옹골화까지 확장 가능하며, 그 고정 자취 (fixed locus)가 비교적 간단하다. Calabi-Yau 완전교차 토릭 다양체(complete intersections in toric varieties)의 거울대칭성을 해결한 Givental의 증명 방식을 GW=GGW(GaugedGW) 예상 관점에서 설명해보자. 정의역이 복소선 P^1으로 고정된 준사상 모듈라이가 공변역 X가 토릭인 경우에 그 당시 알려져 있었고 호몰로지컬 의미로 용이한 공간이다. 따라서 이를 이용하여 정의된 불변량들은 쉽게 계산이

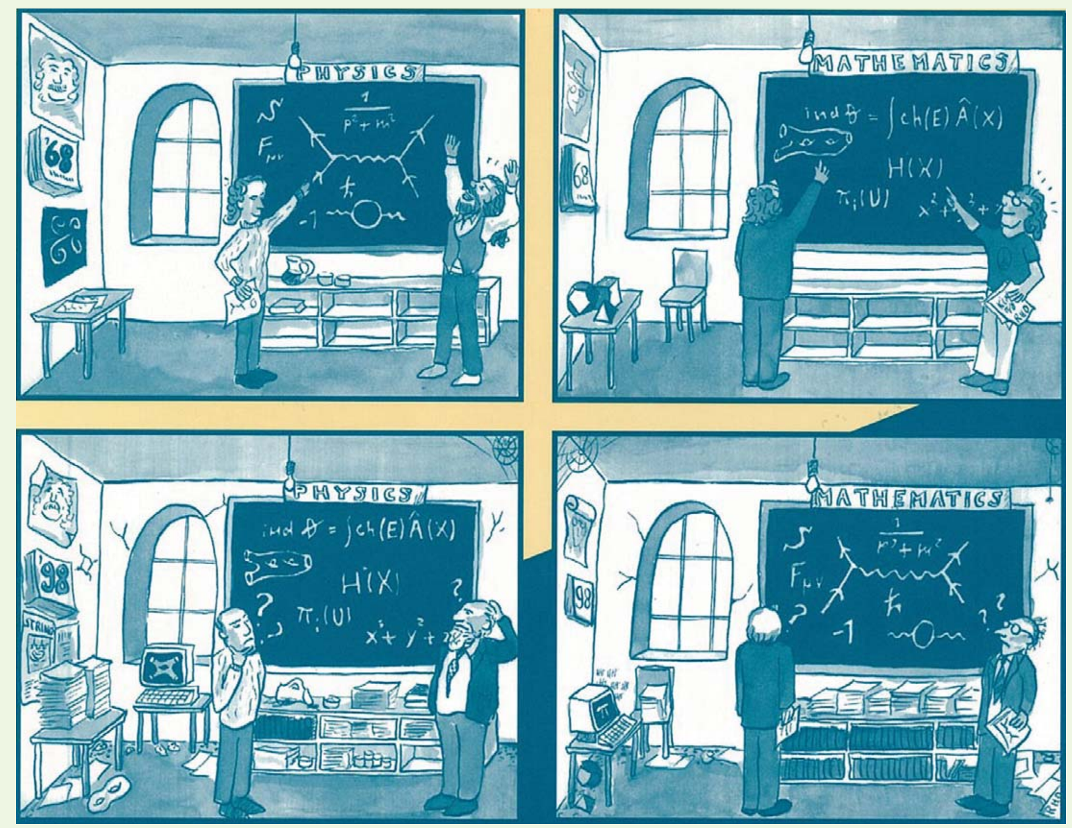

그림 3. "Good luck! 경고: 표류 및 난파 조심!" (출처: 수학자들을 위한 양자역학과 끈이론 Vol. 2 표지: 미국수학회 & 고등연구원)

되며, 거울대칭에서 나오는 주기적분(Period integrals)과 일치함을 알 수가 있다. 결국, 위 경우의 거울대칭은 토릭준사상 모듈라이와 GW를 정의하는 안정사상 모듈라이의 비교로 귀착되며, 그 비교가 Givental에 의하여 성공적으로 이루어졌다.

층공간의 옹골화들인 DT 및 PT 모듈라이는 X가 3차원일 때, 가상적으로 매끄럽다고 알려져 있다. 특히 X가 3차원 Calabi-Yau인 경우엔, 가상적 매끄러움에 대칭성이 있다. 일반적으로 어떤 공간 M이 대칭적 가상적 매끄러움인 경우에는 M의 가상적 기본류 $[M]^{vir}$는 0차원이고 그 숫자 $[M]^{vir}$은 M의 위상적 오일러 표수[8]와 같다는 중대한 사실이 Behrend에 의하여 밝혀졌다. 오일러 표수는 선형성이 있으므로, M을 여러 가지 편의대로 조각을 내어서 각각 조각들의 오일러 표수들을 더함으로써 $[M]^{vir}$를 연구할 수 있게 해준다. 이는 벽횡단(Joyce-Song, Kontsevich-Soibelman의 wall-corssing) 공식들의 도출에 큰 역할을 하게 된다. Maulik, Nekrasov, Okounkov (2006년도 필즈상 수상자), Pandharipande는 공동연구에서 GW 불변량과 환원된(reduced) DT 불변량이 동치임을 보여주는 구체적인 식 (MNOP 예상)을 제시하였다. 또한 DT=PT 예상에 의하면, 환원된 DT 불변량은 PT 불변량과 정확히 같다. 이 DT=PT 예상은 X가 옹골찬 Calabi-Yau 다양체인 경우에 해결을 Y. Toda가 작년에 발표하였다. 그 방법의 핵심에는 JS-벽횡단 공식이 있었다. 하지만, 다른 예상들의 해결을 위해서 더욱 일반화된 벽횡단 공식 연구가 선행되어야 할 것이다.

Profile

김범식 교수 고등과학원 수학부 교수이다. 서울대 수학과를 졸업, 미국 버클리대학교에서 수학 박사학위를 받았다. 연구분야는 사교 복소 기하이다. 2003년 '젊은 과학자상' 을 수상하였다.

7) $D^b(Coh(X^\vee))$의 A^∞-범주 변형으로 얻게 된다.

8) 정확히는, 가중치 오일러 표수이다. 이 가중치는 Behrend 함수에 의해 주어지는데, Behrend 함수는 스킴구조만 있으면 정의되는데, 국소적 특이성에만 의존한다.